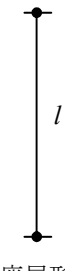


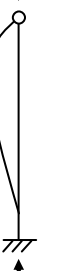
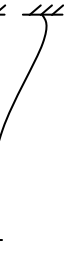



15. 8 座屈

問1 表1は、単純な境界条件を持つ圧縮材の座屈長さである。これらは、理想的境界条件とするときの理論値である。しかし実際の構造物では完全な拘束や完全な自由の条件になることはほとんどない。この点を考慮すれば、表1の座屈長さにより部材設計した場合、最も危険側になりやすいと思われるのは、どれか。(昭和54)(難易度C)

表1

移動に対する条件	拘束			自由	
回転に対する条件	両端自由	両端拘束	1端拘束 他端自由	両端拘束	1端拘束 他端自由
 l 座屈形					
l_k	l	$0.5l$	$0.7l$	l	$2l$
	l : 材長 l_k : 座屈長さ				
	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)

(解) 実際の構造物では、ピン接合に比べて固定端の場合は、理論値のような完全な拘束条件になり難い。よって、Eの場合の座屈長さは $l_k = 2l$ になるから、最も危険側になる。

問2 図のような構造物 A、B、C における弾性座屈荷重の理論値をそれぞれ P_A 、 P_B 、 P_C とした場合、それらの座屈荷重を比較せよ。ただし、すべての柱は全長にわたって等質等断面であり、梁は剛体とし、柱及び梁の質量は無視できるものとする。(平成13)(難易度B)

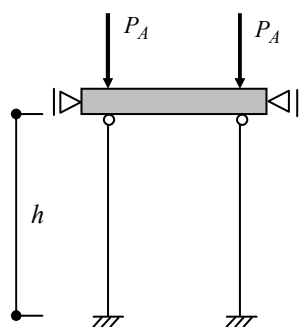


図 (A)

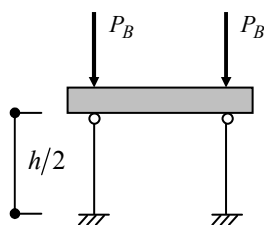


図 (B)

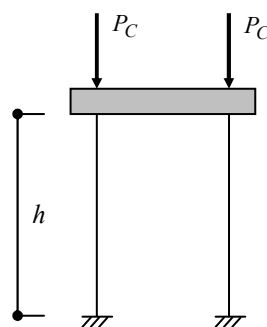
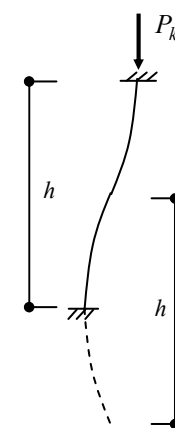


図 (C)



図(D)

(解) 弾性座屈荷重は $P_k = \frac{\pi^2 E \cdot I}{l_k^2}$ から求められる。

ここで、 E : ヤング係数、 I : 柱の断面2次モーメント、 l_k : 座屈長さ 13. 5節を参照すること(要注意)。一端固定、他端ピンの場合で ${}_A l_k = 0.7h$ 、一端固定、他端自由端の場合で ${}_B l_k = 0.5h \times 2 = h$ 、

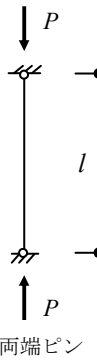
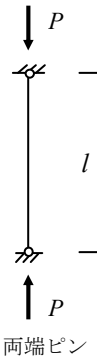
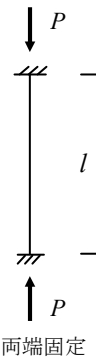
両端ピンと（図 D）同様な座屈変形で ${}_C l_k = h$ である。よって、 ${}_A P_k = \frac{\pi^2 E \cdot I}{{}_A l_k^2} = \frac{2.04 \pi^2 E \cdot I}{h^2}$ 、

$${}_B P_k = \frac{\pi^2 E \cdot I}{{}_B l_k^2} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{h^2}、{}_C P_k = \frac{\pi^2 E \cdot I}{{}_C l_k^2} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{h^2}$$

問3 表1のような材端条件で同一材質からなる柱A、B、Cが、中心圧縮力を受けたときの弾性座屈荷重の理論値 P_A 、 P_B 、 P_C を求めよ。ただし、柱A、B、Cの材端の水平移動は拘束されているものとする。それぞれ、断面2次モーメントは $3I$ 、 $3I$ 、 I 、断面積は S 、 $3S$ 、 $3S$ とする。

（平成9）（難易度C）

表1

柱	A	B	C
材端条件			
断面2次モーメント	$3I$	$3I$	I
断面積	S	$3S$	$3S$

（解）弾性座屈荷重は $P_k = \frac{\pi^2 E \cdot I}{l_k^2}$ から求められる。

ここで、 E ：ヤング係数、 I ：柱の断面2次モーメント、 l_k ：座屈長さ

A柱の座屈長さは、両端ピン固定の場合で ${}_A l_k = l$

B柱の座屈長さは、両端ピン固定の場合で ${}_B l_k = l$

C柱の座屈長さは、両端固定の場合で ${}_C l_k = l/2$ である。よって

$${}_A P_k = \frac{\pi^2 E \cdot 3I}{{}_A l_k^2} = \frac{3\pi^2 E \cdot I}{l^2}、{}_B P_k = \frac{\pi^2 E \cdot 3I}{{}_B l_k^2} = \frac{3\pi^2 E \cdot I}{l^2}、{}_C P_k = \frac{\pi^2 E \cdot I}{{}_C l_k^2} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 E \cdot I}{l^2}$$

問4 中心圧縮を受ける長柱の弾性座屈荷重 P_k に関する次の記述のうち、最も不適当なものはどれか。ただし、柱は、全長にわたって等質等断面とし、材端の水平移動は拘束されているものとする。（平成2）（難易度C）

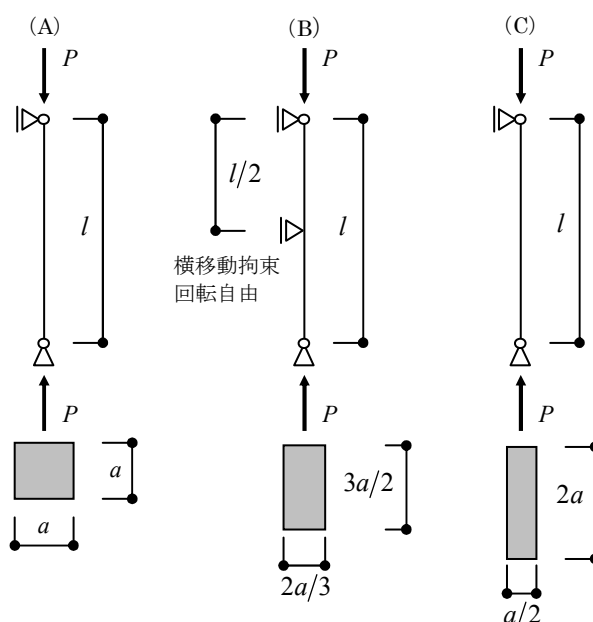
1. P_k は、柱の長さの2乗に比例する。
2. P_k は、柱材のヤング係数に比例する。
3. P_k は、柱断面の弱軸に関する断面2次モーメントに比例する。
4. P_k は、柱の材端条件が、両端ピンの場合より両端固定の場合のほうが大きい
5. P_k は、柱の材端条件が、両端ピンの場合より一端固定他端ピンの場合のほうが大きい

(解) 断面 2 次モーメントを I 、ヤング係数を E 、座屈長さを l_k とすると、座屈荷重は $P_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$ で

ある。よって、 P_k は、柱の長さの 2 乗に反比例する。また、ヤング係数が大きいほど、柱の剛度 K が強いほど、部材断面（座屈しやすい軸）の断面 2 次モーメントが大きいほど、両端の固定条件がしっかりしているほど、座屈に対する抵抗が増し、座屈荷重が大きくなる。 P_k の式を見て分かるが、右辺の分母は座屈長さ l_k の 2 乗だけがある。想像してみると、圧縮を受ける部材は、長さが長くなるほど、折れ曲がり（座屈）しやすいことは簡単に分かるであろう。 P_k の式を知らなくても、なんとなく解けると思う。

問 5 図のような支持条件及び断面形で同一材質からなる柱 A～C において、中心圧縮のオイラー座屈荷重の大小関係を求めよ。ただし、オイラー座屈荷重 P_{cr} は、 $P_{cr} = \pi^2 EI / l_k^2$ で与えられる。ここで、 E はヤング係数、 I は座屈軸に関する断面 2 次モーメント、 l_k は座屈長さを表すものとする。(平成 6)

(難易度 B)



(解) 座屈軸についての断面 2 次モーメントは、弱軸に関する値である。

(A) については、座屈長さは、 $l_k = l$ 、断面 2 次モーメントは、 $I = a \times a^3 / 12 = a^4 / 12$ であるから、

$$P_{cr} = \pi^2 EI / l_k^2 = \frac{\pi^2 E a^4}{l^2 \cdot 12} = \frac{\pi^2 E \cdot a^4}{12 l^2} \text{ となる。}$$

(B) については、座屈長さは、 $l_k = l/2$ 、断面 2 次モーメントは、 $I = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{3a}{2}\right) \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^4}{12}$ であるから、 $P_{cr} = \frac{4\pi^2 E \cdot \frac{a^4}{12}}{(l/2)^2} = \frac{16}{9} \cdot \frac{\pi^2 E \cdot a^4}{12 l^2}$ となる。

(C) については、座屈長さは、 $l_k = l$ 、断面 2 次モーメントは、 $I = \frac{1}{12} \cdot 2a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4}{12}$ であるから、

$$P_{cr} = \frac{\frac{\pi^2 E \cdot a^4}{4 \cdot 12}}{l^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 E \cdot a^4}{12 l^2} \text{ となる。}$$

問6 図1のような骨組み A、B、C の弾性座屈荷重をそれぞれ P_A 、 P_B 、 P_C としたとき、それらを大きい順に並べよ。骨組み A、B、C の曲げ剛性を、それぞれ $3EI$ 、 $2EI$ 、 EI とする。(平成5)

(難易度 A)

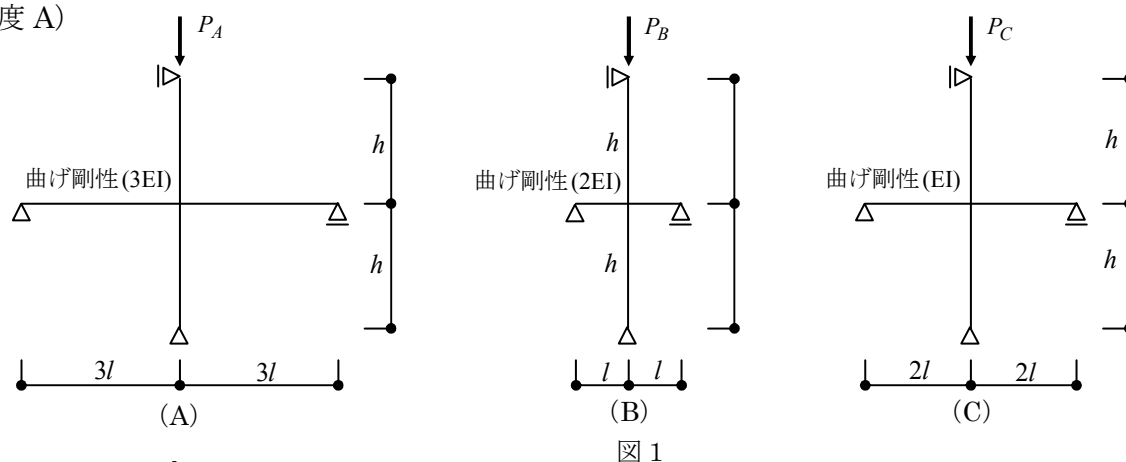


図 1

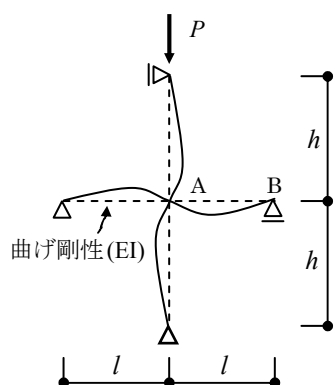


図 2

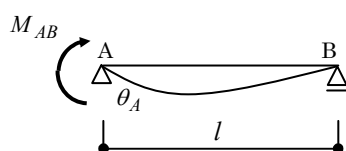


図 3

(解) 図2は、骨組みに弾性座屈荷重 P が作用したときの面内座屈の形状である。柱が座屈しようとするとき、梁はその回転を拘束しようとする。この回転を拘束しようとする梁の回転剛性が大きい程座屈荷重が大きくなる。図2の梁 A-B を考えてみると図3のようになる。A 点に曲げモーメント M_{AB} を作用させたとき、回転角 θ_A は次式で計算できる (4章)。

$$\theta_A = \frac{M_{AB} \cdot l}{3EI} \text{ であり、 } M_{AB} = \frac{3EI}{l} \cdot \theta_A$$

この回転角はモールの定理を使えば簡単に求められる。よって、回転剛性係数は $3EI/l$ であるから、図1の問題の回転剛性係数を求めて比較すればよい。(A) の場合は $R_A = 3EI/3l = EI/l$ 、(B) の場合は $R_B = 2EI/l$ で (C) の場合は $R_C = EI/2l$ となる。よって、 $P_B > P_A > P_C$ を得る。

(別解) この問題は柱の座屈を梁により抵抗している。ゆえに、単純に梁の強さ(剛度)を比較しても解が得られる。図3を撓角法の B 端ピンで A 端は外モーメントが作用しているから (6-23 式)

$$M_{AB} = 2EK_0 k_{AB} (1.5\theta_A) = 2E \frac{I}{l} (1.5\theta_A) \text{ から、 } M_{AB} = \frac{3EI}{l} \cdot \theta_A \text{ となる。}$$

もし、一端ピンの公式 (6-23 式) が出てこない場合は (7-1) 式のように、B 端を固定とみなして

$$M_{AB} = 2EK_0 k_{AB} (2\theta_A)、M_{AB} = \frac{4EI}{l} \cdot \theta_A \text{ としても、 } P_k \text{ の大きさの比較だけなら同じ結果を得る。}$$

ただし、 $K_0 k_{AB} = K = I/l$ は当然、知っていなければならない。

問 7 図 1 に示すような長さの柱がある。このとき座屈荷重の大きい順に並べよ。但し部材の断面形状と質は同じである。(平成 8) (難易度 C)

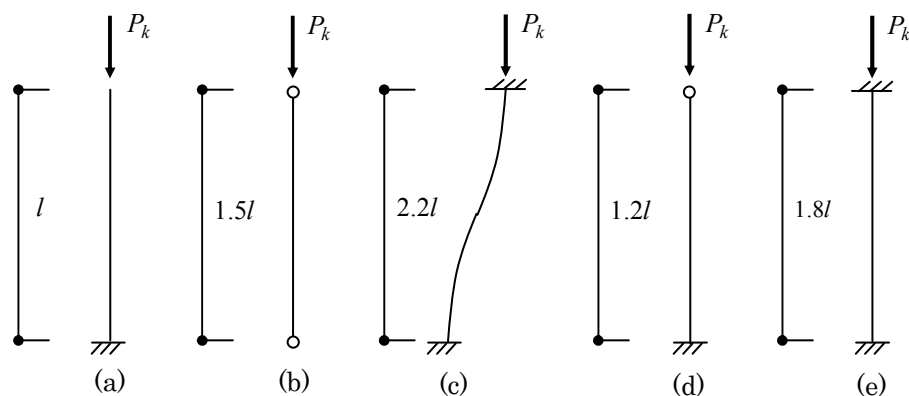


図 1

(解) 両端ピン支持の柱の座屈長さを標準長さとする、それぞれの座屈長さは

(a) の場合は座屈の標準形にするには、長さは l であるから座屈長さは $l_k = 2l$

(b) の場合は座屈の標準形であるから、長さは $1.5l$ であるから座屈長さは $l_k = 1.5l$

(c) の場合は座屈の標準形にするには、長さは $2.2l$ であるから座屈長さは $l_k = 2.2l$ (問 2 参照)

(d) の場合は座屈の標準形にするには、長さは $1.2l$ であるから座屈長さは $l_k = 0.7 \times 1.2l = 0.84l$

(e) の場合は座屈の標準形にするには、長さは $1.8l$ であるから座屈長さは $l_k = 0.9l$

となる。座屈荷重の大きい順に並べるには座屈長さが短い順に並べればよい。

$$(d) > (e) > (b) > (a) > (c)$$

問 8 中心圧縮力を受ける長方形断面の長柱の弾性座屈荷重 P_e に関する次の記述のうち、最も不適当なものはどれか。ただし、柱は等質等断面とし、材端の水平移動は拘束されているものとする。

(平成 16)

1. P_e は、柱の長さの二乗に比例する。
2. P_e は、柱の断面の弱軸に関する断面 2 次モーメントに比例する。
3. P_e は、柱材のヤング係数に比例する。
4. P_e は、柱の材端条件が、「両端ピン」の場合より「一端ピン他端固定」の場合のほうが大きい。
5. P_e は、柱の材端条件が、「一端ピン他端固定」の場合より「両端固定」の場合のほうが大きい。

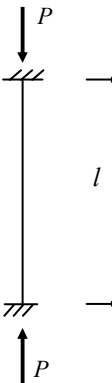
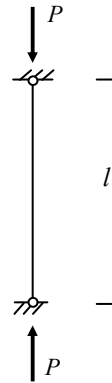
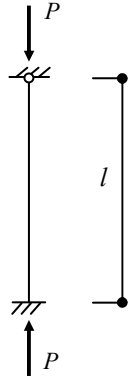
(解) 中心圧縮力を受ける長方形断面の長柱の弾性座屈荷重は $P_e = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$ である。 E : ヤング係数、 I :

断面 2 次モーメント、 l_k : 座屈長さであり、この手の問題に対してはこの式を暗記しておく必要がある。両端の支持条件の違いによる、座屈長さについては問 7 を参照すればよい。正解は 1。

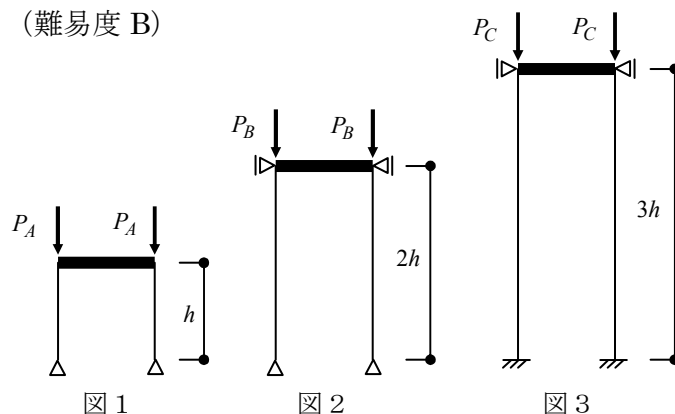
問 9 図のような支持条件の柱 A、B、C が、中心圧縮力を受けたときの座屈長さの理論値を求めよ。ただし、それぞれの柱は等質等断面の弾性部材とし、長さは等しいものとする。また、すべての材端の水平移動は拘束されているものとする。(平成 17) (難易度 C)

(解) 12 章、13.5 節、図 12.7 を参照すればよい。

$$A : l_k = 0.5l、B : l_k = l、C : 0.7l$$

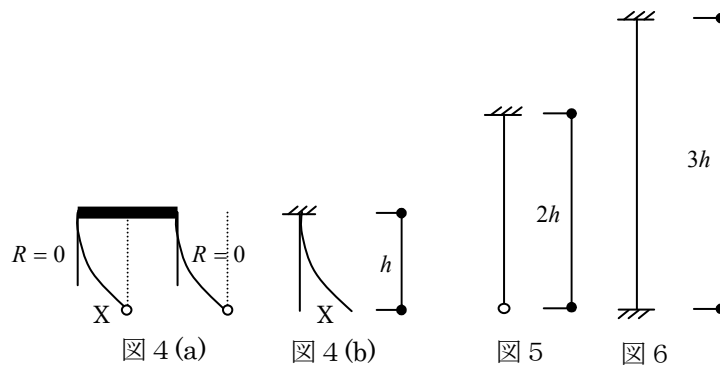
柱	A	B	C
支持条件			
	両端固定	両端ピン	一端ピン 他端固定

問 10 図のような構造物、図 1、図 2、図 3 の弾性座屈荷重をそれぞれ P_A 、 P_B 、 P_C としたとき、それらの大小関係を求めよ。ただし、すべての柱は等質等断面であり、梁は剛体とし、柱及び梁の重量は無視する。(平成 18) (難易度 B)



(解)

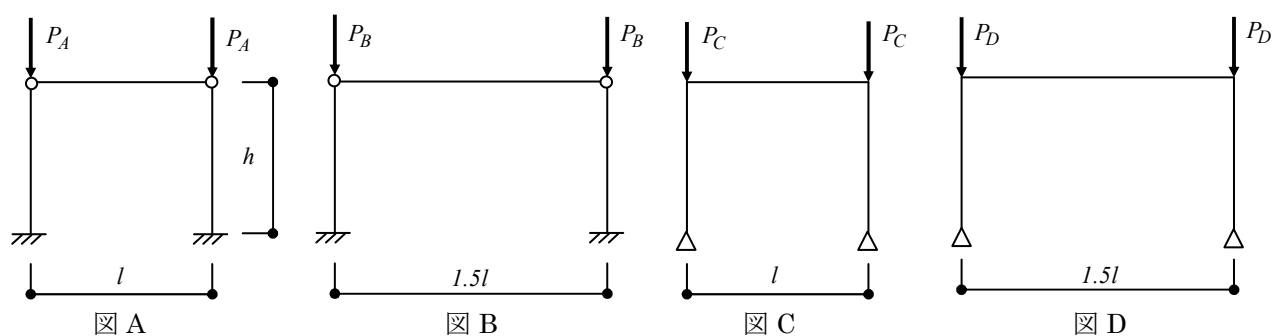
等質等断面材の弾性座屈荷重の大小関係は座屈長さを求めればよい。その短い方の構造物で座屈荷重が大きいことになる。次に、図 1 の座屈の形状は図 4 のように、柱頭の回転は無いが左右に移動



する。このことは、柱頭と柱脚は相対変位を視てみると、図 4 (b) のような一端固定で他端自由な片持梁と同じ座屈変形を起こすことが分かる。図 2 と図 3 の柱頭を考えると回転は無し、左右にも移動しないし部材は軸方向に変形しないことから、図 5、図 6 のように固定端と考えられる。

よって、図 1、図 2、図 3 の座屈長さは、 ${}_A l_k = 2h$ 、 ${}_B l_k = 0.7 \times 2h = 1.4h$ 、 ${}_C l_k = 0.5 \times 3h = 1.5h$ となる。これより、それぞれの弾性座屈荷重は $P_B > P_C > P_A$ となる。

問 11 図 1 のような構造物 A、B、C、D の柱の弾性座屈荷重をそれぞれ、 P_A 、 P_B 、 P_C 、 P_D としたとき、それらの大小関係で正しいものはどれか。ただし、すべての柱及び梁は等質等断面であり、「柱及び梁の重量」及び「柱と梁の座屈と面外座屈」については無視する。(平成 19) (難易度 A)



1. $P_A = P_B > P_C > P_D$ 、 2. $P_A = P_C > P_B = P_D$ 、 3. $P_B > P_A > P_D > P_C$
 4. $P_C = P_D > P_B > P_A$ 、 5. $P_D > P_C > P_A = P_B$

(解) この問題を解く場合、座屈に耐える部分は何の材なのかを判断できれば簡単に解ける。例えば図 C の場合は、図 1 のように上下に反転すれば、梁の部分が座屈に耐えていることが分かる。

図 C と図 D を比較した場合、梁は等質等断面であるから、梁の剛度は断面 2 次モーメントを長さで除すればよいから (I/l)、梁の長さが短いほど剛度が大きいことになる。よって、 $P_C > P_D$ を得る。

図 A と図 C から、 $P_A > P_C$ である。

図 A と図 B の梁は、「座屈と面外座屈」は無視するとしているから、軸方向力も無視すると考えられる。そうすると、梁の長さが、柱の座屈に影響を与えないことになる。よって、 $P_A = P_B$ を得る。

1. が正解である。

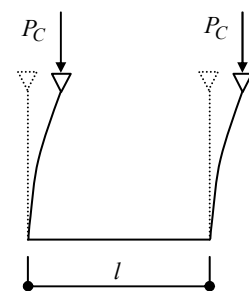


図 1