

1 級建築士構造力学問題集

15. 1 連続・境界条件

問1 図1のように、上下の剛体に挟まれて圧縮力 P を受けている鉄筋コンクリート円柱がある。このとき、鉄筋とコンクリートに生じる圧縮応力度 σ_s 、 σ_c と歪度 ε_s 、 ε_c を求めよ。(難易度 A)

A_s : 鉄筋の総断面積

A_c : コンクリートの断面積

E_s : 鉄筋のヤング係数

E_c : コンクリートのヤング係数

(解) 鉄筋とコンクリートが負担する応力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。鉄筋とコンクリートの歪量は

$$\delta_s = \frac{P_1 h}{E_s A_s}, \quad \delta_c = \frac{P_2 h}{E_c A_c} \quad (2)$$

である。両部材共、同じ量だけ縮むから

$$\delta_s = \delta_c \quad (3)$$

である。(2)式を(3)式に代入し、整理すると

$$P_1 = \frac{E_s A_s}{E_c A_c} P_2 \quad (4)$$

(4)式を(1)式に代入し、整理すると

$$P_1 = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P, \quad P_2 = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad (5)$$

が得られる。よって鉄筋とコンクリートの応力度は $\sigma_s = \frac{P_1}{A_s} = \frac{E_s}{E_s A_s + E_c A_c} P$ 、

$\sigma_c = \frac{P_2}{A_c} = \frac{E_c}{E_s A_s + E_c A_c} P$ となる。歪度は同じ値である。鉄筋とコンクリートの長さと歪が等しい。

よって、 $\varepsilon_s = \frac{\delta_s}{h} = \frac{P_1 h}{E_s A_s h} = \frac{P_1}{E_s A_s} = \frac{P}{E_s A_s + E_c A_c}$ 、 $\varepsilon_c = \varepsilon_s$ が得られる。

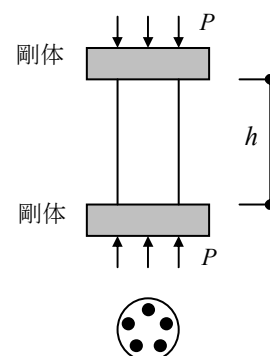


図 1

問2 図1のようなC端固定の片持梁B-C材の他端BをA-B材で吊っているときB点の変形とA-B材の引張応力度 σ を求めよ。但しA-B材のヤング係数は E 、断面積は A で、B-C材のヤング係数は E 、断面2次モーメントは I とする。(難易度 A)

(解) A-B材が伸びる(縮む)ときに生じる抵抗力を P_1 、B-C梁が撓むときに生じる抵抗力を P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。またA-B材が伸びる δ_1 とB-C材の撓み δ_2 は

$$\delta_1 = \frac{P_1 \cdot l}{EA}, \quad \delta_2 = \frac{P_2 \cdot l^3}{3EI} \quad (2)$$

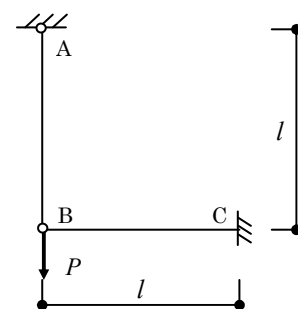


図 1

B 点の連続条件により $\delta_1 = \delta_2$ だから、 $\frac{P_1 \cdot l}{EA} = \frac{P_2 \cdot l^3}{3EI}$ で整理し(3)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = \frac{A \cdot l^2}{3I} P_2 \quad (3)$$

$$P_1 = \frac{A \cdot l^2}{Al^2 + 3I} P, \quad P_2 = \frac{3I}{Al^2 + 3I} P \quad (4)$$

を得る。よって、A-B 材の引張応力度は $\sigma = \frac{P_1}{A} = \frac{l^2}{Al^2 + 3I} P$ 、B-C 材の変位は $\delta_2 = \frac{l^3}{E(Al^2 + 3I)} P$

問3 図1のような交差梁の交点Eに鉛直荷重Pが作用している。そのときA、B、C、D点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数はE、断面2次モーメントをIとする。

(難易度 A)

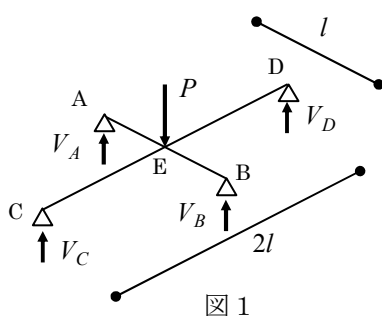


図1

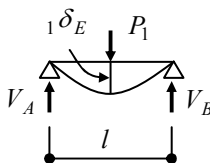


図2

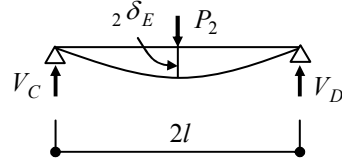


図3

(解) 梁 A-B 材と C-D 材が負担する外力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。図2の中央の撓みと図3の中央の撓みは、

$${}_1\delta_E = \frac{P_1 \cdot l^3}{48EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{P_2 (2l)^3}{48EI} = \frac{8P_2 \cdot l^3}{48EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共 E 点での値であり、交差梁は E 点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_1 = 8P_2 \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = 8P/9, \quad P_2 = P/9 \quad (5)$$

が得られ、反力は $V_A = V_B = P_1/2 = 4P/9$ 、 $V_C = V_D = P_2/2 = P/18$ となる。鉄筋コンクリート造のスラブの配筋を設計する場合、短辺方向 (A-B 材) の鉄筋がスラブに作用する積載荷重の大部分の応力 (曲げモーメント) を負担していることに通じる。

問4 図1のような交差梁の交点 E に鉛直荷重 P が作用している。そのとき A 、 B 、 C 、 D 点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数は E 、断面2次モーメントを I とする。

(難易度 A)

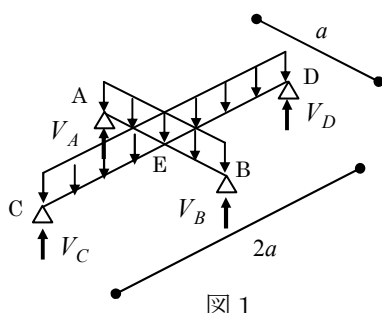


図1

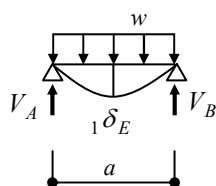


図2

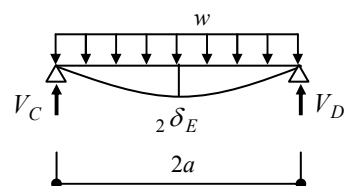


図3

(解) 梁 $A-B$ 材と $C-D$ 材が負担する外力を P_1 、 P_2 とすると、 E 点に外力が作用していないから (梁全体の自重が作用していると考えれば、 E 点に荷重が作用していないことが分かる)

$$P_1 + P_2 = 0 \quad (1)$$

となる。図2の中央の撓みと図3の中央の撓みは、

$${}_1\delta_E = \frac{5wa^4}{384EI} + \frac{P_1a^3}{48EI} = \frac{5wa^4}{384EI} + \frac{P_1a^3}{48EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{5w(2a)^4}{384EI} + \frac{P_2(2a)^3}{48EI} = \frac{80wa^4}{384EI} + \frac{8P_2a^3}{48EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共 E 点での値であり、交差梁は E 点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_2 = \frac{P_1}{8} - \frac{75wa}{64} \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = \frac{25wa}{24}, \quad P_2 = -\frac{25wa}{24} \quad (5)$$

が得られる。反力は図4と図5から

$$V_A = V_B = \frac{P_1}{2} + \frac{wa}{2} = \frac{49wa}{48}, \quad V_C = V_D = \frac{P_2}{2} + \frac{2wa}{2} = \frac{23wa}{48}$$

となる。 $V_A + V_B + V_C + V_D = aw + 2aw = 3wa$

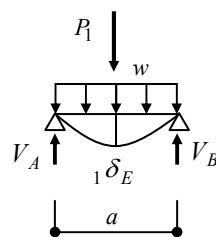


図4

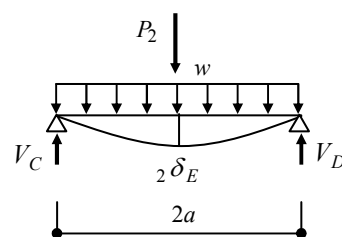


図5

問5 図1のような梁において、梁のヒンジである B 点に鉛直力 P が作用したとき、 A 点と C 点の鉛直反力 R_A 、 R_C の絶対値の比を求めよ。ただし梁は等質等断面とする。(平成5) (難易度 B)

(解)

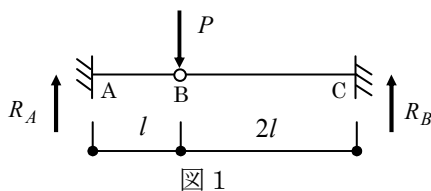


図1

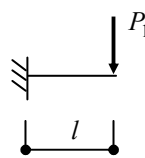


図2

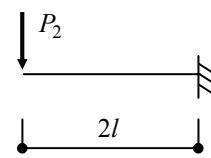


図3

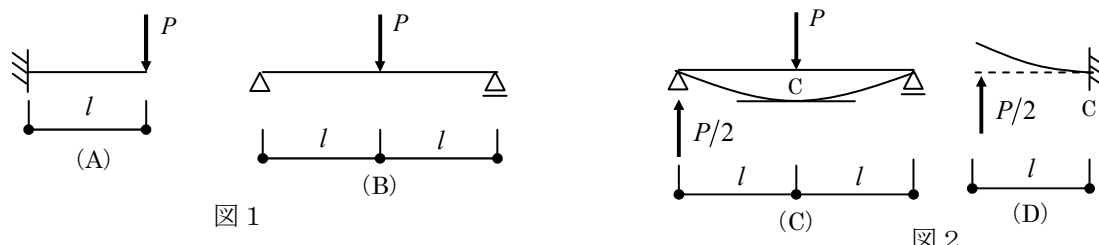
外力 P を図2と図3のように $A-B$ 材が P_1 、 $B-C$ 材が P_2 負担するものとする。よって

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

両図のような、片持梁における自由端の鉛直変位は、 $\delta = Pl^3/3EI$ (E : ヤング係数、 I : 断面2次モ

ーメント) である。図 2 の B 点の鉛直変位は $\delta_{BA} = P_1 l^3 / 3EI$ 、図 3 の B 点の鉛直変位は $\delta_{BC} = P_2 (2l)^3 / 3EI = 8P_2 l^3 / 3EI$ となる。ここで、梁の連続条件より、 $\delta_{BA} = \delta_{BC}$ であるから $\frac{P_1 l^3}{3EI} = \frac{8P_2 l^3}{3EI}$ で $P_1 = 8P_2$ となる。(1)式に代入すると $P_1 = R_A = 8P/9$ 、 $P_2 = R_C = P/9$ が得られる。

問 6 図 1 の集中荷重 P が作用する梁 A、B の荷重点に生じる弾性撓みを、それぞれ、 δ_A 、 δ_B としたとき、それぞれの値を求めよ。ただし、梁 A、B は等質等断面とする。(平成 2) (難易度 A)



(解) 単純梁の変形は図 2 (C) のようになり、C 点の回転角は零である。よって、C 点の鉛直変位は、梁の左半分を考慮して (D) のよう片持梁の鉛直変位を解けばよい。図 1 (A) の自由端の鉛直変位は $\delta_A = \frac{Pl^3}{3EI}$ 、図 2 (D) の自由端の鉛直変位は $\delta_B = \frac{P}{2} \times \frac{l^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{6EI}$ となる。

問 7 図 1 のような梁の C 点に水平荷重 P が作用している。そのとき A、B 点の反力を求めよ。但し部材断面は同質で、ヤング係数は E 、断面積を A とする。(難易度 B)

(解) 外力 P を A-C 材と B-C 材が負担する内力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。A-C 材の伸び量と B-C 材の縮み量は

$$\delta_A = \frac{aP_1}{EA}, \quad \delta_B = \frac{bP_2}{EA} \quad (2)$$

となる。A-C 材と B-C 材共、C 点で連続していることから

$$\delta_A = \delta_B \quad (3)$$

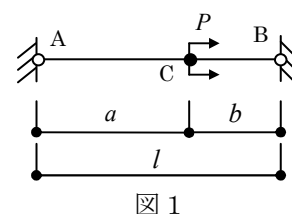
となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_1 = \frac{b}{a} P_2 \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = Pb/l, \quad P_2 = Pa/l \quad (5)$$

が得られ、反力は $V_A = P_1 = Pb/l$ 、 $V_B = P_2 = Pa/l$ となり、それぞれ左向きになる。



問8 図1のような断面積が一定で長さが $3l$ である棒に、軸方向力 P 、 P 、 $2P$ が矢印の向きに作用している。このとき、棒の下端の軸方向変位の値を求めよ。ただし、棒の断面積を A 、ヤング係数を E とし自重は無視する。(平成5)(難易度B)

(解) A・B 材に作用する応力は $2P$ の引張り応力、B・C 材に作用する応力は P の引張り応力で C・D 材には応力は作用しない。よって、A・B 材の伸びは $\delta_A = \frac{2Pl}{AE}$ 、B・C 材の伸びは $\delta_B = \frac{Pl}{AE}$ で C・D 材は伸

び縮みしないから、A 点は下方に $\delta = \delta_A + \delta_B = \frac{2Pl}{AE} + \frac{Pl}{AE} = \frac{3Pl}{AE}$

【別解】 $2P$ による下方への伸びは $\delta_A = \frac{2P \times 3l}{AE} = \frac{6Pl}{AE}$

B 点の P による上方への縮みは $\delta_B = -\frac{P \times 2l}{AE} = -\frac{2Pl}{AE}$

C 点の P による上方への縮みは $\delta_C = -\frac{P \times l}{AE} = -\frac{Pl}{AE}$

よって A 点の下方への伸びは $\delta = \delta_A + \delta_B + \delta_C = \frac{6Pl}{AE} - \frac{2Pl}{AE} - \frac{Pl}{AE} = \frac{3Pl}{AE}$

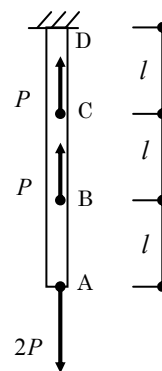


図1

問9 図1のような荷重を受ける骨組みで、A 端及び D 端に生じる曲げモーメントの値の絶対値を求めよ。ただし、すべての部材は等質等断面とし、材の軸方向の変形は無視する。(昭和61)(難易度A)

(解) 先端に集中荷重を受ける片持梁の先端の撓みは、梁の長さの3乗に比例する。

部材の軸方向変形は無視するから、B・C 材の B 点の水平変位と C 点の鉛直変位は等しくなる。

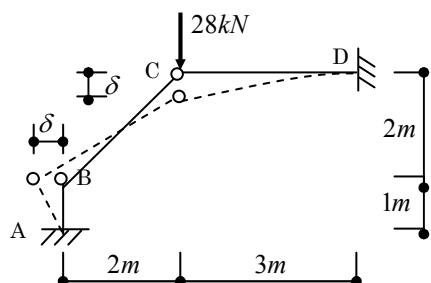


図1

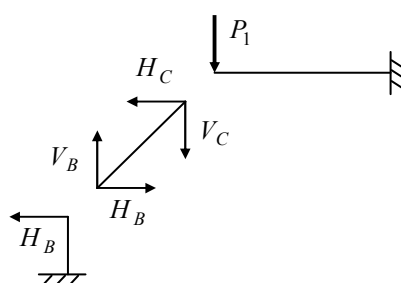


図2

図2から梁 C・D 材が負担する応力を P_1 とし、下部の骨組みが負担する応力を V_C とする。

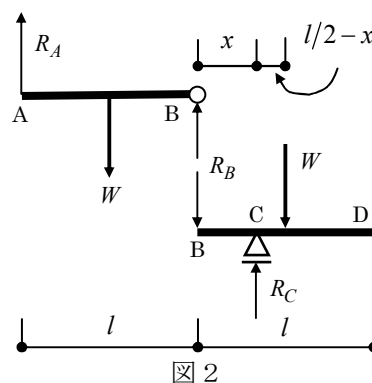
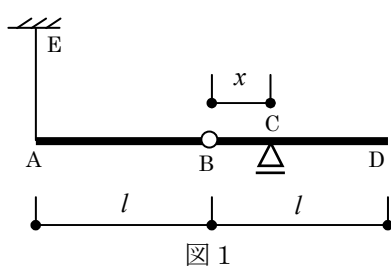
$$P_1 + V_C = 28kN \quad (1)$$

$$\delta_C = \frac{P_1 \times 3^3}{3EI} = \frac{9P_1}{EI}, \quad \delta_B = \frac{H_B \times 1^3}{3EI} = \frac{H_B}{3EI}$$

また、 $H_B = V_B = V_C$ であるから、 $\delta_B = \frac{V_C}{3EI}$ 、 $\delta_B = \delta_C$ から、 $\frac{V_C}{3EI} = \frac{9P_1}{EI}$ 、 $V_C = 27P_1$ となり(1)式に代入すると、 $P_1 = 1kN$ 、 $V_C = 27kN$ となる。よって

$$M_D = 1kN \times 3m = 3kN \cdot m, \quad M_A = 27kN \times 1m = 27kN \cdot m$$

問 10 梁 A-B と B-D は長さ l 、重さ W の均質等断面である。A-E は鋼の糸で張力 T する。そのとき梁 A-B と B-D が水平を保つには C 点のローラーの位置 x 、反力 R_C と張力 T を求めよ。(類似) (難易度 C)



(解) ゲルバー梁の一種だから、図 2 のように分割して考えるとよい。A-B 材の釣り合いから、容易に $R_A = T = R_B = W/2$ を得る。その反力 R_B は B-D 材には逆向きに作用している。B-D 材は平衡を保っているので、C 点に作用する曲げモーメントは釣り合っている。よって、 $R_B \times x = W \times (l/2 - x)$ となり $x = l/3$ を得る。y 方向の釣り合いから $\Sigma Y = -R_B - W + R_C = 0$ から $R_C = 3W/2$ となる。