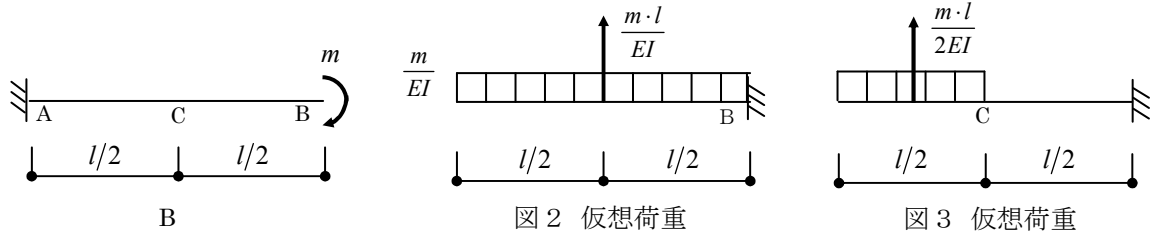


## 15. 4 梁

問1 図1の梁でC点とB点の回転角をモールの定理を使って求めよ。ヤング係数、断面2次モーメントを $E$ 、 $I$ とする。(参考)(難易度C)

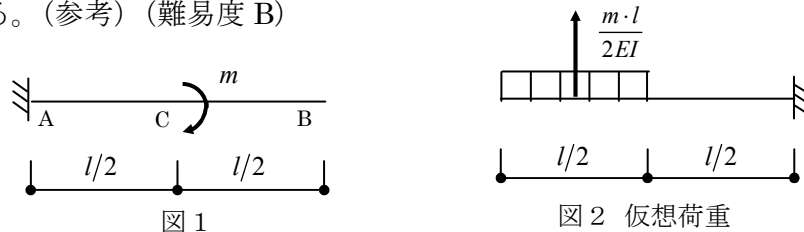
(解) 図1の曲げモーメントによる仮想荷重は図2のようになる。図2からB点の回転角はせん断力を求めることにある。よって、 $\theta_B = Q_B = ml/EI$ となる。図3からC点の回転角はC点のせん断力を求めることにある。よって、 $\theta_C = Q_C = ml/2EI$



問2 問1の条件でC点とB点の鉛直変位をモールの定理を使って求めよ。

(解) 問1の図2からB点の鉛直変位は曲げモーメントを求めることにある。よって、 $\delta_B = M_B = ml/EI \times l/2 = ml^2/2EI$ となる。図3からC点の鉛直変位はC点の曲げモーメントを求めることにある。よって、 $\delta_C = M_C = ml/2EI \times l/4 = ml^2/8EI$

問3 図1の梁でC点とB点の回転角をモールの定理を使って求めよ。ヤング係数、断面2次モーメントを $E$ 、 $I$ とする。(参考)(難易度B)



(解) 図1の曲げモーメントによる仮想荷重は、図2のようになる。図2からB点の回転角はせん断力を求めることにある。よって、 $\theta_B = Q_B = ml/2EI$ となる。

また、図2からC点の回転角はせん断力を求めることにある。よって $\theta_C = Q_C = ml/2EI$ となる。

問4 問3の条件でC点とB点の鉛直変位をモールの定理を使って求めよ。

(解) 問3の図2からB点の鉛直変位はB点の曲げモーメントを求めることにある。よって、 $\delta_B = M_B = ml/2EI \times 3l/4 = 3ml^2/8EI$ となる。

また、図2からC点の鉛直変位はC点の曲げモーメントを求めることにある。よって $\delta_C = M_C = ml/2EI \times l/4 = ml^2/8EI$ となる。

問5 図1で自由端Bに曲げモーメント $m$ が作用したときA点とB点の回転角は図1のようになった。そこで、図2のようにA点とB点に曲げモーメントが作用したとき自由端Bの回転角を求めよ。(問1、問3を参考にせよ)(平成4)(難易度A)

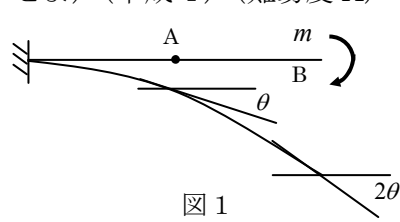


図1

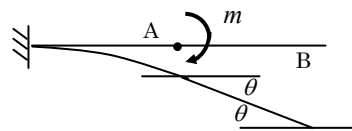


図3

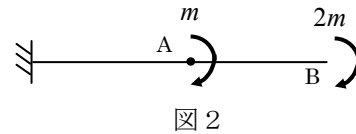


図2

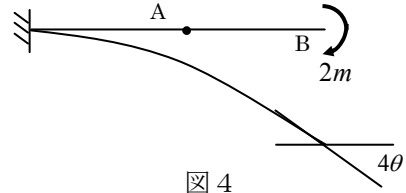


図4

(解) 図5と図6は片持梁に外モーメント $m$ が作用したときモールの定理で自由端の回転角を求める場合の仮想荷重と仮架構である。片持ち梁の回転角は長さに比例していることが分かる。ゆえに、図1より、図3のA点の回転角は $\theta$ となる。図4より、B点の回転角は明らかに $4\theta$ である。よって図2のB点の回転角は $5\theta$ となる。図1と図3で、A点の回転角をモールの定理(要点だけの説明)で解いてみる。それぞれの仮想荷重と仮架構は次のようになる。

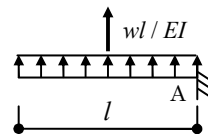


図5

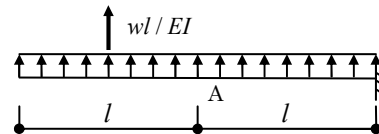


図6

ゆえに、各梁のA点の回転角は、A点から左側の仮想荷重の総和 $wl/EI$ によるせん断力であるから等しくなることが分かる。

問6 図のような等分布荷重 $w$ を受ける梁A、Bにおいて、梁Aの最大曲げモーメントの絶対値、中央部に生じる弾性撓みがそれぞれ $M_A$ 、 $\delta_A$ と梁Bに生じる最大曲げモーメントの絶対値 $M_B$ 、中央部に生じる弾性撓み $\delta_B$ を求めよ。ただし、すべての梁A、Bは等質等断面とし、 $w$ には梁の自重が含まれているものとする。(平成4)(難易度C)

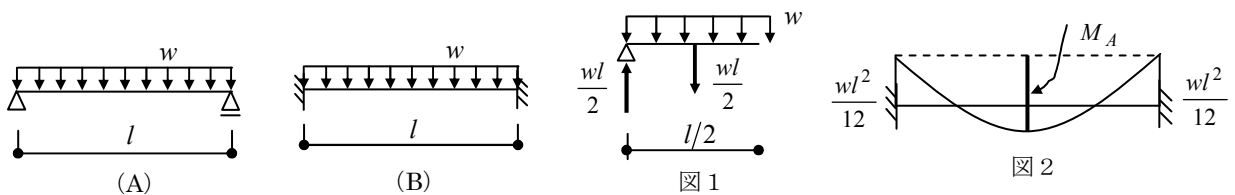


図2

(解) Aの最大曲げモーメントは梁中央ある。その値を忘れたら、図1を参照して

$M_A = \frac{wl}{2} \times \frac{l}{2} - \frac{wl}{2} \times \frac{l}{4} = \frac{wl^2}{8}$ と計算する。Bはラーメンを固定法で解くときよく使う。材端固定モーメントは $M = wl^2/12$ であり、梁中央は $M_C = M_A - wl^2/12 = wl^2/24$ である。よって、最大曲げモーメントは梁端に生じる。梁A、Bの中央の弾性撓みは、残念ながら、暗記するしかない。

$$\delta_A = \frac{5wl^4}{384EI}, \quad \delta_B = \frac{wl^4}{384EI}$$

問 7 図のような片持梁の中間点 A に集中荷重  $P$  が作用している場合、梁の自由端 B における撓み角と撓みを求めよ。ただし、梁は全長にわたって等質等断面であり、ヤング係数を  $E$ 、断面 2 次モーメントを  $I$  とし、梁の質量の影響は無視できるものとする。(平成 13) (難易度 C)

(解) 長さ  $l$  の片持梁の先端に集中荷重  $P$  が作用した場合の先端の撓みと、撓み角はモールの定理により、容易に導ける。 $\delta = Pl^3/3EI$ 、 $\theta = Pl^2/2EI$

よって、図 1 で A 点の撓みと撓み角は

$$\delta_A = \frac{P(l/2)^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{24EI}, \quad \theta_A = \frac{P(l/2)^2}{2EI} = \frac{Pl^2}{8EI} \text{ である。}$$

図 2 から A・B は直線であるので B 端の回転角は A 点のそれと、同じ値である。B 端の撓みは、回転により生じる

$$\delta = (l/2) \times \theta_A = Pl^3/16EI \text{ が追加される。よって、}$$

$$\delta_B = 5Pl^3/48EI \text{ となる。}$$

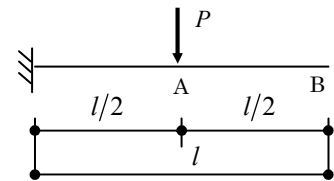


図 1

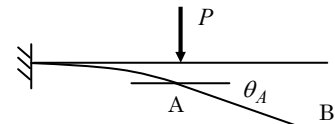


図 2

問 8 図 1 のような梁 A、B、C にそれぞれ荷重  $P$  が作用している場合、梁 A、B、C における応力、たわみ等の大きさの比 (A:B:C) を求めよ。ただし、すべての梁は、全長にわたって等質等断面であり、梁の質量の影響は無視するものとする。(平成 15) (難易度 B)

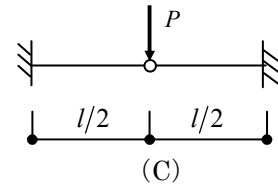
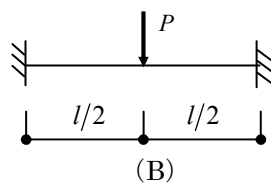
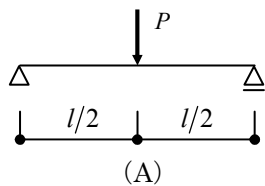


図 1

最大曲げモーメントは、最大せん断力は、鉛直方向の支点反力は、荷重点の撓みは、崩壊荷重をそれぞれ求めよ。

(解) 曲げモーメントは図 2 のようになる。

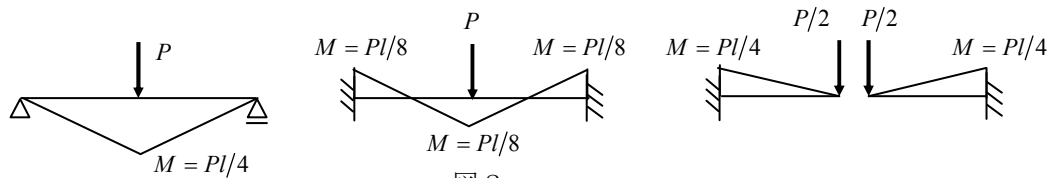


図 2

せん断力は A、B、C 共に、 $P/2$  である。支点反力はせん断力と同値だから、A、B、C 共に、図 3 のように  $P/2$  となる。単純梁の中央の撓みは、図 3 のように長さが半分の片持梁の撓み  $\delta_1$  として考えることができる。両端固定梁の中央の撓みは、図 4 の(a)、(b)、(c)のように考えられる。中央にピンがあり、両端固定梁の中央の撓みは、図 5 のように得られる。

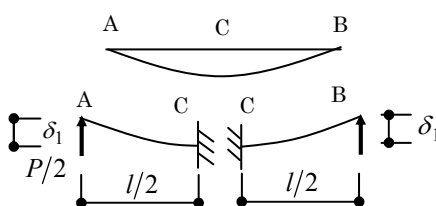


図 3

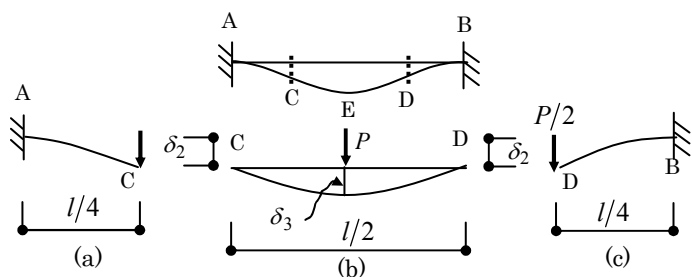


図 4

要約すると、いずれの場合も、梁の長さが、 $l/2$ 、 $l/4$  の一端固定、他端自由の片持梁の撓みが分かれば解くことができる。このとき、外力は左右に等分散するから  $P/2$  となる。支持点の反力やせん断力を求めたときの要領である。荷重  $P$  で長さ  $l$  の片持梁で自由端の撓みは、 $\delta = Pl^3/3EI$  である。これはモールの定理で簡単に求めることができる。よって、荷重  $P/2$ 、長さ  $l/2$  の片持梁で自由端の撓みは、 $\delta = Pl^3/48EI$  であり、荷重  $P/2$ 、長さ  $l/4$  の片持梁で自由端の撓みは、 $\delta = Pl^3/384EI$  である。この結果を問題に当てはめてみると、図 3 と図 5 の撓みは  $\delta_1 = Pl^3/48EI$  となる。図 4 の撓みは (a) の  $\delta_2$  と (b) の  $\delta_3$  の撓みを加算したものである。 $\delta_2 = Pl^3/384EI$  で、(b) の  $\delta_3$  はスパン  $l/2$  で単純梁の撓みであるが、これは図 3 の左側で長さが  $l/4$  の場合であるから、 $\delta_3 = Pl^3/384EI$  となる。

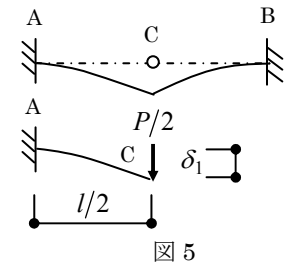


図 5

よって、 $\delta = \delta_2 + \delta_3 = Pl^3/384EI + Pl^3/384EI = Pl^3/192EI$  である。崩壊荷重は、詳しく解くには、14.9 節の間 6 を参照にすればよい。題意は各梁の崩壊荷重の比を求めることにある。仮想仕事の原理で解くと、図 6、7、8 のように塑性ヒンジを黒円印で表す。それゆえ、内部仕事量の大きさは、梁の回転を拘束する数によるから、2 個、4 個、2 個となり、崩壊荷重の大きさは 2 : 4 : 2 となる。崩壊荷重を求めるには通常、仮想仕事の原理で解く。

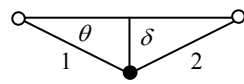


図 6

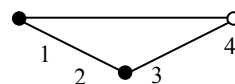


図 7

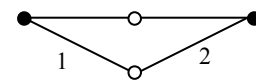


図 8

図 6 のように  $\theta$  だけ回転させる。外部仕事量は、 $W_e = P_0 \times \delta = Pl\theta/2$  で、内部仕事量は図 6 で  $W_i = 2M_0\theta$ 、図 7 で  $W_i = 4M_0\theta$ 、図 8 で  $W_i = 2M_0\theta$  となる。 $W_e = W_i$  だから、崩壊荷重は  $P_u = 4M_0/l$ 、 $P_u = 8M_0/l$ 、 $P_u = 4M_0/l$  となる。

問 9 図 1 のような梁に荷重  $P$  が作用している場合、A 点に生じる撓みを求めよ。ただし、梁は、全長にわたって等質等断面であり、ヤング係数を  $E$ 、断面 2 次モーメントを  $I$  とし、梁の質量は無視するものとする。(平成 14) (難易度 A)

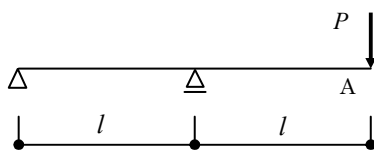


図 1

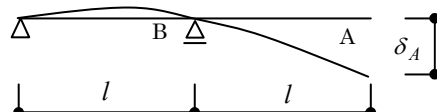


図 2

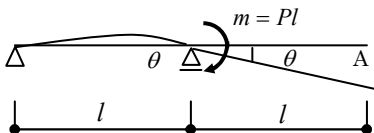


図 3

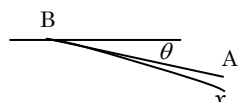


図 4

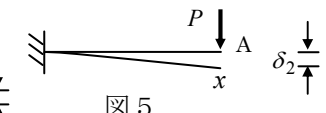


図 5

(解) 図 1 の梁の変形は図 2 のようになる。図 3 は節点 B に曲げモーメント  $m = Pl$  を作用させたときの  $\delta_1$  である。この場合 B-A は直線であることに注意すること。A 点の実際の変位は、図 4 の B-x のように湾曲している。よって、図 4 の変位  $\delta_2$  が加わることになる。また、図 4 の変形形状は、図 5 に示すような、一端固定の片持梁の変形と同一と考えられる。ゆえに、モールの定理を使って変位を求めるには、図 6 と図 5 の梁を解けばよいことになる。

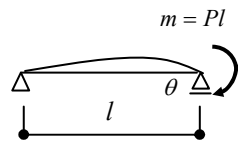


図 6

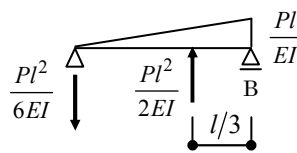


図 7

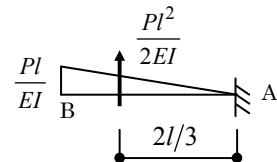


図 8

図 7 より B 点の回転角は  $\theta_B = Q_B = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pl^2}{6EI} = \frac{Pl^2}{3EI}$  となり、この回転角による A 点の鉛直変位は、

$\delta_1 = l \times \theta_B = \frac{Pl^3}{3EI}$  となる。図 8 より A 点の鉛直変位は  $\delta_2 = M_A = \frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI}$  である。以上から、A

点の鉛直変位は、 $\delta_A = \delta_1 + \delta_2 = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{2Pl^3}{3EI}$  となる。

問 10 図 1 のような梁に曲げモーメント  $m$  が作用している場合、A 点に生じる撓みを求めよ。ただし、梁は、全長にわたって等質等断面であり、ヤング係数を  $E$ 、断面 2 次モーメントを  $I$  とし、梁の質量は無視するものとする。(参考)

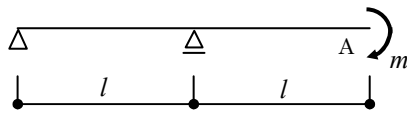


図 1

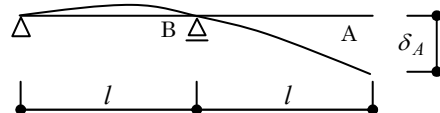


図 2

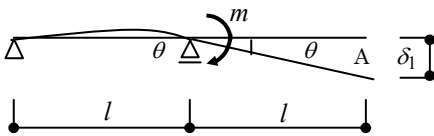


図 3

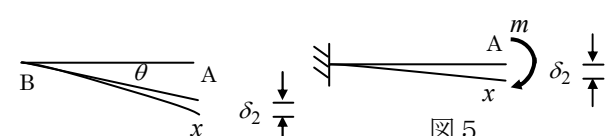


図 4

図 5

(解) 図 7 までは前問と全く同様である。図 8 が異なっている。図 8 より A 点の鉛直変位は

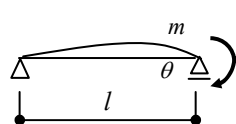


図 6

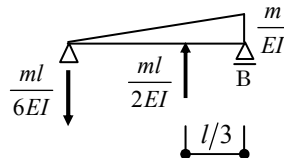


図 7

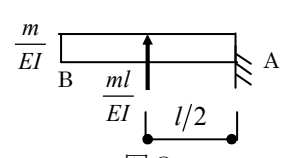
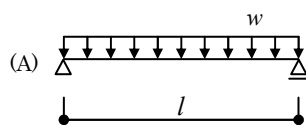


図 8

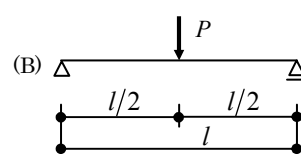
$\delta_2 = M_A = \frac{ml}{EI} \times \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{2EI}$  で、A 点の鉛直変位は、 $\delta_A = \delta_1 + \delta_2 = \frac{ml^2}{3EI} + \frac{ml^2}{2EI} = \frac{ml^2}{6EI}$  となる。

問 11 図 1 のような等分布荷重  $w$  を受ける梁 A 及び集中荷重  $P$  を受ける梁 B において、梁の中央の撓みが互いに等しくするときの  $wl$  と  $P$  の比を求めよ。ただし、梁 A、B は等質等断面とする。

(平成 9) (難易度 B)



(A)



(B)

図 1

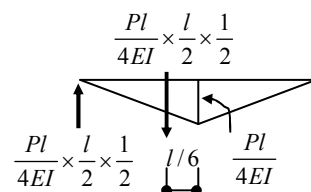


図 2

(解) (A) のような等分布荷重の中央の撓みは、暗記する必要がある (5 章仮想仕事法)。

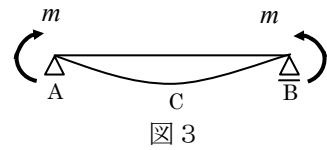
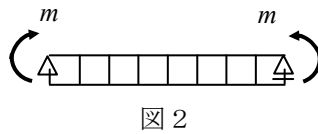
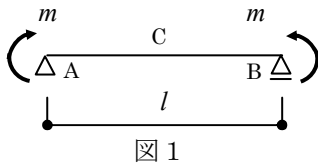
$\delta_A = \frac{5wl^4}{384EI}$ 、 $\delta_B = \frac{Pl^3}{48EI}$  である。 $\delta_A = \delta_B$  であるから、 $\frac{5wl^4}{384EI} = \frac{Pl^3}{48EI}$  となり、

$$\frac{wl}{P} = \frac{1}{48} \times \frac{384}{5} = \frac{24}{15} \text{ が得られる。}$$

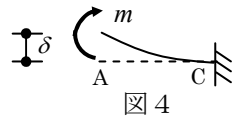
(B) の中央の撓みは、モールの定理を簡略化した図 2 より求められる。

$$\delta_B = \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{6} = \frac{Pl^3}{32} - \frac{Pl^3}{96} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

問 12 図 1 の単純梁で、A 点の回転角と梁中央 C 点の撓みを求めよ。ただし、部材は等質等断面で、ヤング係数  $E$ 、断面 2 次モーメントを  $I$  とする。(応用)

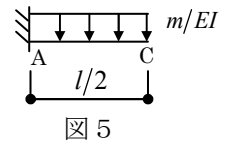


(解) A、B 点に鉛直反力、水平反力がなく、梁には図 2 のような曲げモーメント図が生じる。図 3 のような変形になるが、C 点の回転角は当然ゼロとなる。よって、A・C 間の回転や変形を求める場合、図 4 のように置き換えてもよい。それで、C 点の鉛直変位  $\delta$  は図 4 の A 点の垂直変位と同じである。

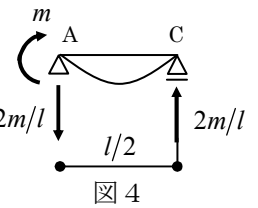
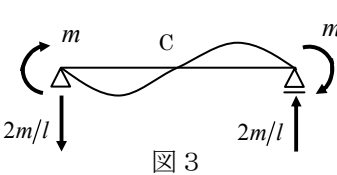
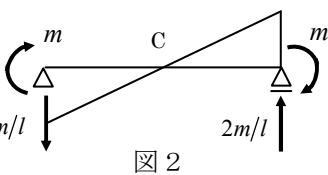
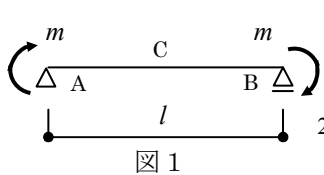


A 点の回転角も同様に図 4 から求められる。C 点の鉛直変位は、

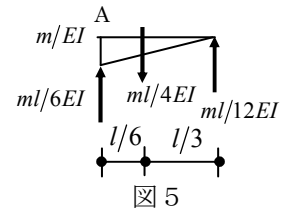
$$\delta = M_A = \left( \frac{m}{EI} \times \frac{l}{2} \right) \times \frac{l}{4} = \frac{ml^2}{8EI}, \text{ A 点の回転角は、} \theta = Q_A = \frac{m}{EI} \times \frac{l}{2} = \frac{ml}{2EI} \text{ となる。}$$



問 13 図 1 の単純梁で、A 点の回転角と梁中央 C 点の撓みを求めよ。ただし、部材は等質等断面で、ヤング係数  $E$ 、断面 2 次モーメントを  $I$  とする。(応用)



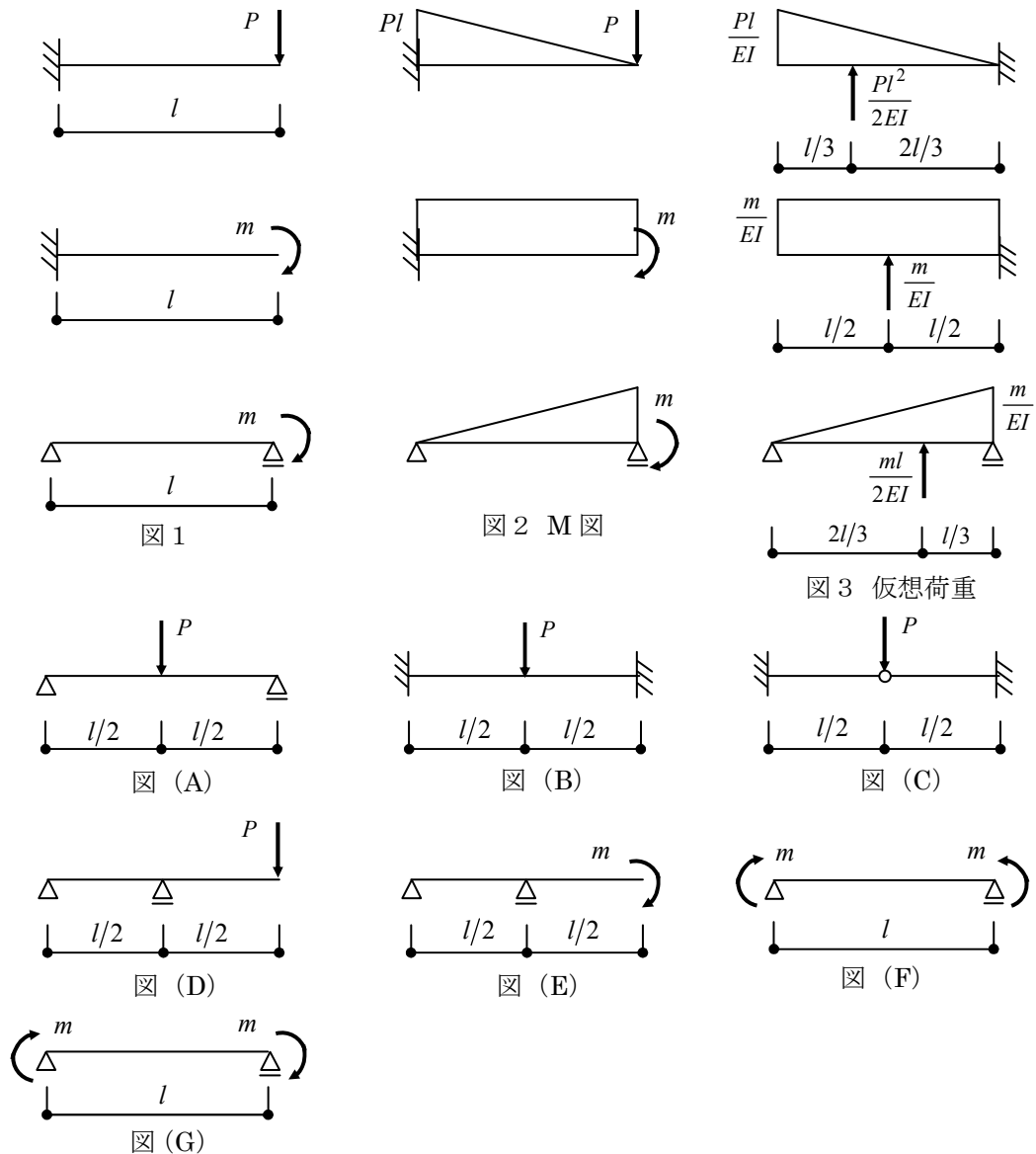
(解) 梁には図 2 のような鉛直反力と曲げモーメント図が生じる。変形が図 3 のような逆対称変形になるので、C 点の鉛直変位は当然ゼロとなる。そして A・C 間の回転や変形を求めるには、図 4 のように置き換えてもよい。図 5 の場合をモールの定理で解くと A 点の回転角は次のようになる。



$$\theta = Q_A = \left( \frac{m}{EI} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{ml}{6EI}$$

## ◎ ちょっと重要な寄り道

モールの定理は次の 3 種の梁を解くことができれば、たいいていの梁の撓みと撓み角を求めることができる。この 3 種で以下の (A) から (G) まで、工夫すると解ける。



問 14 図 1 のような集中荷重  $P$  を C 点に受ける単純梁に関する記述のうち、最も不適当なものはどれか。ただし、梁は、全長にわたって等質等断面とする。(平成 10) (難易度 D)

1. B 点に働くせん断力は、D 点に働くせん断力より大きい。
2. B 点に働く曲げモーメントは、D 点に働く曲げモーメントと同じ大きさである。
3. 曲げモーメントが最大になるのは、C 点である。
4. たわみが最大になるのは、C 点である。
5. 回転角が最大になるのは A 点である。

(解) 図 2 から反力を求めると、 $\Sigma X = H_A = 0$  から  $H_A = 0$  である。 $\Sigma Y = V_A + V_E = 0$ 、A 点の曲げモーメントの釣り合いから、 $\Sigma M_A = P \times 2l - V_E \times 6l = 0$  から、 $V_E = P/3$  であるから、 $V_A = 2P/3$  となる。 $M$  図と  $Q$  図は図 3 と図 4 のようになる。たわみが最大になるのは集中荷重の作用点から梁中央に寄ったところにある。よって 4 が間違いである。

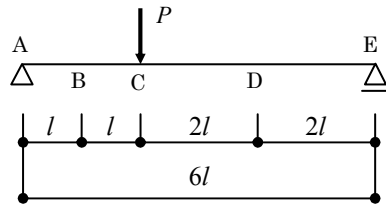


図 1

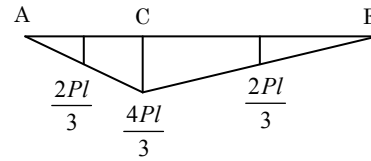


図 3 M 図

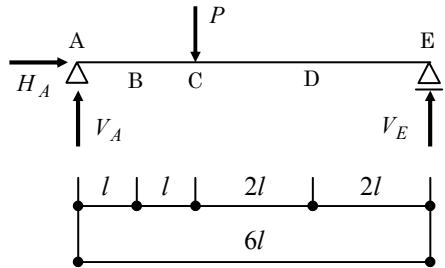


図 2

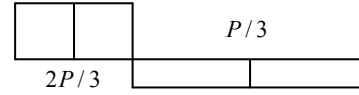


図 4 Q 図



図 5 変形図

問 15 図 1 のような荷重  $P$  を受けるラーメンにおいて、荷重  $P$  によって生じる A 点の鉛直方向（縦方向）の変位  $\delta$  を求めよ。ただし、部材 A-B は剛体とし、部材 B-C のヤング係数を  $E$ 、断面二次モーメントを  $I$  とし、部材の軸方向の変形は無視するものとする。（平成 18）（難易度 B）

（解）A 点の鉛直変位を求める場合、一般的には問 10 に示してあるように B 点の回転による変位と A-B 材の撓みによる変位を加えたものである。しかし、この問題は A-B 材が剛体としているから後者の変位は生じないことになる。よって、まず B-C 材の B 点に曲げモーメント  $M = Pl$  が生じるときの B 点の回転角を  $\theta_B$  求める。そして  $\delta = l \times \theta_B$

から解を得る。問 1 からモールの定理により

$$\theta_B = \frac{Ml}{EI} = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \delta = l \times \theta_B = \frac{Pl^3}{EI}$$

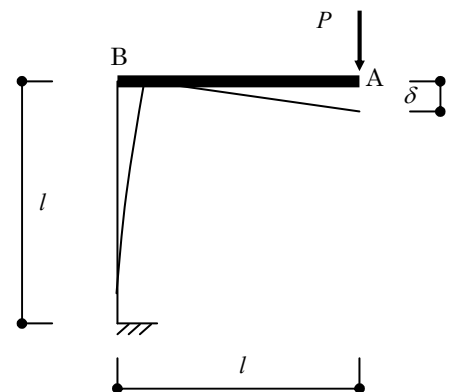


図 1

問 16 前問で梁は剛体ではなく、柱と同質同断面の場合の鉛直変位を求めよ。

（解）この場合は前問のように、荷重  $P$  による柱の回転により生じる鉛直変位と、梁の曲げによる鉛直変位がある。つまり、A 点の鉛直変位は柱の B 点の回転角による変位と図 2 のような、一端が固定の場合の A 点の鉛直変位の和である。図 1 の A 点の鉛直変位はモールの定理より

$$\delta_A = M_A = \frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

と  $\delta = \frac{Pl^3}{EI}$  を加えた値となる。

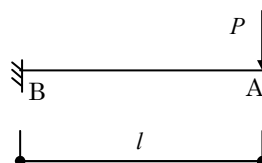


図 1

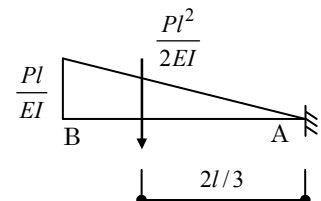


図 2