

15.5 ラーメン

問1 図1のようにB点に曲げモーメント m が作用する骨組みの曲げモーメント図とせん断力図を描け。ただし、曲げモーメントは引張側に描き、せん断力の符号は図2の向きを正とする。また部材はすべて、等質等断面とする。(平成6)(難易度A)

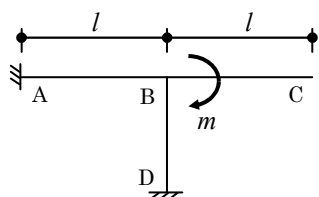


図1

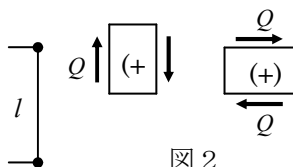


図2

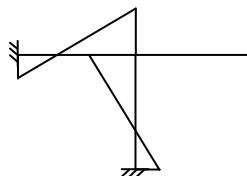


図3 M図

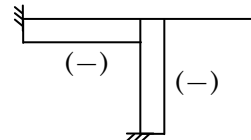


図4 Q図

(解) 図1のように、曲げモーメントが外力として作用している場合の曲げモーメント図は、図3のように外力の向きに従う。大切なので覚えておくように。また曲げモーメントとせん断力の関係は、撓角法の基本式を誘導するとき、図2の約束事で解かれていて次式となる。

$$Q_{AB} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l}, \quad Q_{BA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l}, \quad Q_{BD} = -\frac{M_{BD} + M_{DB}}{l}, \quad Q_{DB} = -\frac{M_{BD} + M_{DB}}{l}$$

右辺の曲げモーメントはすべて正(+)であるから、せん断力はすべて負(-)である。また、図2は線材に置換して単純梁で考えてみると次のようになる。A点から任意の距離 x にある点のせん断力を求める場合、 Q_x を図6のようにとる。 Q_x 点の近傍を微小片抽出すると図2のようになる。

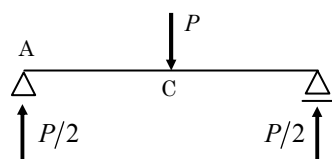


図5

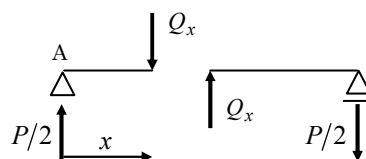


図6

問2 図1のように集中荷重を受けるラーメンにおいて、固定端Cにおける曲げモーメントの値を求めよ。ただし、部材断面はすべて同じであり、D端はピン節点とする。(昭和42)(難易度C)

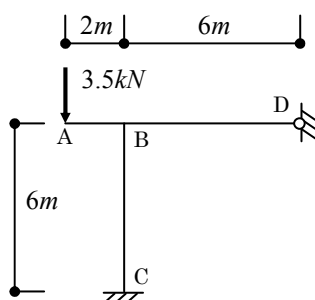


図1

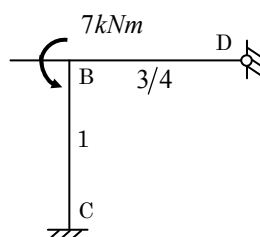


図2

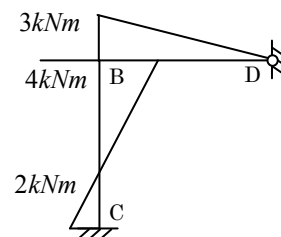


図3

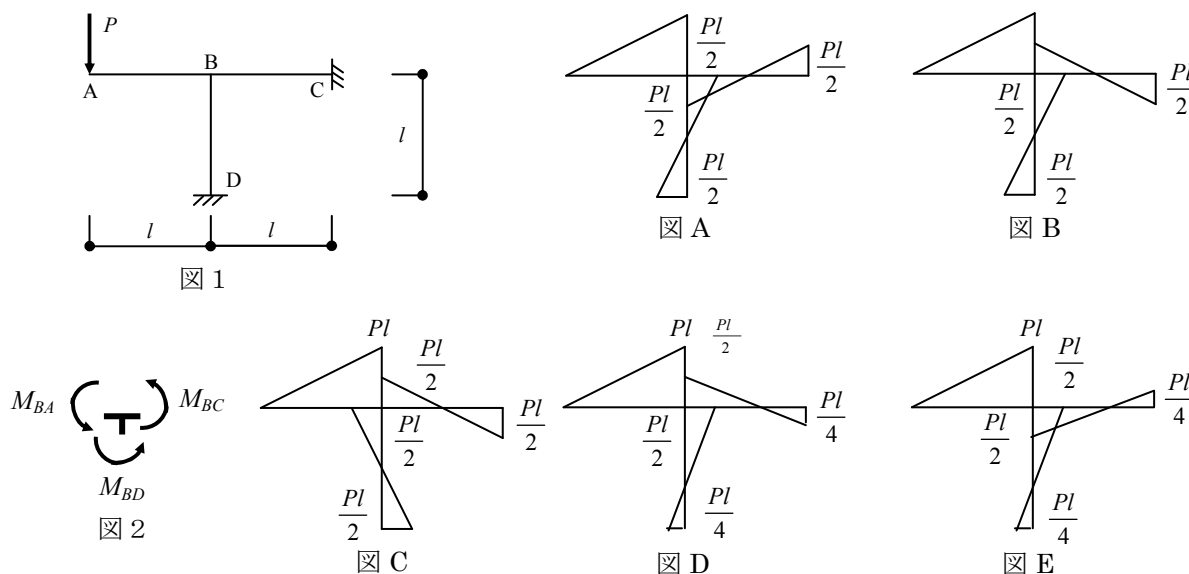
(解) 詳しくは7章固定法の項で述べてある。まず、図2のように、反時計回りの曲げモーメント $7kNm$ がB点に作用していることが分かる。次に一端ピンの場合の有効剛比 $3/4$ を覚えている。B点の曲げモーメントの分配は $M_{BC} = \frac{1}{1+3/4} \times 7kNm = 4kNm$ 、 $M_{BD} = \frac{3/4}{1+3/4} \times 7kNm = 3kNm$ となる。C点への到達

率は $1/2$ であるから、 $M_{CB} = 4kNm \times 1/2 = 2kNm$ が得られる。曲げモーメント図とセットで出題されたなら、図3のようになるが、上記曲げモーメントにマイナス(-)の記号を付ける必要がある。つまり、B点に集まる梁の曲げモーメントの符号は外力モーメントの符号と同一であると理解すること。

さて、有効剛比だが、最短で検出すると次のようになる。

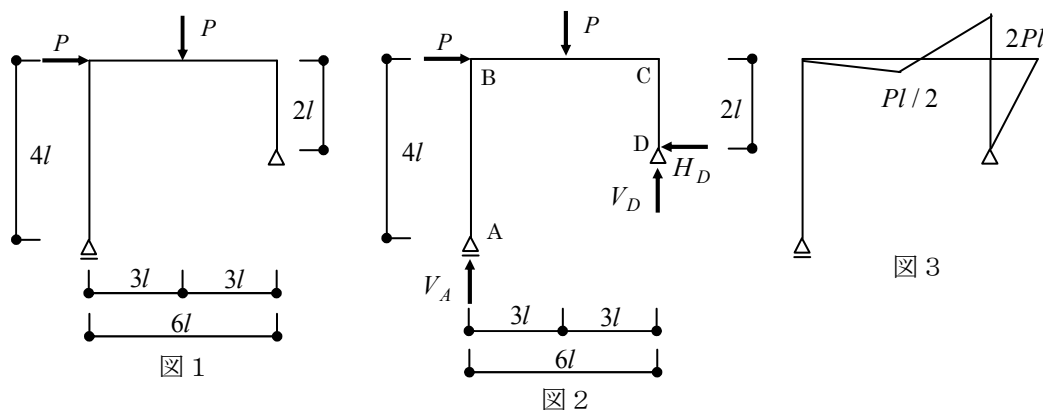
$M_{DB} = 2EK_0 k_{BD}(2\theta_D + \theta_B) = 0$ から $\theta_D = -\theta_B/2$ で、 $M_{BD} = 2EK_0 k_{BD}(2\theta_B + \theta_D)$ に代入すると、 $M_{BD} = 2EK_0(3/4)k_{BD}(2\theta_B)$ となり、有効剛比 $k_e = (3/4)k$ が得られる。あるいは、一端ピンの撓角法の基本式 $M_{BD} = 2EK_0 k_{BD}(1.5\theta_B)$ を知っていれば、 θ_B の係数を 2 にして、 $M_{BD} = 2EK_0(3/4)k_{BD}(2\theta_B)$ となる。最後の手段は、 $M_{BD} = 2 \cdot \dots \cdot k_{BD}(1.5\theta_B \cdot \dots)$ との記憶があれば、 $(3/4)k_{BD}(2\theta_B \cdot \dots)$ とすればよい。

問3 図1のような荷重 P を受けるラーメンの曲げモーメント図で正しいのはどれか。曲げモーメントは部材の引張側に働くものとする。すべての部材は等質等断面とする。(平成19)(難易度C)



(解) 図Aから図Eまで、梁 A-B の材端モーメントは $M_{BA} = +Pl$ となる。ちょっと難しいが、この材端モーメントは、節点 B には逆方向の曲げモーメント（反時計回り）が作用していることになる。その釣り合いは、図2から $\Sigma M_B = -M_{BA} - M_{BC} - M_{BD} = 0$ であり、 $M_{BC} = M_{BD}$ は明らかであるゆえ、 $M_{BC} = M_{BD} = Pl/2$ となる。また C 点と D 点には、その半分の値が到達モーメントとして得られる。よって、 $M_{CB} = M_{DB} = Pl/4$ となる。図2の詳細は6章撓み角法の図3-33を参照。(問2参照)

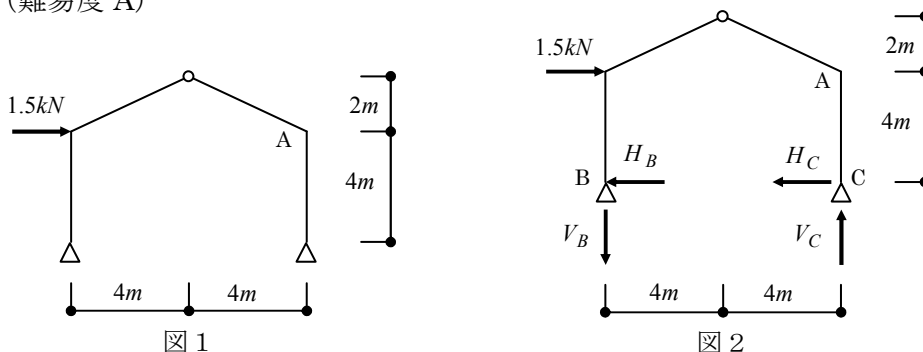
問4 図1のような集中荷重 P を受けるラーメンの曲げモーメント図を描け。ただし、曲げモーメント図は材の引張り側に描くものとする。(平成9)(難易度C)



(解) まず、反力を求めると、 $\Sigma X = P - H_D = 0$ から、 $H_D = P$ となる。

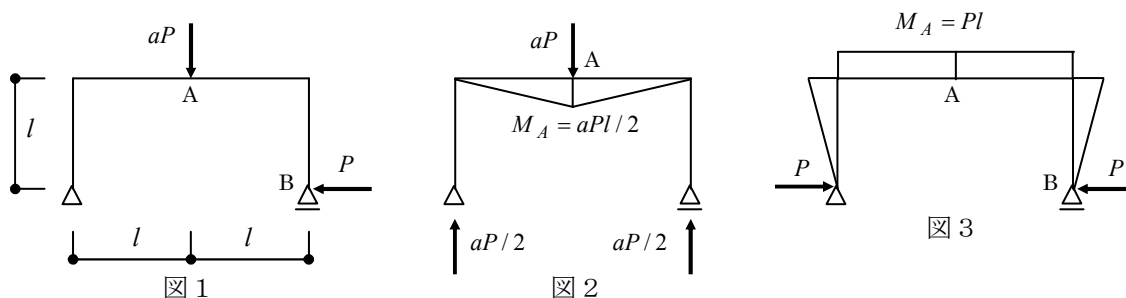
$\Sigma Y = V_A + V_D - P = 0$ 、 $\Sigma M_D = 6lV_A + 2lP - 3lP = 0$ 、から、 $V_A = P/6$ 、 $V_D = 5P/6$ であるから、曲げモーメント図は図3のようになる。

問5 図1のような水平荷重 $1.5t$ を受ける骨組において、A点における曲げモーメントの絶対値を求めよ。(平成6)(難易度A)



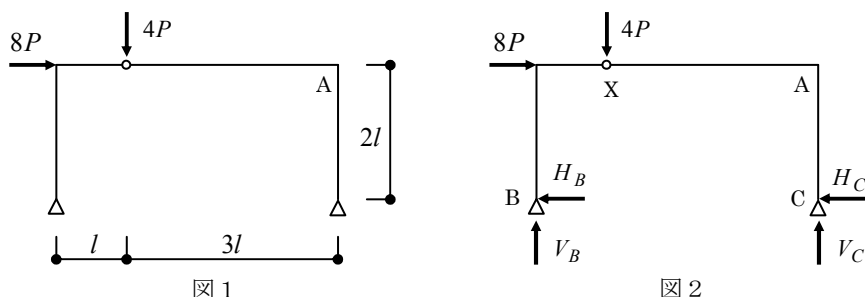
(解) A点の曲げモーメントを求めるには、C点の水平反力 H_C を求めればよい。まず、骨組全体を自由体として、曲げモーメントの釣り合い式を立てると、 $\Sigma M_B = 1.5kN \times 4m - V_C \times 8m = 0$ 、 $V_C = 3/4kN$ となる。次に骨組の右半分から、頂点の曲げモーメントが零になることを利用する。 $M_X = H_C \times 6m - V_C \times 4m = 6H_Cm - 3kNm = 0$ から、 $H_C = 1/2kN$ となる。よって、A点の曲げモーメントは、 $M_A = H_C \times 4m = 2kNm$ で、 $\Sigma X = 1.5kN - H_B - H_C = 0$ から、 $H_B = 1kN$ となる。よって $\Sigma Y = -V_B + V_C = 0$ から、 $V_B = 3/4kN$ となる。

問6 図1のような骨組において、A点に aP の鉛直荷重、B点に P の水平荷重が同時に作用したとき、Aにおける曲げモーメントが零になるための a の値を求めよ。(平成4)(難易度B)



(解) 図2は鉛直荷重が作用したときの、曲げモーメントで、図3はB点に水平力 P が作用したときのそれである。A点の曲げモーメントが0であるから、 $Pl = aPl/2$ となるから、 $a = 2$ となる。

問7 図1のような荷重を受けるラーメンにおいて、A点における曲げモーメントを求めよ。(平成10)(難易度C)



(解) A 点の曲げモーメントを求めるには、C 点の水平反力 H_C を求めればよい。まず、骨組全体を自由体として、曲げモーメントの釣り合い式を立てると、 $\Sigma M_B = 8P \times 2l + 4P \times l - V_C \times 4l = 0$ 、 $V_C = 5P$ となる。次に骨組の右半分から、X 点の曲げモーメントが零になることを利用する。

$M_X = H_C \times 2l - V_C \times 3l = 2H_C l - 15Pl = 0$ から、 $H_C = 7.5P$ となる。よって、A 点の曲げモーメントは、 $M_A = H_C \times 2l = 15Pl$ である。ちなみに、 $\Sigma X = 8P - H_B - H_C = 0$ から、 $H_B = 0.5P$ であり、 $\Sigma Y = V_B + V_C - 4P = 0$ から、 $V_B = -P$ となる。

問8 図1のような荷重を受けるラーメンにおいて、A 点及び B 点に生じる曲げモーメントの大きさを求めよ。(平成 14) (難易度 B)

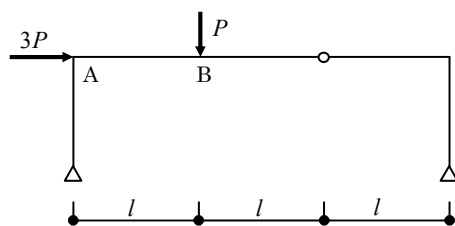


図 1

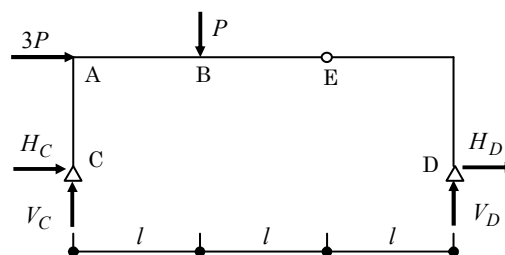


図 2

(解) この問題は 3 ピン構造といわれるラーメンである。これを解くには図 2 のように C 点と D 点の反力を仮定して、図 3、図 4 で E 点に関する曲げモーメントの釣り合いがゼロになることを利用することにある。

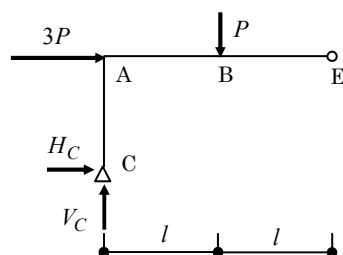


図 3

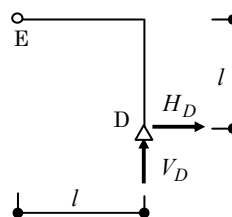


図 4

図 2 で、X 方向の釣り合いから、 $\Sigma X = 3P + H_C + H_D = 0$ (1)

図 2 で、Y 方向の釣り合いから、 $\Sigma Y = -P + V_C + V_D = 0$ (2)

図 2 で、C 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、 $\Sigma M_C = 3P \times l + P \times l - V_D \times 3l = 0$ (3)

図 3 か、図 4 で E 点に関する曲げモーメントの釣り合いを求めればよい。この場合、図 4 の方が計算し易いから、図 4 で $\Sigma M_E = -V_D \times l - H_D \times l = 0$ (4)

ゆえに、(3)式から、 $V_D = 4P/3$ 、(4)式から、 $H_D = -4P/3$ 、(1)式から、 $H_C = -5P/3$ 、(2)式から $V_C = -P/3$ となる。よって、A 点の曲げモーメントは、 $M_A = H_C \times l = -5Pl/3$ である。

B 点の曲げモーメントは、 $M_B = -H_C \times l + V_C \times l = -(-5P/3) \times l + (-P/3) \times l = 4Pl/3$

尚、この問題は曲げモーメントに正負を問うてないから、 $M_A = 5Pl/3$ としてよい。

問9 図1のようなラーメンに荷重 P 、 F が作用し、図1のような曲げモーメント図が描けた。このときの P 、 F を求めよ。ただし、曲げモーメントは材の引張側に描くものとし P 、 F の符号は、矢印の方向を正とする。(平成7)(難易度C)

(解) 固定端による曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M = +P \times 3m - F \times 3m = 0 \text{ から、 } F = P$$

左柱の柱頭の曲げモーメントは $M = -P \times 3m + F \times 6m = 3tm$

となり $F = P$ とあわせて $P = 1 \cdot t$ 、 $F = 1 \cdot t$ である。

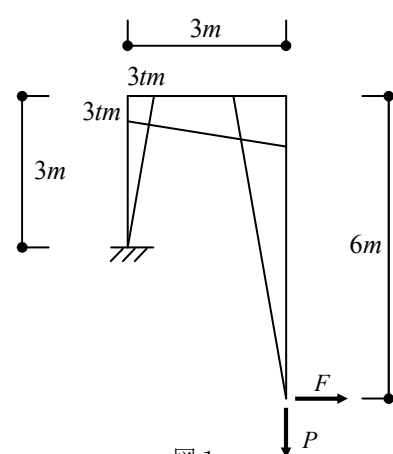


図1

問10 図1のような荷重を受けるラーメンにおいて、A点に曲げモーメントが生じない場合にB点に作用する曲げモーメントの値を求めよ。ただし、A点は固定端、D点は自由端とし M は図中に示す矢印の向きを「+」とする。(平成13)(難易度C)

(解) A点に作用する曲げモーメントの総和は、

$$\Sigma M_A = M - 100kN \times 4m - 100kN \times 6m = 0 \text{ である。これを解くと}$$

$M = 1000kN \cdot m$ となる。

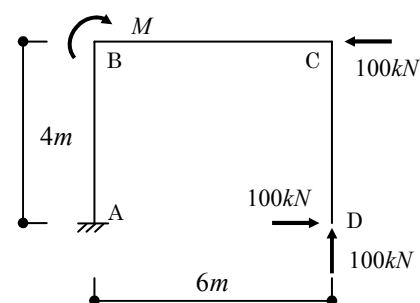


図1

問11 図1のようなラーメンに水平力 P が作用する場合、柱A、B、Cに生じるせん断力をそれぞれ Q_A 、 Q_B 、 Q_C としたとき、それらの値を求めよ。ただし、それぞれの柱は等質等断面の弾性部材とし、梁は剛体とする。(平成16)(難易度A)

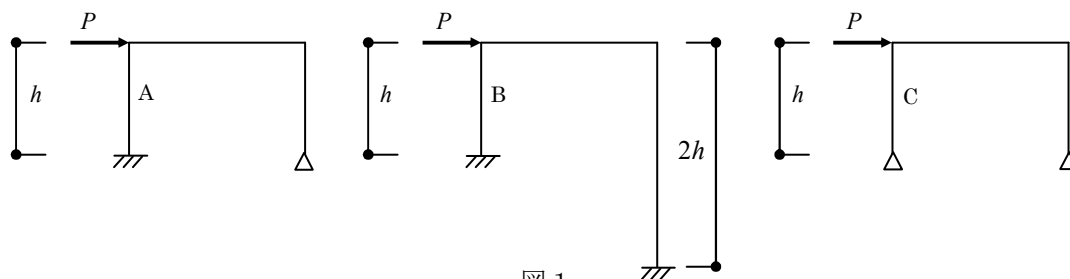


図1

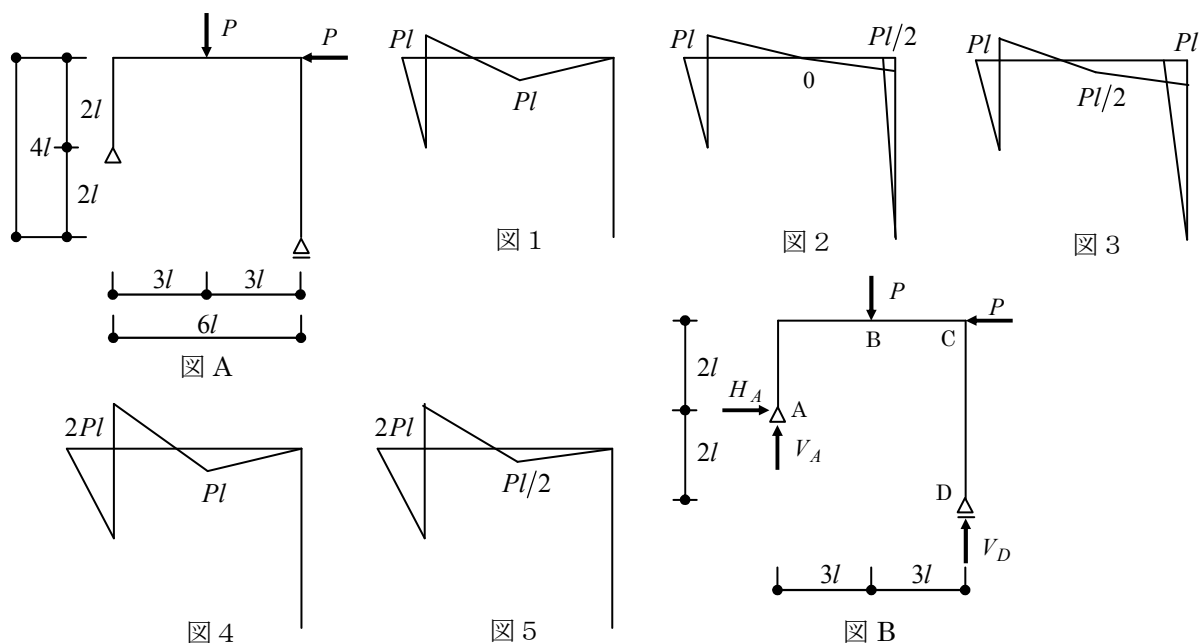
(解) 各柱が負担するせん断力は柱の剛度に比例する。一端ピンの柱の場合の有効剛比を考えると、その値は $k_e = 3k/4$ である。柱の断面2次モーメントを I とすれば

$$\text{柱Aの剛性は } K_A = \frac{I}{h} \text{ で他の柱は } K'_A = \frac{3}{4} \cdot \frac{I}{h}, \text{ 柱Bの剛性は } K_B = \frac{I}{h} \text{ で他の柱は } K'_B = \frac{I}{2h}$$

$$\text{柱Cの剛性は } K_C = \frac{3}{4} \cdot \frac{I}{h} \text{ で他の柱は } K'_C = \frac{3}{4} \cdot \frac{I}{h} \text{ であり、 } Q_A = \frac{K_A}{K_A + K'_A} = \frac{1}{1 + 3/4} \times P = \frac{4}{7} \times P、$$

$$Q_B = \frac{K_B}{K_B + K'_B} = \frac{1}{1 + 1/2} \times P = \frac{2}{3} \times P, \quad Q_C = \frac{K_C}{K_C + K'_C} = \frac{3/4}{3/4 + 3/4} \times P = \frac{P}{2} \text{ より、 } Q_B > Q_A > Q_C。$$

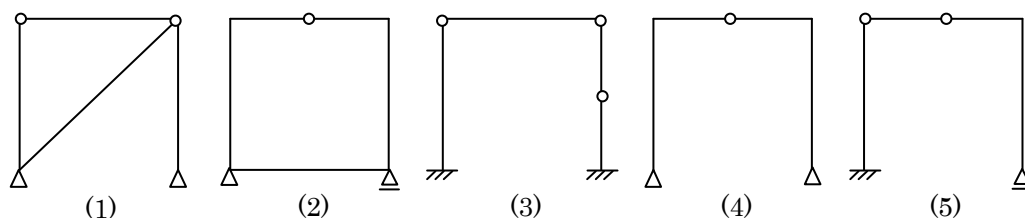
問 12 図 A のような荷重 P を受けるラーメンの曲げモーメント図として正しいのは、次のうちどれか。
ただし、曲げモーメント図は、材の引張側に描くものとする。(平成 17) (難易度 C)



(解) 図 B から反力を求める。

$\Sigma X = H_A - P = 0$ 、 $\Sigma Y = V_A + V_D - P = 0$ 、 $\Sigma M_A = P \times 3l - P \times 2l - V_D \times 6l = 0$ から、 $H_A = P$ 、 $V_A = 5P/6$ 、 $V_D = P/6$ となる。B 点は $V_D = P/6$ により下側に $M = P/6 \times 3l = Pl/2$ 。左側柱の柱頭は $H_A = P$ により外側に $M = P \times 2l = 2Pl$ となる。よって図 5 が正解である。

問 13 次の架構のうち、不安定構造はどれか。(平成 15) (難易度 A)



(解) 2 章の(2-1)式から安定・不安定の判別式は、 $M = (n + s + r) - 2k$ で、 M が負の値をとれば、構造物は不安定となる。

(1)の場合： $M = (4 + 4 + 0) - 2 \times 4 = 0$ で静定構造物。

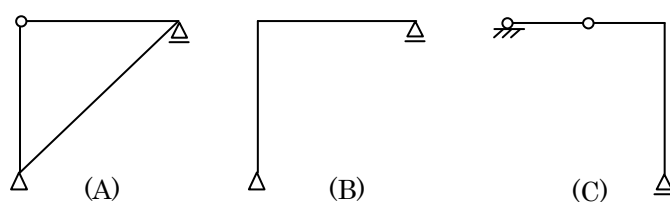
(2)の場合： $M = (3 + 5 + 2) - 2 \times 5 = 0$ で静定構造物。

(3)の場合： $M = (6 + 4 + 0) - 2 \times 5 = 0$ で静定構造物。

(4)の場合： $M = (4 + 4 + 2) - 2 \times 5 = 0$ で静定構造物。

(5)の場合： $M = (4 + 4 + 1) - 2 \times 5 = -1$ で不安定構造物。となる。

しかし、判別式を覚え、適用するには少々難がある。簡単に考えてみよう。



- (1) : 右柱はピンとピンで結ばれているから、水平移動に拘束力が無い。ゆえに、図(A)、(B)でローラーに置換し、しかも三角形トラスあるいはラーメンの節点が剛接合の場合と解釈できるので静定構造物。
- (2) : 右柱脚のローラーは水平梁で拘束されているからピンとみなせる。ゆえに 3 ピン構造であり静定構造物である。
- (3) : 両端が固定された構造体に 3 ピン構造物が載っているから 3 ピン構造となる。
- (4) : 正に 3 ピン構造物である。
- (5) : 右柱がピンであれば、(3)と同様に静定構造物であるが、ローラーであるから図(C)のように無限の変形を成す構造体であり不安定構造物である。

問 14 図 1 のような荷重を受けるラーメンにおいて、A・B 間にせん断力の生じない X 点がある。A 点と X 点との距離を求めよ。

(平成 18) (難易度 C)

(解) A・B 材のせん断力に影響する力は C 点の鉛直反力 V_C と等分布荷重である。D 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、 $\Sigma M_D = 8m \times V_C - 8kN \times (2m + 4m) = 0$ となり $V_C = 6kN$ が得られる。A・B 材でせん断力がゼロになるのは反力 V_C と等分布荷重 $(2kN/m \times X)$ が等しいときである。よって、 $6kN = 2kN/m \times X$ から $X = 3m$ となる。

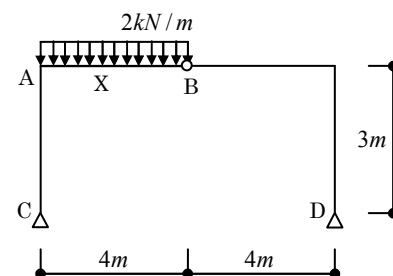


図 1

問 15 図 1 のような荷重を受ける骨組みにおいて、A 点における曲げモーメントを求めよ。

(平成 19) (難易度 D)

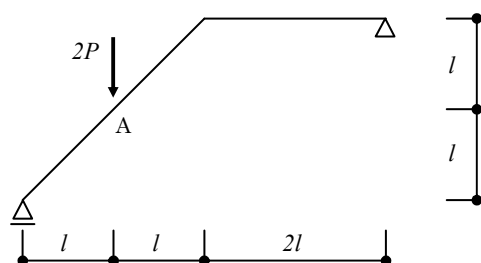


図 1

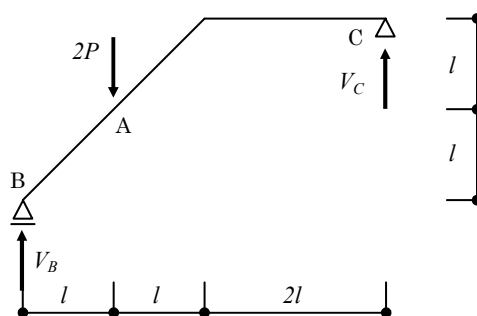


図 2

(解) 図 2 から C 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、 $\Sigma M_C = V_B \times 4l - 2P \times 3l = 0$
 $V_B = 3P/2$ で、A 点の曲げモーメントは、 $M_A = 3P/2 \times l = 3Pl/2$