

15. 6 地震荷重

問1 図1のような柱A、B、Cと剛体の梁からなる骨組みに水平力 P が作用したとき、それぞれの柱に働く水平力の分担比 $Q_A : Q_B : Q_C$ を求めよ。(昭和60)(難易度A)

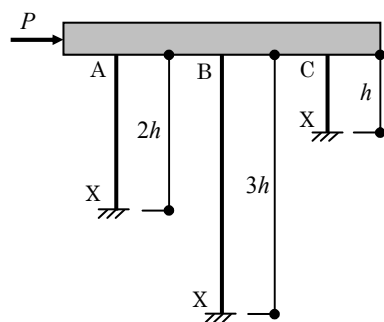


図1

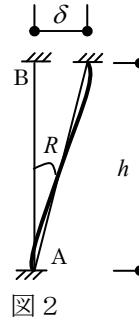


図2

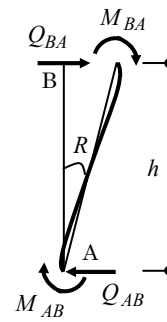


図3

(解) 図2は、撓角法の基本式から両端を固定し、部材角 R だけ生じせしめた部材で、図3には両端に働くせん断力と曲げモーメントが示されている。このときA点の曲げモーメントの釣り合いを求めると次式のようなになる。

$$\Sigma M_A = M_{AB} + M_{BA} + Q_{BA} \times h = 0 \text{ から } Q_{BA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{h} \quad (1)$$

撓角法の基本式は $M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) + C_{AB}$ で両端固定(図2)の場合は $\theta_A = 0$ 、 $\theta_B = 0$ 、 $C_{AB} = 0$ 、 $M_{AB} = -6EKR$ 、 $M_{BA} = -6EKR$ 、 $R = \delta/h$ 、 $K = I/h$ を(1)式に代入すると、次式となる。

$$\delta = \frac{Q_{BA}h^2}{12EK} = \frac{Q_{BA}h^3}{12EI} \quad (2)$$

ここで、 Q : 柱頭のせん断力、 h : 柱の長さ、 E : 柱のヤング係数、 K : 柱の剛度 $= I/h$

I : 柱の断面2次モーメント

となる。(2)式は一般式で、図1に適用するには $h_{AX} = 2h$ 、 $h_{BX} = 3h$ 、 $h_{CX} = h$ となる。図1の柱は剛体で結合されているから、 $\delta_A = \delta_B = \delta_C = \delta$ で $I_A = I_B = I_C = I$ 、 $E_A = E_B = E_C = E$ だから、図1のA、B、C点の水平変位 δ は次式のようなになる。

$$\delta_A = \frac{Q_A h_{AX}^2}{12EK} = \frac{Q_A (2h)^2}{12E \frac{I}{2h}} = 8Q_A \left(\frac{h^3}{12EI} \right), \quad \delta_B = \frac{Q_B h_{BX}^2}{12EK} = \frac{Q_B (3h)^2}{12E \frac{I}{3h}} = 27Q_B \left(\frac{h^3}{12EI} \right)$$

$$\delta_C = \frac{Q_C h_{CX}^2}{12EK} = \frac{Q_C h^2}{12E \frac{I}{h}} = Q_C \left(\frac{h^3}{12EI} \right), \text{ よって } Q_A : Q_B : Q_C = \frac{1}{8} : \frac{1}{27} : 1 \text{ である。}$$

もし、具体的な Q_A 、 Q_B 、 Q_C の値を得たいなら、 $\delta_A = \delta_B = \delta_C = \delta$ から2個の式が得られ、 $P = Q_A + Q_B + Q_C$ と合わせて解けばよい。

問2 図のような水平力が作用する3階建の建築物、図1、図2、図3において、それぞれの「3階の床レベル」の「1階床レベル」に対する水平変位を δ_A 、 δ_B 、 δ_C とした場合、大きい順に並べよ。ただし、各建築物に作用する水平力及び各階の水平剛性は図に示す。また梁は剛体で柱の伸縮はないものとする。(平成13)(難易度A)

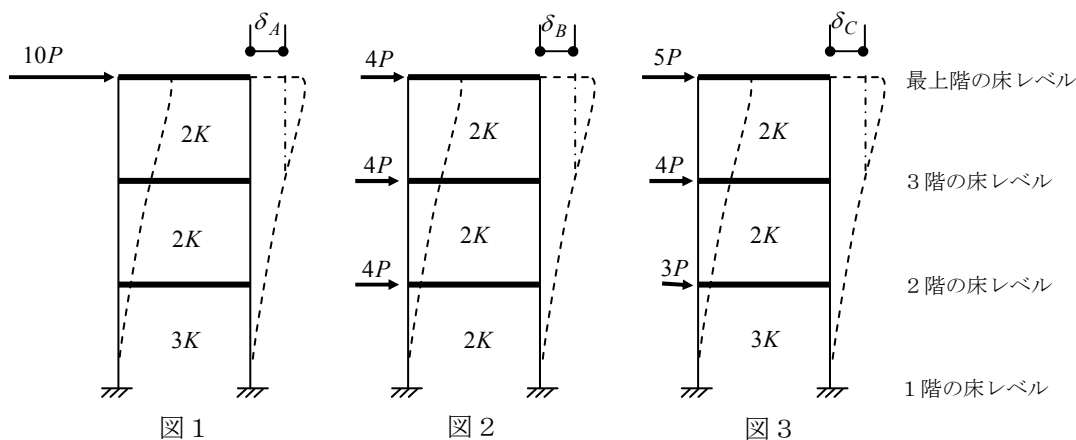


図1

図2

図3

(解) (問1参照) 各層の層間変位は、各層の層せん断力をその層の剛性で除したものである。題意より

3階の床レベルの水平変位は、1層、2層の層間変位の和であるから $\delta_A = \frac{10P}{3K} + \frac{10P}{2K} = \frac{25P}{3K} = \frac{50P}{6K}$ 、

$\delta_B = \frac{4P \times 3}{2K} + \frac{4P \times 2}{2K} = \frac{10P}{K} = \frac{60P}{6K}$ 、 $\delta_C = \frac{5P + 4P + 3P}{3K} + \frac{5P + 4P}{2K} = \frac{51P}{6K}$ となる。よって $\delta_B > \delta_C > \delta_A$ 。

問3 図1のような荷重を受ける静定ラーメンの柱頭の水平変位を求めよ。ただし、梁の曲げ剛性を EI とし、柱は剛体とする。長さ l 、曲げ剛性 EI の単純梁が材端にモーメント荷重 M を受けるときに、材端に生じる撓み角は $Ml/3EI$ である。(平成6)(難易度A)

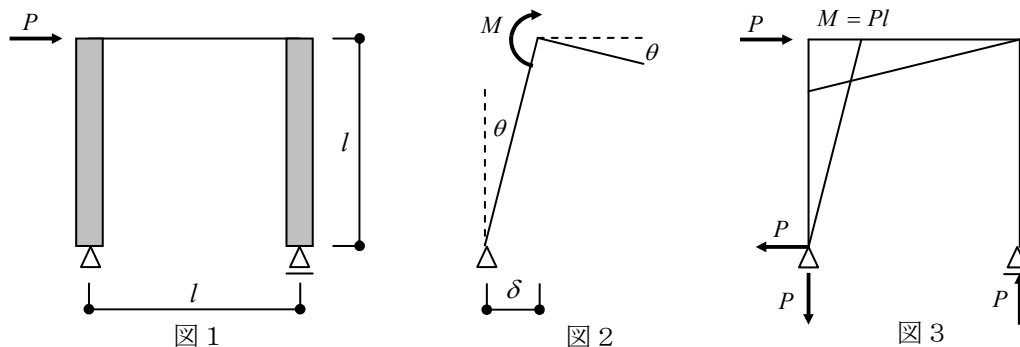


図1

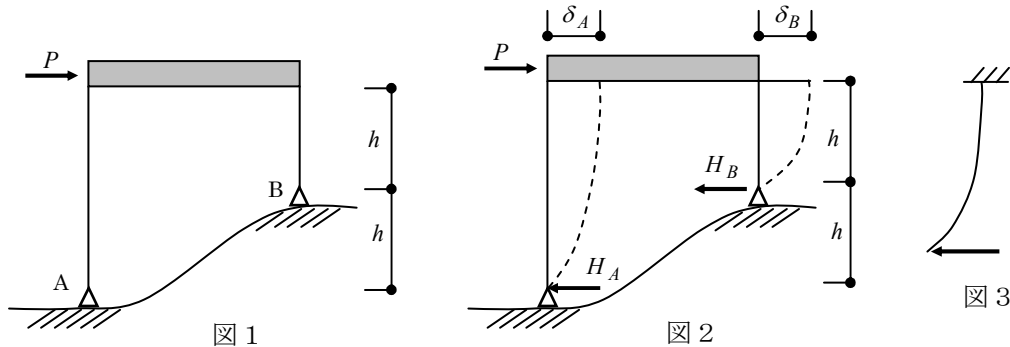
図2

図3

(解) 柱が剛体であるから柱頭の水平変位は、図2から、 $\delta = l \times \theta = l \times \frac{M \cdot l}{3EI} = \frac{Pl^3}{3EI}$

図3から左の柱頭の曲げモーメントは、 $M = Pl$

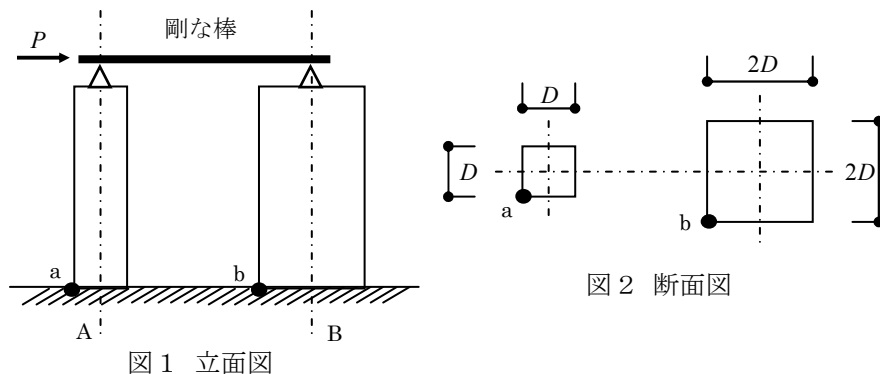
問4 図1のような水平力 P が作用する骨組みにおいて、柱A、Bに生じるせん断力を Q_A 、 Q_B としたとき、それらの比 $Q_A : Q_B$ を求めよ。ただし、両柱とも等質等断面で、はりは剛体とし、柱及び梁の応力は弾性範囲内にあるものとする。(昭和63)(難易度A)



(解) 梁は剛体であるから、柱頭に回転角が生じない。図2の柱A、Bの変形は点線で示してあるが、これは、図3の片持ち梁に水平力が作用したときの変形の性状と全く同一であることが分かる。

よって、 $\delta_A = \frac{H_A(2h)^3}{3EI}$ 、 $\delta_B = \frac{H_B(h)^3}{3EI}$ となり、柱は剛体で結合されているから $\delta_A = \delta_B$ となり、 $H_A = H_B/8$ が得られ、 $Q_A : Q_B = 1:8$ となる。

問5 図1のような柱脚を固定した2本の柱A、Bがあり、それらの柱頭の図心は、ピン接合した剛体で連結している。剛な棒の端部に水平荷重 P が作用する場合、柱脚のa、b点における曲げ応力度 σ_a 、 σ_b を求めよ。ただし、柱A、Bはヤング係数が等しく、応力は弾性範囲内にあるものとし、剛な棒の厚さとピンの高さは無視するものとする。(平成12)(難易度B)



(解) 柱の高さを l とする。外力 P を柱Aが P_1 、柱Bが P_2 負担すると、 $P_1 + P_2 = P$ となる。

柱Aの先端の水平変位は $\delta_A = \frac{P_1 \times l^3}{3EI_A}$ 、柱Bの先端の水平変位は $\delta_B = \frac{P_2 \times l^3}{3EI_B}$ で、 $\delta_A = \delta_B$ であるから、

$P_2 = \frac{I_B}{I_A} P_1$ 、 $I_A = \frac{D^4}{12}$ 、 $I_B = \frac{2D \times (2D)^3}{12} = \frac{4D^4}{3}$ から $P_2 = 16P_1$ が得られる。よって、 $P_1 = P/17$ 、

$P_2 = 16P/17$ となる。 $Z_A = D^3/6$ 、 $Z_B = 4D^3/3$

$\sigma_A = \frac{M}{Z_A} = \frac{P_1 \times l}{Z_A} = \frac{P \times l}{17} \times \frac{6}{D^3} = \frac{6P \times l}{17D^3}$ 、 $\sigma_B = \frac{M}{Z_B} = \frac{P_2 \times l}{Z_B} = \frac{16P \times l}{17} \times \frac{3}{4D^3} = \frac{12P \times l}{17D^3}$

問6 問5の、図1のような柱脚を固定した2本の柱A、Bがあり、それらの柱頭の図心は、ピン接合した剛な棒で連結している。剛な棒の端部に水平荷重 P が作用する場合、柱脚のa、b点における曲げ応力度 σ_a 、 σ_b の比を求めよ。ただし、柱A、Bはヤング係数が等しく、応力は弾性範囲内にあるものとし、剛な棒の厚さとピンの高さは無視するものとする。(類似)(難易度B)

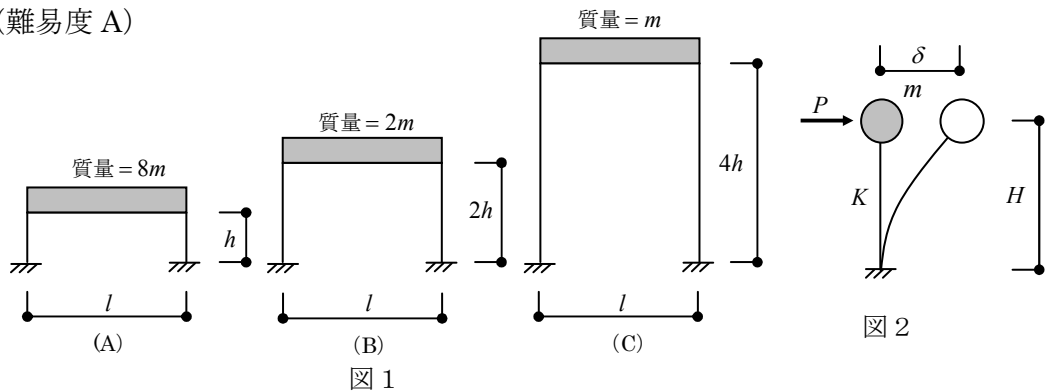
(解) 柱の高さを l とする。外力 P を柱Aが P_A 、柱Bが P_B 負担すると、柱Aの先端の水平変位は $\delta_A = \frac{P_A \times l^3}{3EI_A}$ 、柱の先端の水平変位は $\delta_B = \frac{P_B \times l^3}{3EI_B}$ となる。 $\delta_A = \delta_B$ であるから、 $\frac{P_B}{P_A} = \frac{I_B}{I_A}$ 、となり水平変位は断面2次モーメントに比例して分けられる。

よって、 $\sigma_a = \frac{P_A \times l}{Z_A}$ 、 $\sigma_b = \frac{P_B \times l}{Z_B}$ で、 $\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = \frac{P_B \times l}{Z_B} \times \frac{Z_A}{P_A \times l} = \frac{I_B}{I_A} \frac{Z_A}{Z_B}$ となる。

$Z_A = \frac{I_A}{D/2} = \frac{2I_A}{D}$ 、 $Z_B = \frac{I_B}{D} = \frac{I_B}{D}$ であるから、 $\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = \frac{I_B}{I_A} \frac{Z_A}{Z_B} = \frac{2D}{D} = 2$ となる。

問7 図1のようなラーメンA、B、Cの固有周期をそれぞれ T_A 、 T_B 、 T_C としたとき、それらの大小関係を求めよ。ただし、すべての梁は剛体とし、また、すべての柱は等質等断面とする。

(平成2)(難易度A)



(解) 建物の振動固有周期は $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$ で表される。 m ：質量で、 K ：バネ定数で単位の変位を生じさせるに必要な力で、その単位は (t/m) である。図2から、片持梁に外力 P が δ の変位を与えた場合、 $\delta = \frac{PH^3}{3EI}$ となり、 $\delta = 1$ であるときの P が K と等しくなる。よって $\frac{PH^3}{3EI} = 1$ 、 $P = \frac{3EI}{H^3} = K$ となる。

この式を前式の固有周期に代入すれば、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{mH^3}{3EI}}$ である。この式から、各ラーメンの固有周期が長いかわかりを決めるには mH^3 を比較すればよいことになる。

$$(A) : mH^3 = (8m) \times h^3 = 8mh^3, (B) : mH^3 = (2m) \times (2h)^3 = 16mh^3$$

$$(C) : mH^3 = (m) \times (4h)^3 = 64mh^3 \text{ となる。よって、} T_C > T_B > T_A$$

問 8 滑らない面の上に置いてある図 1 のような剛体に水平力 F が作用する場合、剛体が転倒し始めるときの水平力 F の重力 W に対する比 $\alpha(=F/W)$ の条件を求めよ。ただし、剛体の質量分布は一様で水平力は剛体の重心に作用し続けるものとする。(平成 7) (難易度 B)

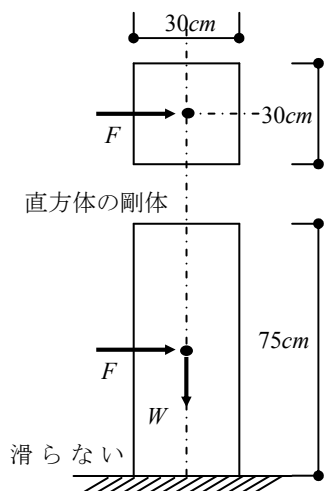


図 1

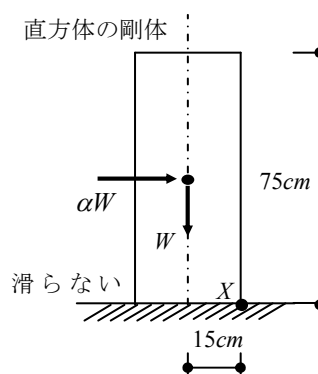


図 2

(解) 図 2 から、水平力 $\alpha \cdot W$ と下向きの剛体の質量 W について、 X 点を支点として、どの方向に回転させようとしているかを考えればよい。水平力は右回りに、 $M_H = \alpha \cdot W \times 37.5\text{cm}$ 、剛体は左回りに、 $M_V = W \times 15\text{cm}$ であるから、回転をし始めるには、 $\alpha \cdot W \times 37.5 > W \times 15$ であればよい。よって、 $\alpha > 15/37.5 = 0.4$ である。

問 9 図 1 は、ある二層構造物の各階に水平荷重が作用したとき、ラーメンの応力のうち、柱の曲げモーメントを示したものである。このとき図中の①～⑤の値を求めよ。(平成 12) (難易度 B)

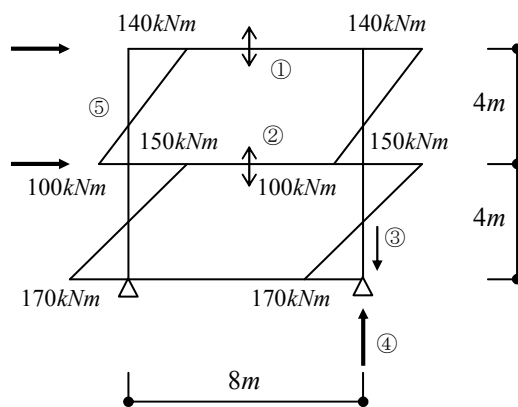


図 1

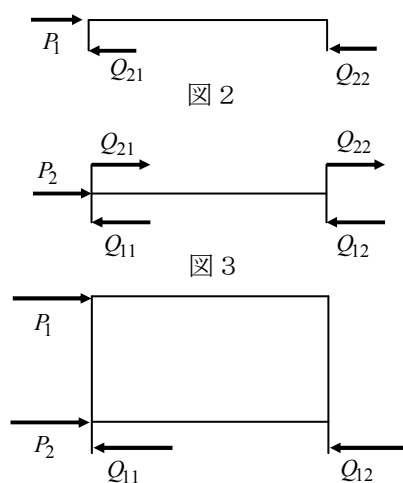


図 4

(解)

- ① 梁のせん断力①は $Q_1 = (140\text{kNm} + 140\text{kNm}) / 8\text{m} = 35\text{kN}$
- ② 梁のせん断力②は $Q_2 = (150\text{kNm} + 100\text{kNm} + 150\text{kNm} + 100\text{kNm}) / 8\text{m} = 62.5\text{kN}$
- ③ 柱の軸方向力③は $N_3 = Q_1 + Q_2 = 35 + 62.5 = 97.5\text{kN}$
- ④ 支点の反力④は $V_4 = N_3 + (170\text{kNm} + 170\text{kNm}) / 8\text{m} = 97.5\text{kN} + 42.5\text{kN} = 140\text{kN}$ (第 2 項は地中梁)
- ⑤ 2 階左柱のせん断力は $Q_{21} = -(-140\text{kNm} - 140\text{kNm}) / 4\text{m} = 60\text{kN}$
 2 階右柱のせん断力は $Q_{22} = -(-140\text{kNm} - 100\text{kNm}) / 4\text{m} = 60\text{kN}$
 1 階左柱のせん断力は $Q_{11} = -(-150\text{kNm} - 170\text{kNm}) / 4\text{m} = 80\text{kN}$

1 階右柱のせん断力は $Q_{12} = -(-150kNm - 170kNm) / 4m = 80kN$

P_1 は、図 2 の X 方向の釣り合いから、 $\Sigma X = P_1 - Q_{21} - Q_{22} = P_1 - 60kN - 60kN = 0$ より、 $P_1 = 120kN$

P_2 は、図 3 の X 方向の釣り合いから、 $\Sigma X = P_2 - Q_{11} - Q_{12} + Q_{21} + Q_{22} = 0$ より

$$P_2 = Q_{11} + Q_{12} - Q_{21} - Q_{22} = 80kN + 80kN - 60kN - 60kN = 40kN$$

別解は、図 4 の X 方向の釣り合いから、 $\Sigma X = P_1 + P_2 - Q_{11} - Q_{12} = 0$ より

$$P_2 = Q_{11} + Q_{12} - P_1 = 80kN + 80kN - 120kN = 40kN$$

問 10 図 1 のような水平力をうけるラーメンの各部に示す曲げ応力の大きさの順を求めよ。ただし、柱脚固定、反曲点高比 0.5 とし、剛比 k は図 1 に示す通りである (昭和 53)

(難易度 B)

(解) 骨組みの柱が、水平力を分担する場合、隅柱は中柱の 80% 位である。2 階の層せん断力は $10kN$ である。よって

(ハ) は (ホ) の 80% 位である。また、(二) は (ホ) の半分であるから、2 階の大きさの順位は (ホ) > (ハ) > (二) となる。1 階の層せん断力は $20kN$ となる。(ロ) の曲げモーメントは (ホ) の二倍である。また、中柱、隅柱の柱頭、柱脚の何れも反曲点高比が 0.5 と指定されている。よって、(イ) は (ロ) の 80% であるから (イ) より (ロ) の方が大きい。

(ロ) > (イ) > (ホ) > (ハ) > (二) となる。

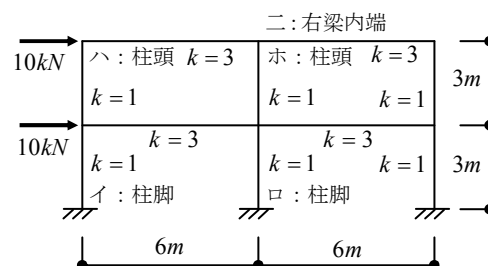


図 1

問 11 図 1 は、ある二層構造物の各階に水平荷重が作用したときのラーメンの応力のうち、柱の曲げモーメントを示したものである。このとき、図中の①から⑤それぞれの値として誤っているものは次のうちどれか。(平成 16) (難易度 B)

1. 屋上の床レベルに作用する水平荷重①は、

180kN

2. 2 階の床レベルに作用する水平荷重②は、

235kN

3. 梁のせん断力③は、76kN

4. 柱の軸方向力④は、116kN

5. 支点の反力⑤は、166kN

(解) 梁の曲げモーメントとせん断力、柱のせん断力は

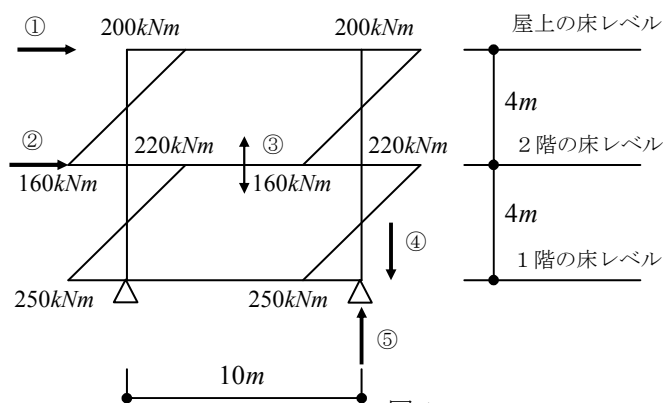


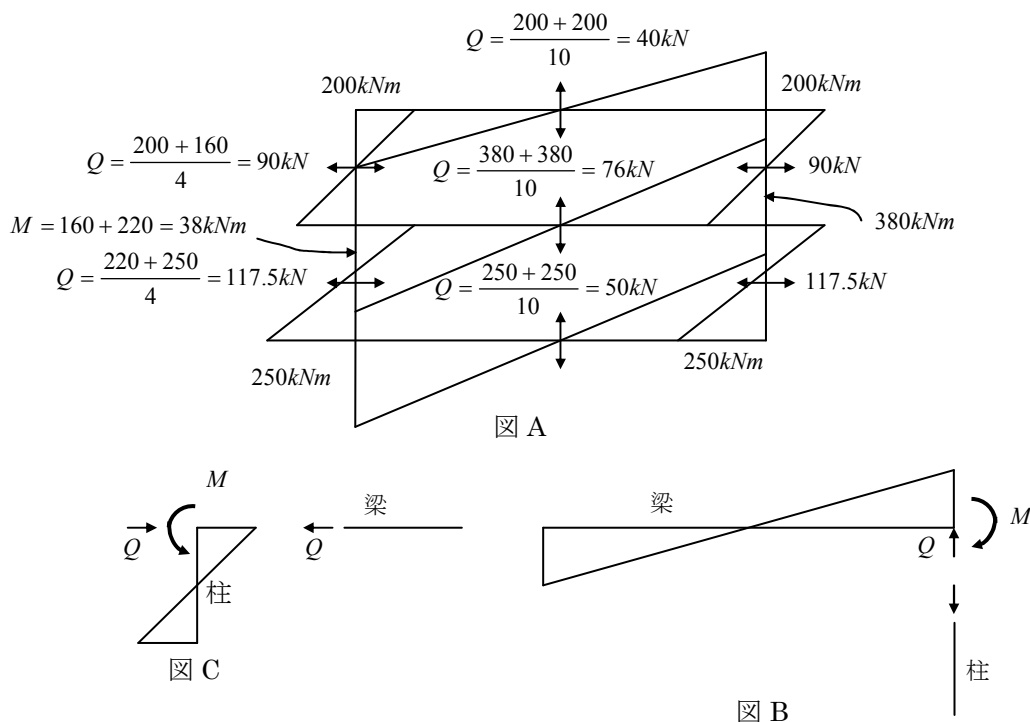
図 1

図 A のようになる。梁に生じる曲げモーメントにより生じるせん断力が、柱に作用したとき軸力となるが、それが引張りか圧縮かを判定するには図 B のように考える。逆に柱に生じる曲げモーメントにより生じるせん断力が、梁に作用したとき軸力となるが、それが引張りか圧縮かを判定するには図 C のように考える。

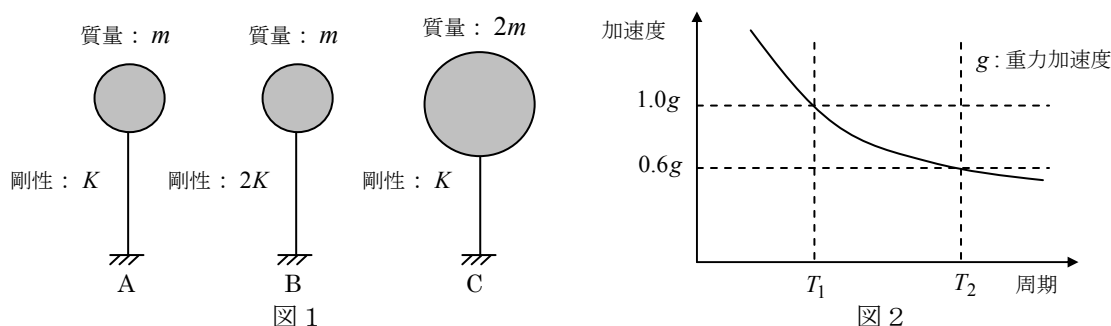
①の水平力は $H = 90 + 90 = 180kN$ 、②の水平力は $H = 117.5 + 117.5 - 180 = 55kN$

③のせん断力は $Q = 76kN$ 、④の軸力は $N = 40 + 76 = 116kN$

⑤のの反力は $R = 40 + 76 + 50 = 166kN$



問 12 図 1 のような頂部に集中荷重をもつ棒 A、B、C における固有周期をそれぞれ T_A 、 T_B 、 T_C とする場合において、それぞれの棒の脚部に図 2 のような加速度応答スペクトルをもつ地震動が入力されたとき、棒に生じる応答せん断力が Q_A 、 Q_B 、 Q_C となった。 T_A 、 T_B 、 T_C の大小関係と Q_A 、 Q_B 、 Q_C の大小関係を求めよ。ただし、 T_A 、 T_B 、 T_C は図 2 の T_1 、 T_2 との間の値を取り、応答は水平方向であり弾性範囲内とする。(平成 16) (難易度 AA)



(解) 棒の固有周期は $T = 2\pi\sqrt{M/K}$ で表される (13 章)。ここで、 M は質量、 K は棒の剛性である。

よって、 $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ 、 $T_B = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}}$ 、 $T_C = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$ となり、

$$T_B < T_A < T_C \quad (1)$$

が得られる。棒の応答せん断力 Q は、 $Q = M\alpha$ で表される (α は質量の加速度) から、

$$Q_A = m\alpha_A, \quad Q_B = m\alpha_B, \quad Q_C = 2m\alpha_C \quad (2)$$

となる。固有周期の結果から

$$\alpha_C < \alpha_A < \alpha_B \quad (3)$$

となる。(2)式から分かるように、棒の応答せん断力 Q は質量×加速度であり、題意から質量は既知となっている。よって加速度が変数として存在しその大小により(2)式から判断すればよいことになる。

まず、(2)式の第1項と2項と(3)式の第2項と3項から $Q_A < Q_B$ は確定する。つぎに、 Q_C が Q_A より小さいか、 Q_B より大きいかの判定になる。最初に、 Q_B と比較することにする。

題意により、図2から固有周期は $T_1 \sim T_2$ で推移することから加速度は $0.6g \sim 1.0g$ の範囲で推移する。ここで Q_C が最も小さい値をとる場合は加速度 $\alpha_c = 0.6g$ のときであり、最も大きい値をとる場合は加速度 $\alpha_c = 1.0g$ のときである。よって Q_C のとり得る範囲は次式となる。

$$1.2m < Q_C < 2m \quad (4)$$

次に、 Q_B が最も小さい値をとる場合は加速度 $\alpha_B = 0.6g$ のときであり、最も大きい値をとる場合は加速度 $\alpha_B = 1.0g$ のときである。よって Q_B のとり得る範囲は次式となる。

$$0.6m < Q_B < m \quad (5)$$

(4)式と(5)式を比較すると $Q_B < Q_C$ であることは明らかである。よって $Q_A < Q_B < Q_C$ となる。

問 13 図1のような底部で固定された矩形断面材の頂部の図心 G 点に荷重 P 及び荷重 Q が作用するときの底部 $a-a$ 断面における垂直応力度分布が図2に示されている。 P と Q の値を求めよ。ただし、矩形断面材は等質等断面とし、自重はないものとする。(平成 17) (難易度 B)

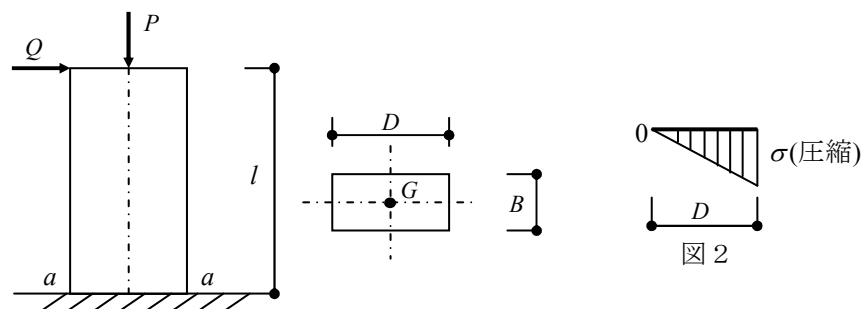


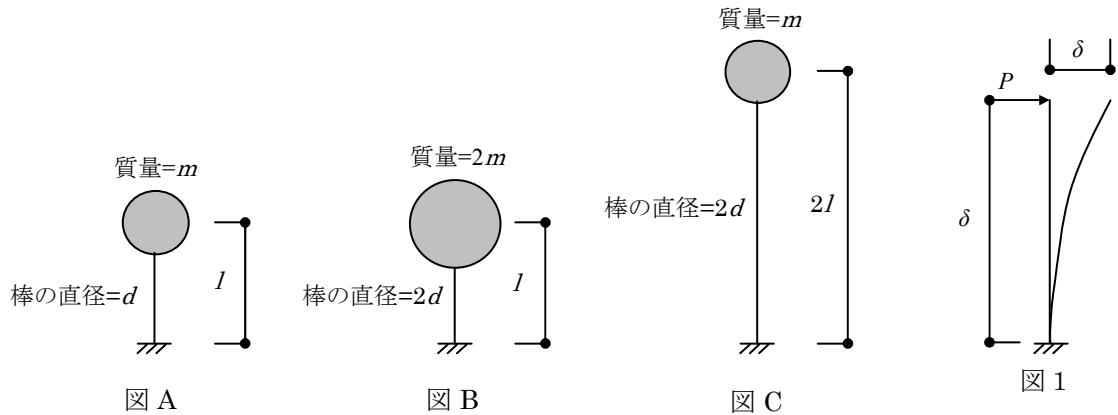
図 1

(解) P による鉛直方向の圧縮応力度 σ_c は $\sigma_c = -\frac{P}{BD}$ Q による底部に対する曲げモーメントは $M = Q \cdot l$ である。この曲げモーメントによる底部の左端は引張応力度、右端は圧縮応力度をもたらす。

$$\sigma_c = -\frac{M}{Z} = -\frac{Ql}{BD^2/6} = -\frac{6Ql}{BD^2}, \quad \sigma_t = +\frac{M}{Z} = +\frac{Ql}{BD^2/6} = +\frac{6Ql}{BD^2} \text{ となり、図2の底部での応力度分}$$

$$\text{布より } -\frac{P}{BD} + \frac{6Ql}{BD^2} = 0, \quad -\frac{P}{BD} - \frac{6Ql}{BD^2} = -\sigma \text{ で、両式を解くと、} P = \frac{\sigma \cdot BD}{2}, \quad Q = \frac{\sigma \cdot BD^2}{12l}$$

問 14 図 1 のような頂部に集中質量をもつ丸棒 A、B、C における固有周期 T_A 、 T_B 、 T_C の大小関係で正しいものはどれか。柱はすべて等質で棒の質量は無視する。なお棒のバネ定数は $3EI/l^3$ で E はヤング係数、 I は断面 2 次モーメントである。(平成 19) (難易度 A)



1. $T_A = T_C > T_B$ 、2. $T_A > T_C > T_B$ 、3. $T_B > T_A = T_C$ 、4. $T_B > T_A > T_C$ 、5. $T_B > T_C > T_A$ 、
 (解) 図のような構造物の固有周期は $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ である。(試験直前に暗記)

m : 質量、 E : 柱のヤング係数、 I : 柱の断面 2 次モーメント、 k : バネ定数 ($k = 3EI/l^3$)

図 1 の変位 δ はモールの定理より、 $\delta = Pl^3/3EI$ でバネ定数は単位の変位を生じさせるための外力 P だから、 $\delta=1$ とおいて、整理すれば、 $P = 3EI/l^3$ 、すなわちバネ定数 $k = 3EI/l^3$ を得る。

それぞれの、断面 2 次モーメントは、 $I_A = \pi \cdot d^4/64$ 、 $I_B = I_C = \pi \cdot (2d)^4/64 = 16I_A$ である。

固有周期は、

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{I_A}} = \frac{2\pi \cdot ml^3}{I_A} \sqrt{\frac{1}{1}}、T_B = 2\pi \sqrt{\frac{2ml^3}{16I_A}} = \frac{2\pi \cdot ml^3}{I_A} \sqrt{\frac{1}{8}}、T_C = 2\pi \sqrt{\frac{m(2l)^3}{16I_A}} = \frac{2\pi \cdot ml^3}{I_A} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

よって、2. が正解となる。