

#### 4. 5 応力度

問1 図1は鉄筋コンクリート梁の中央に荷重 $P$ が作用している。梁の最大曲げモーメントとせん断力を求めて、鉄筋の所要断面積を求めよ。また鉄筋が降伏するときのコンクリートの圧縮応力を求めよ。但し、鉄筋の許容引張応力度を $1600\text{kg}/\text{cm}^2$ 、コンクリートの許容圧縮応力度を $60\text{kg}/\text{cm}^2$ 、許容せん断応力度を $6\text{kg}/\text{cm}^2$ とし断面は図2とする。 $P=4t$ 、 $l=8m$ 、 $j=7d/8$ である。鉄筋は $25\phi(4.91\text{cm}^2/\text{本})$ を使用する。

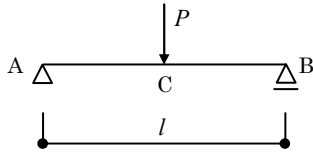


図1

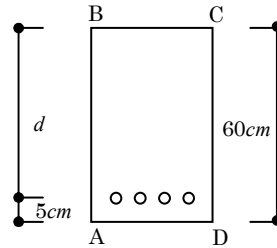


図2

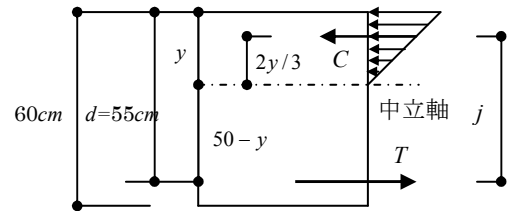


図3

鉄筋の断面積 $a_t$ は、梁の引張鉄筋比 $a_t/bd$ が釣合鉄筋比以下のときは次式で表せる。

$$a_t = M / f_t j \quad (1)$$

せん断応力は

$$\tau = Q / bj \quad (2)$$

で、曲げモーメントとの最大値は $M_{\max} = Pl/4 = 8tm$ だから、

$$a_t = M / f_t j = \frac{8 \times 10^5}{1600 \times 7/8 \times 55} = 10.39\text{cm}^2$$

よって、求める鉄筋の本数 $n$ は、 $n = \frac{10.39}{4.91} = 2.12$ だから、3本である。このときの中立軸の値は、

図3から $j = 7d/8 = 55 - y + 2y/3 = 55 - y/3$ だから、 $y = 20.625\text{cm}$ が得られる。よってコンクリートの

圧縮側の合力は $C = \frac{by\sigma_c}{2}$ 、 $\sigma_c = \frac{2C}{by}$ となる。題意は釣合鉄筋比のときであるから、

$$T = C = 1600 \times 3 \times 4.19 = 2.357 \times 10^4 \text{ kg}、\sigma_c = \frac{2T}{by} = \frac{2 \times 2.357 \times 10^4}{40 \times 20.625} = 57.13\text{kg}/\text{cm}^2 < 60\text{kg}/\text{cm}^2$$

となるから、コンクリートの圧縮応力度は許容圧縮応力度以下である。最大せん断力は梁両端に生じて $Q = P/2 = 2t$ となる。よってせん断応力度は

$$\tau = \frac{Q}{bj} = \frac{2000}{40 \times 7/8 \times 55} = 1.04\text{kg}/\text{cm}^2 < 6\text{kg}/\text{cm}^2 \text{ となる。}$$

この結果はコンクリートのせん断応力度は許容圧縮応力度以下と考えられる。

問2 図1の鉄筋コンクリート梁に等分布荷重  $w$  が作用している。梁の最大曲げモーメントとせん断力を求めて、鉄筋の所要断面積を求めよ。また鉄筋が降伏するときのコンクリートの圧縮応力を求めよ。但し、鉄筋の許容引張応力度を  $1600\text{kg}/\text{cm}^2$ 、コンクリートの許容圧縮応力度を  $60\text{kg}/\text{cm}^2$ 、許容せん断応力度を  $6\text{kg}/\text{cm}^2$  とし断面は図2とする。 $w=2\text{t}/\text{m}$ 、 $l=8\text{m}$ 、 $j=7d/8$ である。鉄筋は  $25\phi(4.91\text{cm}^2/\text{本})$  を使用する。

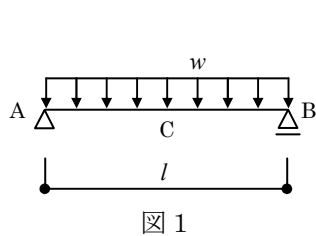


図1

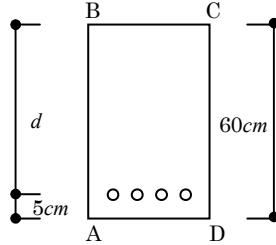


図2

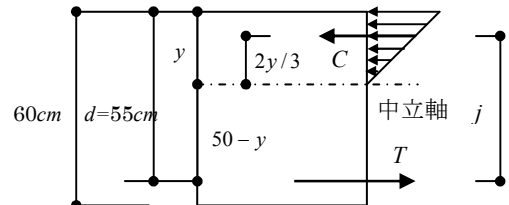


図3

梁は上下で均質でないからヤング係数は梁の高さにより異なるから、一般的な  $\sigma = My/I$  の式では求められない。鉄筋の断面積  $a_t$  は、梁の引張鉄筋比  $a_t/bd$  が釣合鉄筋比以下のときは次式で求められる。

$$a_t = M / f_t j \quad (1)$$

せん断応力は

$$\tau = Q / bj \quad (2)$$

で、曲げモーメントとせん断力の最大値は  $M_{\max} = wl^2/8 = 9\text{tm}$  だから、鉄筋量は

$$a_t = M / f_t j = \frac{9 \times 10^5}{1600 \times 7/8 \times 55} = 11.69\text{cm}^2$$

となる。鉄筋の本数  $n$  は、 $n = \frac{11.69}{4.91} = 3.08$  から、4本となる。このときの中立軸の値は、図3から

$j = 7d/8 = 55 - y + 2y/3 = 55 - y/3$ 、 $y = 20.625\text{cm}$  である。よってコンクリートの圧縮側の合力は

$$C = \frac{by\sigma_c}{2} \text{ で } C \text{ と } T \text{ は偶力だから } M = C \cdot j \text{ となり } \sigma_c = \frac{2M}{byj} \text{ を得る。そして}$$

$$\sigma_c = \frac{2M}{byj} = \frac{2 \times 9 \times 10^5}{40 \times 20.625 \times 7/8 \times 55} = 45.09\text{kg}/\text{cm}^2 < 60\text{kg}/\text{cm}^2$$

となるから、コンクリートの圧縮応力度は許容圧縮応力度以下である。

最大せん断力は梁両端に生じて  $Q = wl/2 = 6\text{t}$ 。  $\tau = \frac{Q}{bj} = \frac{6000}{40 \times 7/8 \times 55} = 3.12\text{kg}/\text{cm}^2 < 6\text{kg}/\text{cm}^2$

コンクリートのせん断応力度は許容圧縮応力度以下である。

問3 図1の鉄筋コンクリート梁に曲げモーメントが作用したとき中立軸の位置を求めよ。但し、コンクリートの圧縮に対するヤング係数を  $E_C$ 、引張に対して抵抗力は無いものとする。鉄筋のヤング係数を  $E_S$  とし  $E_C : E_S = 1:15$  とする。曲げモーメントは鉄筋側が引張られるように作用する。鉄筋の総断面積は  $12\text{cm}^2$  とする。

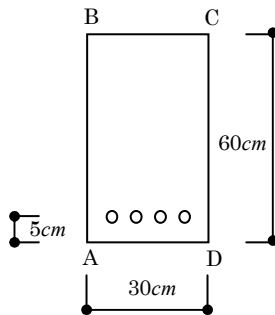


図 1

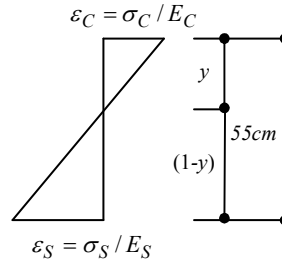


図 2

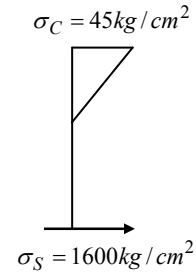


図 3

(解) 中立軸を上端から  $y$  の位置にあるとすると次式となる。

$$\frac{\varepsilon_C}{y} = \frac{\varepsilon_S}{55 - y} \quad (1)$$

$$\varepsilon_C = \frac{\sigma_C}{E_C}, \quad \varepsilon_S = \frac{\sigma_S}{E_S} = \frac{\sigma_S}{15E_C} \text{ から、 } \frac{\sigma_C}{E_C y} = \frac{\sigma_S}{15E_C (55 - y)} \text{ より}$$

$$\sigma_S = \frac{15(55 - y)}{y} \cdot \sigma_C \quad (2)$$

$x$  軸方向の釣り合いから

$$\frac{30\sigma_C y}{2} = 12\sigma_S \quad (3)$$

$$(2) \text{式を}(3) \text{式に代入すると、} 15y\sigma_C = \frac{12 \times 15(55 - y)}{y} \sigma_C$$

$$y^2 + 12y - 12 \times 55 = 0, \quad y = -6 \pm \sqrt{36 + 12 \times 55} = 20.38\text{cm}$$

問4 図1の鉄筋コンクリート梁に曲げモーメントが作用して、鉄筋とコンクリートが同時に許容応力度に達した。鉄筋の断面積  $A_s$  とコンクリートの断面積  $A=bd$  との比と中立軸の位置を求めよ。コンクリートの許容圧縮応力度を  $45\text{kg}/\text{cm}^2$ 、鉄筋の許容引張応力度を  $1600\text{kg}/\text{cm}^2$ 。コンクリートと鉄筋のヤング係数比は  $E_C:E_S=1:15$  とする。

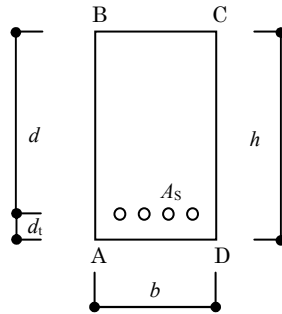


図 1

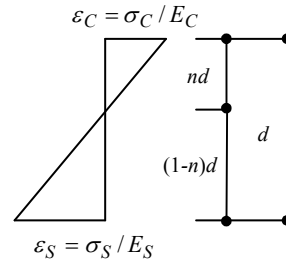


図 2

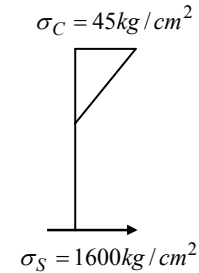


図 3

(解) 中立軸を上端から  $y$  の位置にあるとすると次式となる。

$$\varepsilon_C = \frac{45}{E_C} \quad (1)$$

$$\sigma_S = \frac{1600}{E_S} = \frac{1600}{15E_C} \quad (2)$$

$$\text{変形状態から、} \varepsilon_C : \varepsilon_S = n : (1-n) \quad (3)$$

(1)式と(2)式を(3)式に代入すると  $\frac{45 \times 15}{1600} = \frac{n}{1-n}$  から、  $n = \frac{27}{91} = 0.2967$

$x$  軸方向の釣り合いから

$$\frac{f_C \cdot b \cdot nd}{2} = f_t \cdot A_s = f_t bd \cdot p_t \times 10^{-2}$$

$$\frac{45n}{2} bd = 16p_t \cdot bd, \quad p_t = \frac{45n}{32} = \frac{45}{32} \cdot \frac{27}{91} = 0.45\%$$

問5 図1の矩形の梁断面で上側が圧縮、下側が引張でそれぞれのヤング係数は $E_t : E_c = 5 : 1$ のとき図2の曲げモーメント $M$ を受けたとき断面内の応力度分布と中立軸の位置を求めよ。

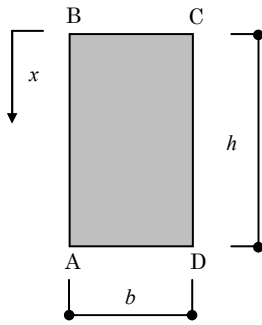


図1

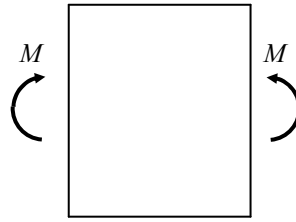


図2

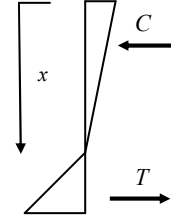


図3

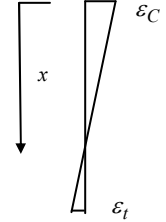


図4

(解) 圧縮側の合力は $C = \frac{\sigma_c \times b \times x}{2}$ 、引張側の合力は $T = \frac{\sigma_t \times b \times (h-x)}{2}$ で次式が成立する。

$$C + T = 0 \quad (1)$$

$C$ と $T$ の符号が異なっていることに注意。図3と図4から、

$$\sigma_c = E_c \times \varepsilon_c, \quad \sigma_t = E_t \times \varepsilon_t = 5E_c \times \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\varepsilon_c : x = \varepsilon_t : (h-x) \text{ となり } \varepsilon_t = \frac{h-x}{x} \times \varepsilon_c \quad (3)$$

これを、(2)式に代入すると、 $\sigma_t = \frac{h-x}{x} \times 5E_c \times \varepsilon_t = \frac{5(h-x)}{x} \times (-\sigma_c)$ となる。

$C$ と $T$ の符号に注意して(1)式に代入すると次式となり整理すると

$$\frac{\sigma_c \times b}{2} \cdot \left\{ x - \frac{5(h-x)^2}{x} \right\} = 0 \quad (4)$$

$4x^2 - 10hx + 5h^2 = 0$ から、 $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4} h = 0.691h$ を得る。

$C$ と $T$ の応力中心間距離は $2h/3$ であるから、 $T = -C = \frac{3M}{2h}$ となる。

$$\sigma_c \cdot \frac{bx}{2} = -\frac{3M}{2h}, \quad \sigma_c = -\frac{3M}{bhx} = -\frac{3}{0.691} \cdot \frac{M}{bh^2}$$

$$\sigma_t \cdot \frac{b(h-x)}{2} = +\frac{3M}{2h}, \quad \sigma_t = +\frac{3M}{bh(h-x)} = +\frac{3}{0.309} \cdot \frac{M}{bh^2}$$

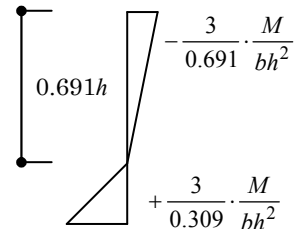


図5

問6 図1のH型のせん断応力度分布を求めよ。ただし、せん断応力度は $z$ 軸方向に一様に分布する。

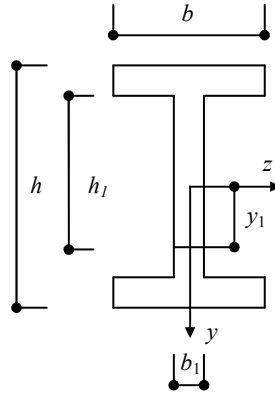


図1

図2 せん断応力度

(解) 矩形断面内の任意の位置のせん断応力度は次式で表される。

$$\tau = \frac{Q}{bI} \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA \quad (1)$$

フランジ部分とウェブ部分とに分けて計算する。

$$\text{フランジの断面1次モーメントは} \quad \int_{\frac{y_1}{2}}^{\frac{h}{2}} y dA = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right)$$

$$\text{ウェブの断面1次モーメントは} \quad \int_{\frac{y_1}{2}}^{\frac{h}{2}} y dA = \frac{b_1}{2} \cdot \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$\text{H型の断面1次モーメントは} \quad \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \cdot \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$(1)\text{式に代入すると、} \quad \tau = \frac{Q}{b_1 I} \left[ \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \cdot \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right] \quad (2)$$

せん断応力度 $\tau$ は梁せいに沿って放物線分布している。最大せん断応力度と最小せん断応力度は $y_1=0$ と $y_1=h_1/2$ の位置に生じる。

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{b_1 I} \left[ \frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right] \quad (3)$$

$$\tau_{\min} = \frac{Q}{b_1 I} \left[ \frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right] \quad (4)$$

ここで、 $b \gg b_1$  成るときは、 $\tau_{\max} \cong \tau_{\min}$  のウェブ上でせん断応力の分布が等分布に近くなる。次にフ

ランジ部分、 $h/2 > y_1 > h_1/2$  では  $\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} b y dy = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$  で

$$\tau = \frac{Q}{2I} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (5)$$

$y_1 = h_1/2$  と  $y_1 = h/2$  の位置で

$$\tau = \frac{Q}{8I} \cdot (h^2 - h_1^2), \quad \tau = 0$$