

## 1. 2 静定ラーメン

問1 荷重  $P$  を水平移動させたとき A-D 材に曲げモーメントが生じない場合の  $a$  を求めよ。

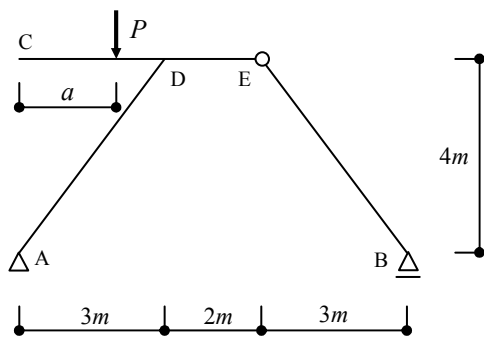


図 1

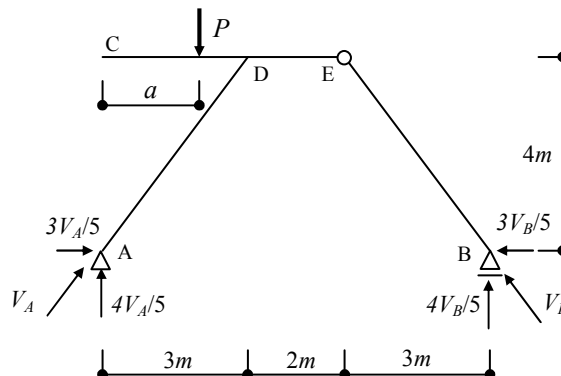


図 2

(解) B-E 材も曲げモーメントが生じないから、反力は図 2 のようになる。よって

$$\Sigma M_A = Pa - \frac{4}{5}V_B \times 8 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma X = \frac{3}{5}V_A - \frac{3}{5}V_B = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma Y = \frac{4}{5}V_A + \frac{4}{5}V_B - P = 0 \quad (3)$$

これらを解くと、 $V_A = \frac{5}{8}P$ 、 $V_B = \frac{5}{8}P$ 、 $a = 4m$

(別解) 図 3 のように、反力  $V_A$  と  $V_B$  は等しい。その作用線は O 点で交わる。鉛直荷重がこれらの反力と釣り合うためには、O 点と交わる必要がある。よって  $a = 4m$  である。

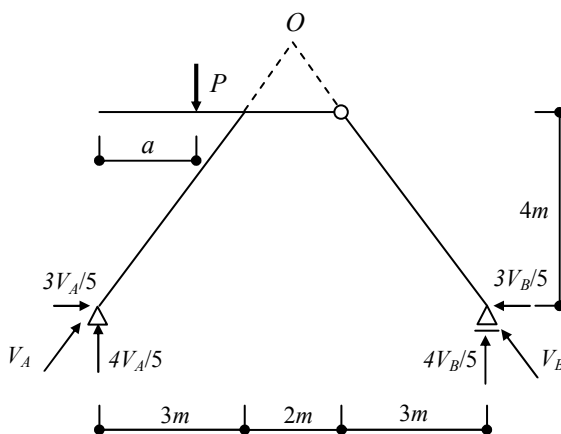


図 3

問2 図のように曲げモーメントが与えられたとき、せん断力図、反力と外力を描け。

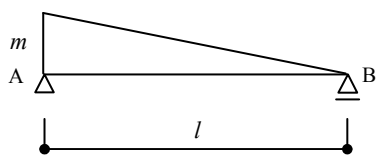


図 1-1

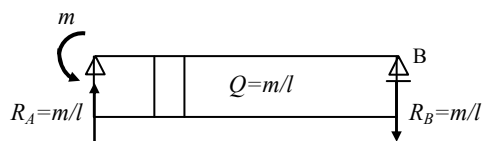


図 1-2

(解) 図 1-1 の A 点曲げモーメントから、反力は図 1-2 のようになる。

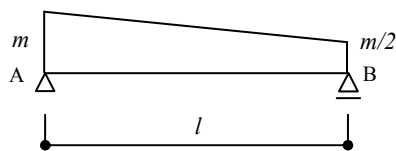


図 2-1

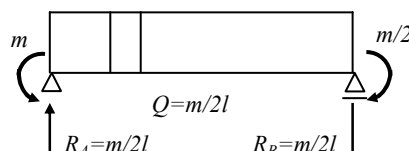


図 2-2

(解) 図 2-1 の A 点と B 点の曲げモーメントから、反力は図 2-2 のようになる。

$$\Sigma M_A = -m + m/2 - R_B \times l = 0 \text{ から、 } R_B = m/2l$$

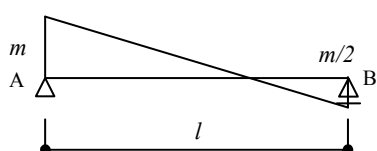


図 3-1

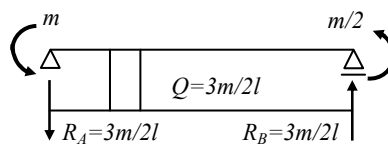


図 3-2

(解) 図 3-1 の A 点と B 点の曲げモーメントから、反力は図 3-2 のようになる。

$$\Sigma M_A = -m - m/2 - R_B \times l = 0 \text{ から、 } R_B = 3m/2l$$

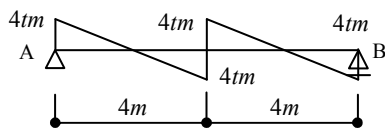


図 4-1

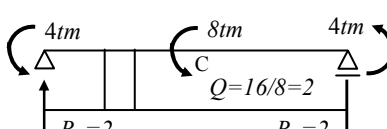


図 4-2

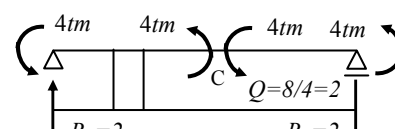


図 4-3

(解) 図 4-1 の A 点、B 点と C 点の曲げモーメントから、外力は図 4-2 か図 4-3 のようになる。

図 4-2 の場合は  $\Sigma M_A = -4 - 8 - 4 + R_B \times 8m = 0$  から、 $R_B = 2t$

図 4-3 の場合は C-B 材の曲げモーメントから、 $\Sigma M_A = -4 - 8 - 4 + R_B \times 8m = 0$  から、 $R_B = 2t$

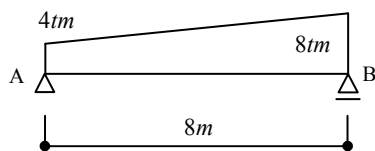


図 5-1

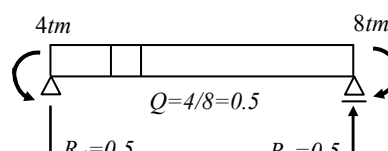


図 5-2

(解) 図 5-1 の A 点、B 点の曲げモーメントから、外力は図 5-2 のようになる。

図 4-2 の場合は  $\Sigma M_A = -4 + 8 - R_B \times 8m = 0$  から、 $R_B = 0.5t$

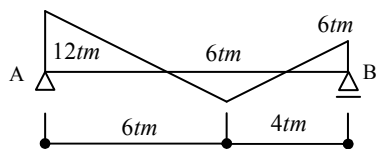


図 6-1

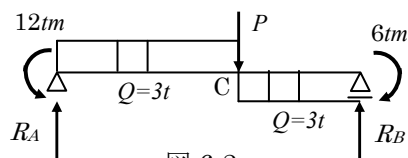


図 6-2

(解) 図 6-1 の A 点、B 点の曲げモーメントから、外力は図 6-2 のようになる。また C 点には鉛直集中荷重  $P$  が作用している。 $M_C = R_B \times 4m - 6tm = 6tm$ 、 $R_B = 3t$

よって、 $\Sigma M_A = -12tm + 6tm + P \times 6m - R_B \times 10m = 0$  から、 $P = 6t$

$$\Sigma Y = R_A + R_B - P = 0, \quad R_A = 3t$$

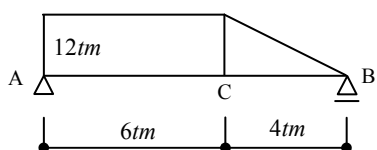


図 7-1

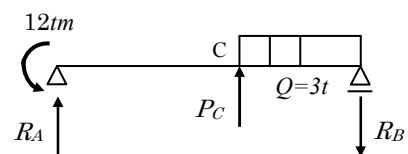


図 7-2

(解) 図 7-1 の A 点、B 点の曲げモーメントから、C 点から A 点への曲げモーメントが一定であるから、C 点には B 点の反力  $R_A$  と絶対値が等しく向きが反対な  $P_C$  が確認できる。

$$M_C = R_B \times 4m = 12tm, \quad R_B = 3t$$

よって、 $\Sigma M_A = -12tm + 6tm + P \times 6m - R_B \times 10m = 0$  から、 $P_C = 6t$

$$\Sigma Y = R_A + P_C - R_B = 0, \quad R_A = 0$$

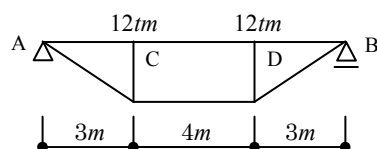


図 8-1

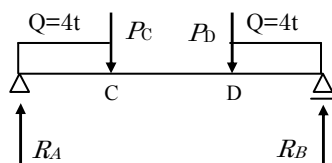


図 8-2

(解) 図 8-1 の C 点、D 点の曲げモーメントから、C 点と D 点に作用する外力は A 点と B 点の反力  $R_A$  と  $R_B$  に絶対値が等しく向きが反対な  $P_C$  と  $P_D$  が確認できる。

$$M_D = R_B \times 3m = 12tm, \quad R_B = 4t \text{ となり } R_A = 4t \text{ となる。}$$

よって、 $P_C = 4t$ 、 $P_D = 4t$

図 9、図 10 のような曲げモーメントが生じる場合はどうか。図 10 は！！考えよ。

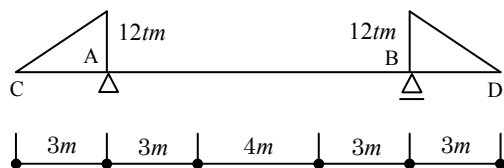


図 9

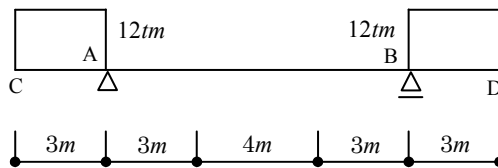


図 10

問3 図1のように曲げモーメントが与えられたとき、せん断力図、反力と外力を描け。

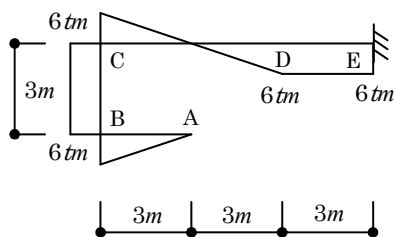


図1

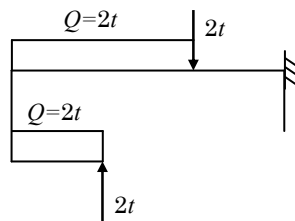


図2

(解) A点からB点までの曲げモーメントにより、A点には1次直線の曲げモーメントになっているから、A点には上向きに集中荷重が作用している。 $M_B = P \times 3m = 6tm$  から  $P = 2t$  となる。

D点で曲げモーメントが折れ曲がっているから、下向きに集中荷重が作用している。

$M_E = 2t \times 6m - P \times 3m = 6tm$  から  $P = 2t$  となる。

問4 図1のように曲げモーメントが与えられたとき、せん断力図、反力と外力を描け。

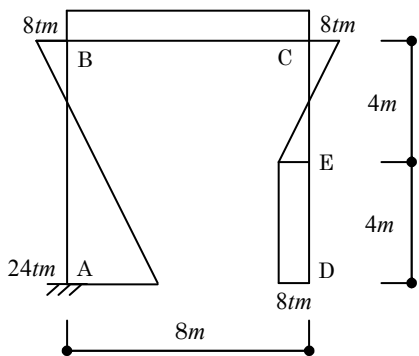


図1

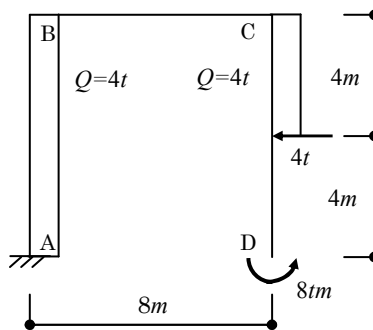


図2

(解) D点からE点までの、曲げモーメントにより、D点に反時計周りの曲げモーメント  $8tm$  が作用している。E点からC点には1次直線の曲げモーメントになっているから、E点には左向きに集中荷重が作用している。 $M_C = -8tm + P \times 4m = 8tm$  から  $P = 4t$  となる。

問5 図1のように曲げモーメントが与えられたとき、せん断力図、反力と外力を描け。

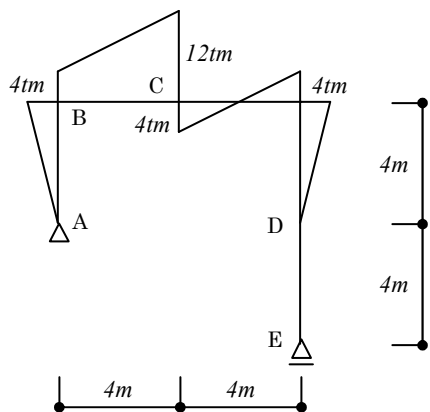


図1

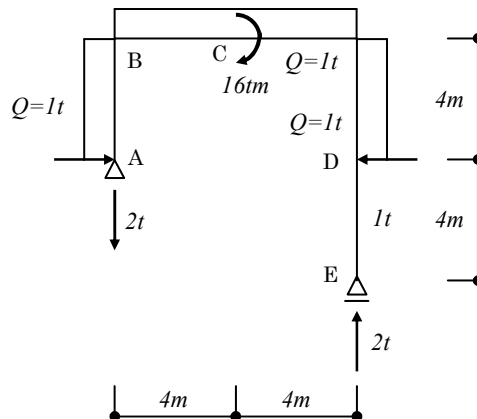


図2

(解) A点からB点までの曲げモーメントは1次直線になっているから、A点には右向きに集中荷重  $P=1t$  が作用している。同様にD点には左向きに  $P=1t$  が作用している。C点には外曲げモーメント  $m=16tm$  が時計廻りに作用している。

2m/3

問6 図1のように曲げモーメントが与えられたとき、せん断力図、反力と外力を描け。

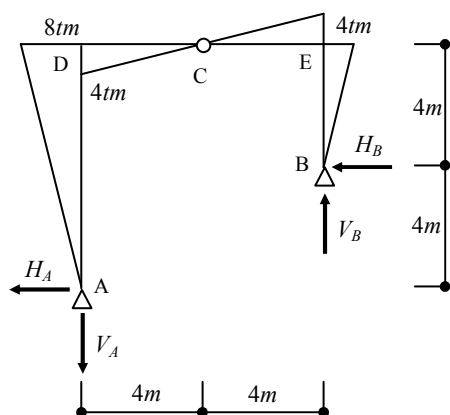


図1

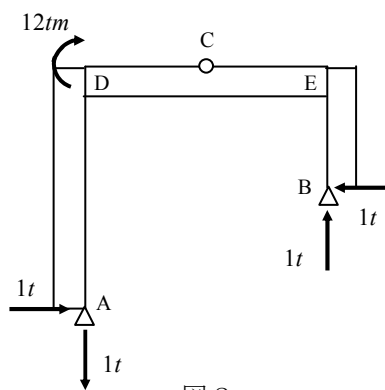


図2

(解) E点の曲げモーメントから、 $M_E = H_E \times 4m = 4tm$  から、左向きに  $H_B = 1t$  で、右向きに  $H_A = 1t$  となる。梁のせん断力は曲げモーメント図から推測して一定値である。D点においては、曲げモーメントは時計廻りに  $12tm$  の外モーメントが作用していると考えられる。

問7 図のようにせん断力が与えられたとき、曲げモーメント図を描け。

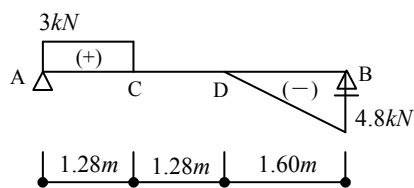


図 1

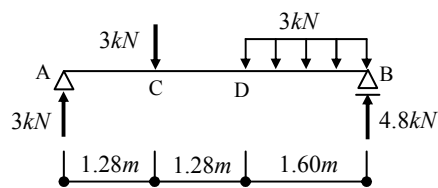


図 2

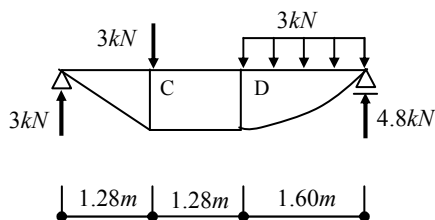


図 3

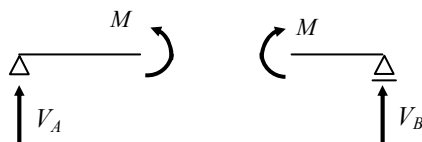


図 4 曲げの正負

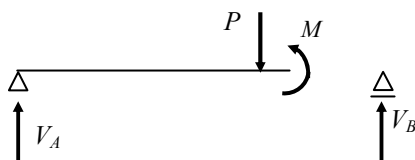


図 5 曲げの正負

(解) A 点の反力は図 1 から上向きに  $V_A=3kN$  である。C-D 材のせん断力がゼロであるから C 点には反力  $V_A=3kN$  と等しく向きが反対の鉛直荷重  $3kN$  が作用している。

B-D 材には等分布荷重が作用している。B 点の反力は上向きに  $V_B=4,8kN$  となる。D 点のせん断力がゼロであるから、反力  $V_B=4,8kN$  に等しい等分布荷重でなければならない。よって、

$$4.8kN = 1.6m \times w \text{ で } w=3kN \text{ となる。}$$

$$\text{C 点の曲げモーメントは、} M_C = 3kN \times 1.28m = 3.84kNm$$

$$\text{D 点の曲げモーメントは、} M_D = 3kN \times 2.56m - 3kN \times 1.28m = 3.84kNm$$

B 点から求めると、

$$\text{D 点の曲げモーメントは、} M_D = 4.83kN \times 1.60m - 4.8kN \times 0.8m = 3.84kNm$$

問8 図1のラーメンに、せん断力が図示されている。このときの外力と反力を求めて、曲げモーメント図を求めよ。

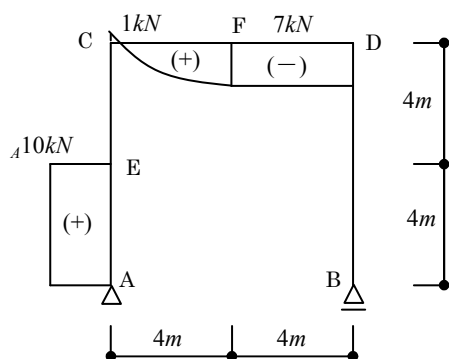


図1

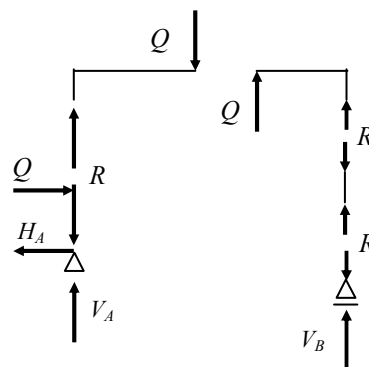


図3 せん断力の正負

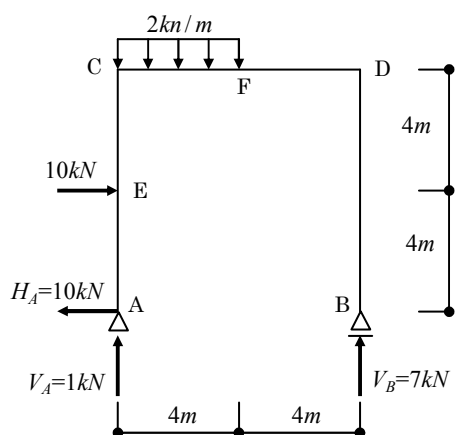


図2

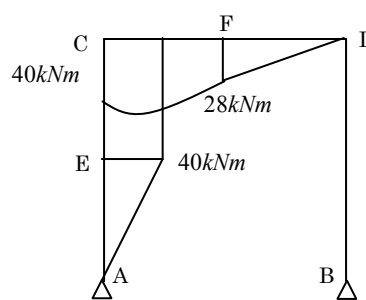


図4

(解) 図2に示すように、反力を  $H_A$ 、 $V_A$ 、 $V_B$  と仮定する。

図1でA-C材のA点のせん断力は $+10kN$ だから、図3から、反力は左向きに  $H_A=10kN$  である。また、E-C材にせん断力が無いから、集中荷重  $P=10kN$  がE点に右向きに作用している。

図1でB-D材のD点のせん断力は上向きの  $7kN$  だから、図3から、反力は上向きに  $H_B=7kN$  である。C-F材のせん断力は2次曲線が考えられるから、等分布荷重  $w$  が作用している。

A点に関する曲げモーメントの釣り合いを求めると

$$\Sigma M_A = 10kN \times 4m + 4w \times 2m - 7kN \times 8m = 0 \text{ から、} w=2kN \text{ を得る。}$$

問9 図1のラーメンに、せん断力が図示されている。このときの外力と反力を求めて、曲げモーメント図を求めよ。

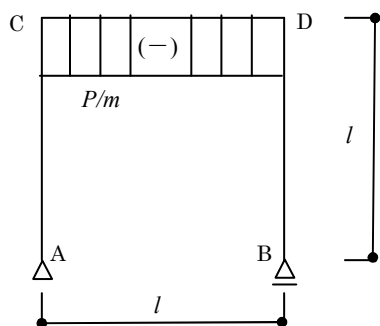


図1

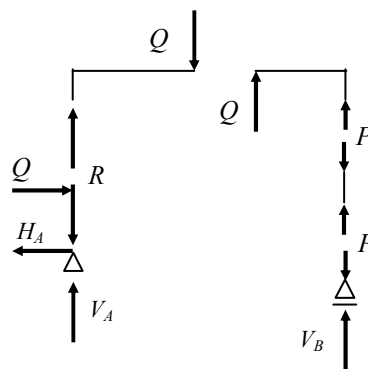


図3 せん断力の正負

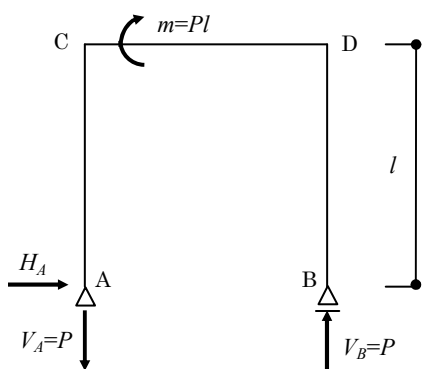


図2

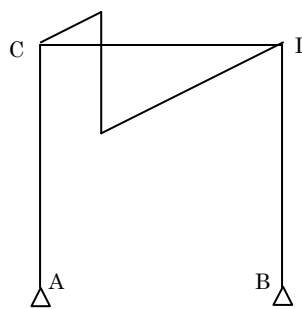


図4

(解) 図2に示すように、反力を  $H_A$ 、 $V_A$ 、 $V_B$  と仮定する。

図1でC・D材のD点のせん断力は  $P$  だから、図3から、 $P$  は上向きとなるから、反力は上向きに  $V_B=P$  である。同様に、図1でA・C材のC点のせん断力は  $P$  だから、図3から、反力は下向きに  $V_B=P$  である。また、図1から水平方向のせん断力が無いから  $H_A=0$  となる。また、反力は反時計回りの偶力  $m=Pl$  になっているから、外力は時計回りの  $m=Pl$  が作用している。この場合、外力の作用点はラーメンのどの点に働いても結果は同じである。



問 10 図 1 のラーメンに、せん断力が図示されている。このときの外力と反力を求めて、曲げモーメント図を求めよ。

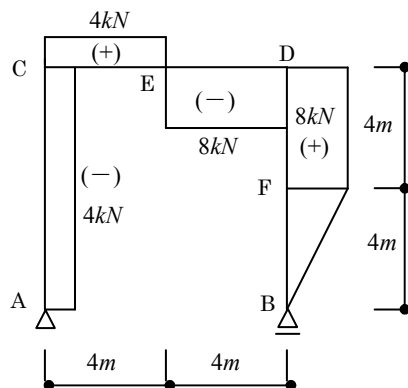


図 1

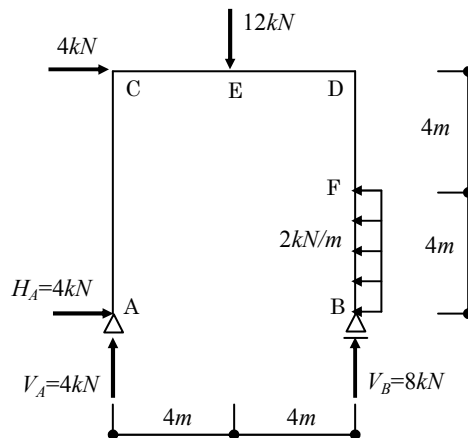


図 2

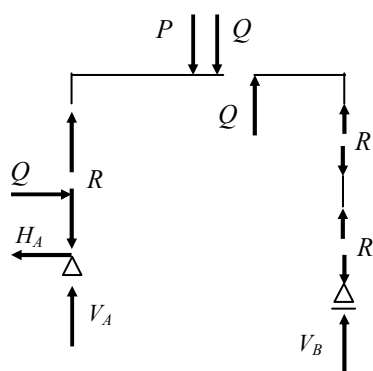


図 3 せん断力の正負

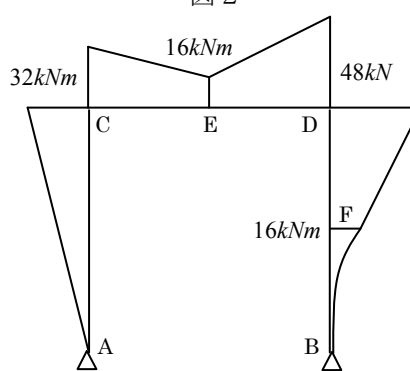


図 4

(解) 図 2 に示すように、反力を  $H_A$ 、 $V_A$ 、 $V_B$  と仮定する。

図 1 で A-C 材の A 点のせん断力は  $4kN$  だから、図 3 から、反力は左向きに  $H_A = 4kN$  である。B-F 材のせん断力は 1 次直線の傾きを持つから等分布荷重が考えられる。F 点のせん断力は  $8kN$  だから、 $w \times 4m = 8kN$  となり、 $w = 2kN$  が得られる。ラーメン全体の、X 方向の力の釣り合いから、右向きの水平荷重  $P$  が C 点か、D 点に作用しているのが分かる。E-D 材のせん断力は  $-8kN$  であるから、図 3 より、 $\Sigma Y = 4kN - P - Q = 0$ 、 $Q = 4kN - P = -8kN$ 、 $P = 12kN$  である。曲げモーメントは図 4 に示す。

問 11 図 1 の構造物の曲げモーメント図、せん断力図と軸方向力図を描け。

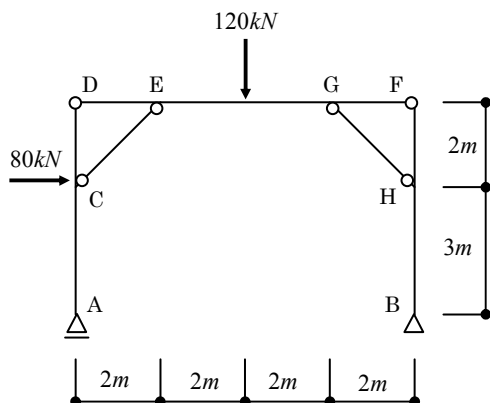


図 1

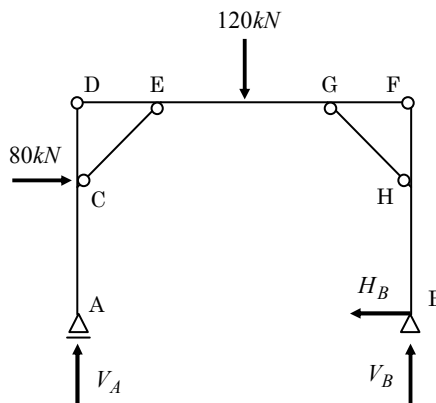


図 2

(解)  $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$ 、 $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$

図 2 から、 $\Sigma X = 80kN - H_B = 0$ 、 $\Sigma Y = V_A + V_B - 120kN = 0$ 、で A 点に関する曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_A = 80kN \times 3m + 120kN \times 4m - V_B \times 8m = 0$  で、 $V_A = 30kN$ 、 $V_B = 90kN$ 、 $H_B = 80kN$  となる。

図 3 より C 点の釣り合いから、 $\Sigma X = 80kN + N_{CE} \cos \theta = 0$  で、 $N_{CE} = -80\sqrt{2}kN$  で、

$\Sigma Y = 30kN + N_{CD} + N_{CE} \sin \theta = 0$  より、 $N_{CD} = 50kN$  となる。よって、図 4 から柱 A-D 材には曲げモーメントは生じない。図 5 (a) は D-F 材に作用する力を示すが、図 5 (b) より曲げモーメントを求めると、

図 5 (c) のようになる。

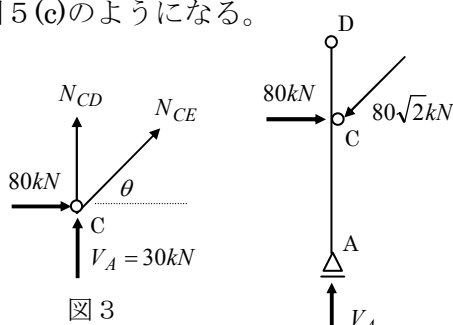


図 3

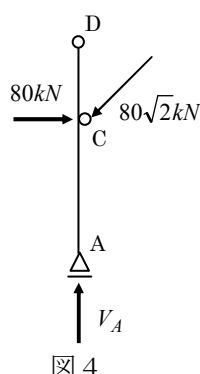


図 4

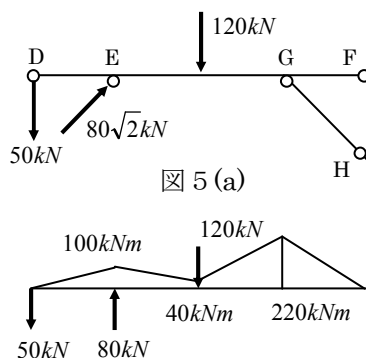


図 5 (a)

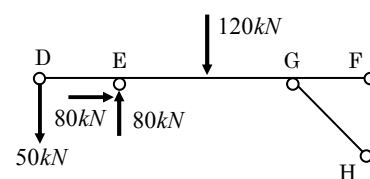


図 5 (b)

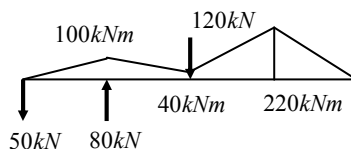


図 5 (c)

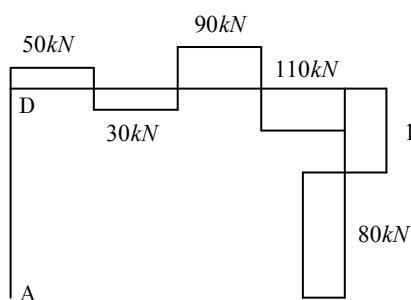


図 7 Q 図

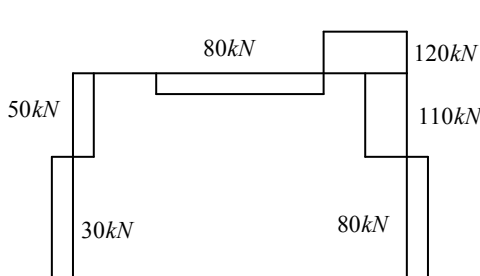


図 8 N 図

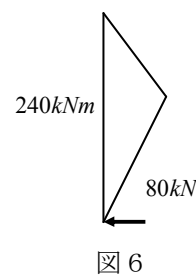


図 6

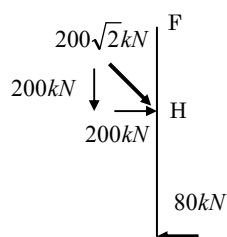


図 9

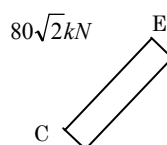


図 10 N 図

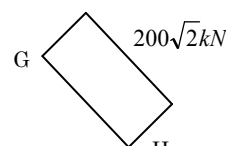


図 11 N 図

梁 D-F 材の E 点、中央点、G 点の曲げモーメントは反力と外力により求めることができる。すなわち、C-E 材、H-G 材に関係無く反力と外力だけで求められる。

問 12 図 1 のような 3 ピンラーメンに曲げモーメントが生じているとき、外力の作用する位置と方向と大きさを求めよ。

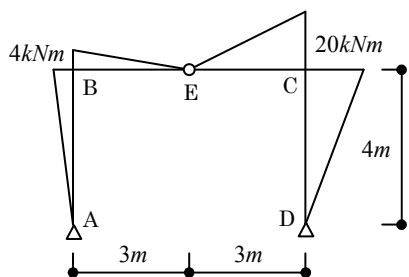


図 1

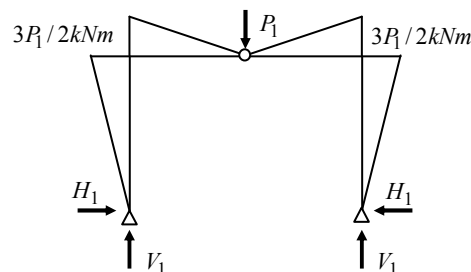


図 2

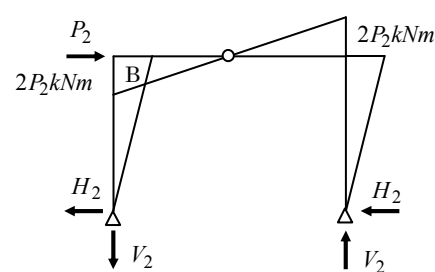


図 3

(解) 図 1 の曲げモーメントの状況から、外力モーメントと等分布荷重等が作用していないことが分かる。また、集中荷重が部材の中間にも作用していないので、節点に作用していると考ええる。よって、図 2 の鉛直荷重と図 3 の水平荷重の組み合わせを考えるのが妥当である。そして、図 2 の対称形と図 3 の逆対称形に分けて計算し、それらを合成した方が計算しやすい。図 2 は対称形だから、反力の方向と大きさは図 2 に示すようになる。同様に、図 3 は逆対称形だから、反力の方向と大きさは図 3 に示すようになる。そこで図 2 の左側の架構の E 点に関する曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_E = 3V_1 - 4H_1 = 0$ 。y 方向の釣り合いから、 $\Sigma Y = V_1 + V_1 - P_1 = 0$  だから、 $V_1 = P_1/2$ 、 $H_1 = 3P_1/8$  となる。同様に、図 3 から、右側の架構の E 点に関する曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_E = -3V_2 + 4H_2 = 0$  を得る。x 方向の釣り合いから、 $\Sigma X = P_2 - H_2 - H_2 = 0$  だから、 $H_2 = P_2/2$ 、 $V_2 = 2P_2/3$  となる。ここで図 2 と図 3 の B 点と C 点の曲げモーメントを求めると次のようになる (図 2 と図 3 に示す)。よって、図 1、図 2 と図 3 の B 点と C 点の整合性をとると、 $M_B = 3P_1/2 - 2P_2 = 4kNm$ 、 $M_C = 3P_1/2 + 2P_2 = 20kNm$  となり、両式を解くと、 $P_1 = 8kN$ 、 $P_2 = 4kN$  を得る。

図 2 と図 3 の反力と外力を合成した値が図 4 のようになる。これを基に、せん断力図と軸方向図を描くと図 5 と図 6 のようになる。

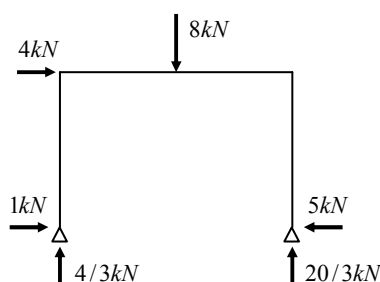


図 4

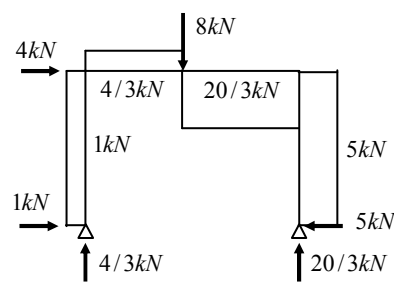


図 5 Q

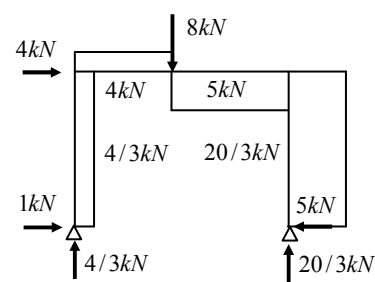


図 6 N

問 13 図 1-(a)と(b)の静定ラーメンで、ある荷重が作用したときの曲げモーメント図である。このときの外力の位置と種別と大きさを求めてせん断力図と軸力を描け。

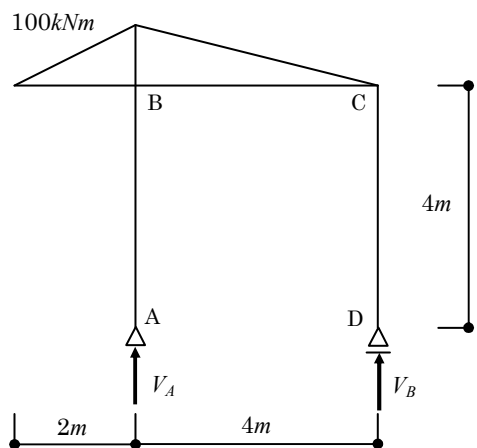


図 1 (a)

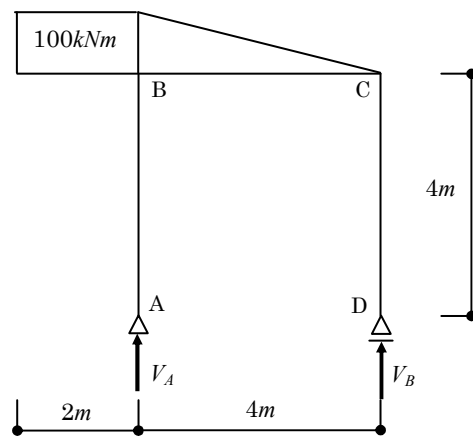


図 1 (b)

(解) 図 1 (a)から柱には外力は作用していないから A 点の水平反力は生じない。よって自由端に集中荷重が下向きに作用していると考えられる。また、それ以外の梁には外力は作用していない。

$$M_B = P \times 2m = 100kNm, \quad P = 50kN$$

$$\sum Y = -50kN + V_A + V_B = 0, \quad \sum M_D = V_A \times 4m - 50kN \times 6m = 0, \quad V_A = 75kN, \quad V_B = -25kN$$

図 1 (b)から柱には外力は作用していないから A 点の水平反力は生じない。よって自由端に曲げモーメントが左向きに作用していると考えられる。また、それ以外の梁には外力は作用していない。

$$\sum Y = V_A + V_B = 0, \quad M_B = -V_B \times 4m = 100kNm, \quad V_A = 25kN, \quad V_B = -25kN$$

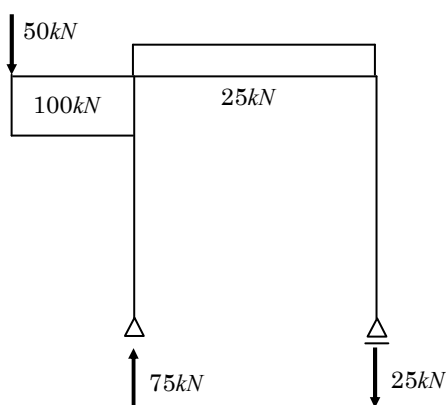


図 2(a) せん断力図

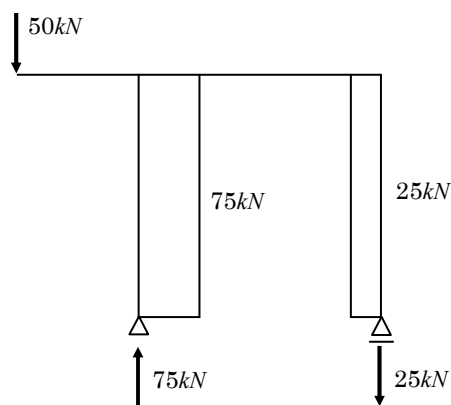


図 2(b) 軸力図

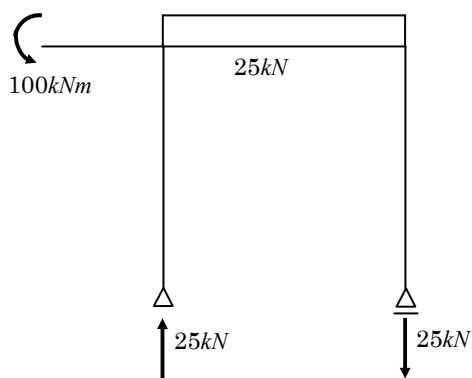


図 3(a) せん断力図

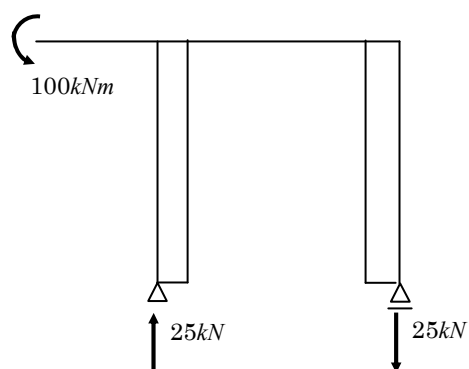


図 3(b) 軸力図

問 14 図1のようなラーメンの曲げモーメント、せん断力と軸方向力を求めよ。但し、対角線 A・C の長さは  $d$  とする。

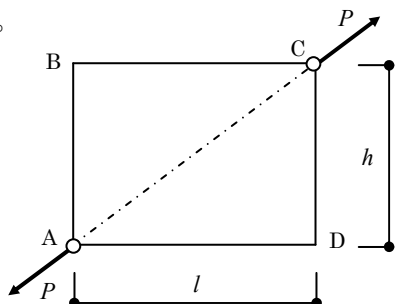


図 1

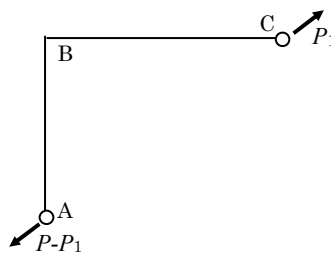
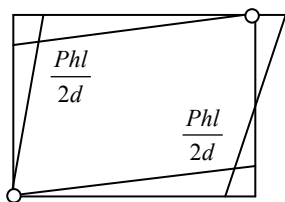
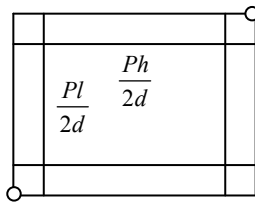
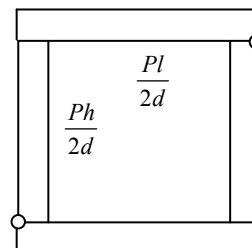


図 2

図 5  $M$ 図 6  $Q$ 図 7  $N$ 

(解) 図2のように A・C 線で対称形であるから、A・B・C 側を考える。そのとき、C 点に生じる応力を  $P_1$  とすると A 点に生じる応力は  $P - P_1$  となる。これらの応力が B 点に及ぼす曲げモーメントを求めると次式となる。

$$M_{BA} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}} P_1 \times h \quad (1)$$

$$M_{BC} = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} (P - P_1) \times l \quad (2)$$

そして、(1)式と(2)式は連続条件から  $M_{BA} = M_{BC}$  である。よって、 $P_1 = P - P_1$  で  $P_1 = P/2$  を得る。

$$M_{AB} = \frac{Pl}{2d} x \text{ で } x=h \text{ とすると、 } M_B = \frac{Phl}{2d}, \quad Q_B = \frac{Pl}{2d}, \quad N_B = \frac{Ph}{2d}$$

$$M_{CB} = \frac{Ph}{2d} x \text{ で } x=l \text{ とすると、 } M_C = \frac{Phl}{2d}, \quad Q_C = \frac{Ph}{2d}, \quad N_C = \frac{Pl}{2d}$$

問 15 図1のようなラーメンの曲げモーメント、せん断力と軸方向力を求めよ。但し、対角線 A-C の長さは  $d$  とする。

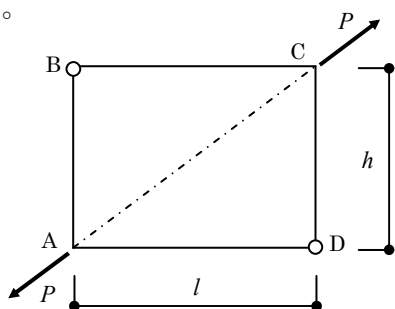


図 1

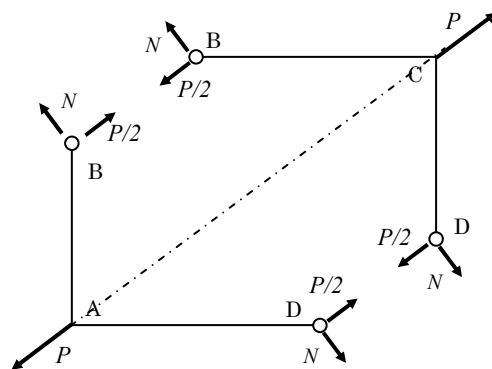
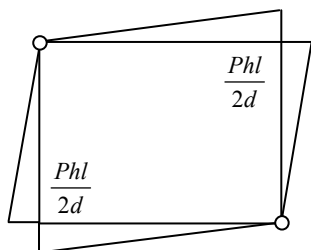
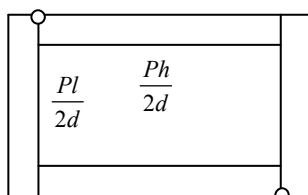
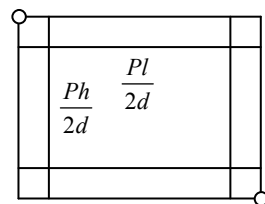


図 2

図 5  $M$ 図 6  $Q$ 図 7  $N$ 

(解) 図2のように B-D 線で対称形であるから、B-C-D 側と D-A-B 側の応力は等しい。A 点の荷重と B 点と D 点の反力が釣り合い、その反力の合力が C 点の外力  $P$  となっている。したがって、B 点と D 点の反力を対角線 A-C 方向とこれに直角な方向に分けると A-C 方向の分力は B 点と D 点共に  $P/2$  となる。次に応力  $N$  を考える。そのとき B 点と C 点で B-C-D 側と D-A-B 側の反力が釣り合っていないといけない。よって釣り合うためには  $N=0$  のときだけである。

$$M_{DA} = \frac{Ph}{2d} \times x \quad (1)$$

$$x=0 \text{ で } M_D = 0, \quad x=l \text{ で } M_A = \frac{Phl}{2d}$$

$$M_{BA} = \frac{Pl}{2d} \times x \quad (2)$$

$$x=0 \text{ で } M_B = 0, \quad x=l \text{ で } M_C = \frac{Phl}{2d}$$

$$\text{せん断力は } Q_{DA} = \frac{Ph}{2d}, \quad Q_{BA} = \frac{Pl}{2d} \text{ となり、軸方向力はせん断力を考慮して } N_{DA} = \frac{Pl}{2d}, \quad N_{BA} = \frac{Ph}{2d}$$

問 16 図 1 のようなラーメンの曲げモーメント、せん断力と軸方向力を求めよ。

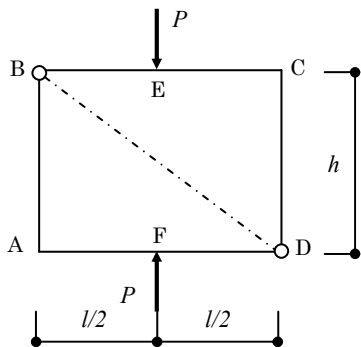


図 1

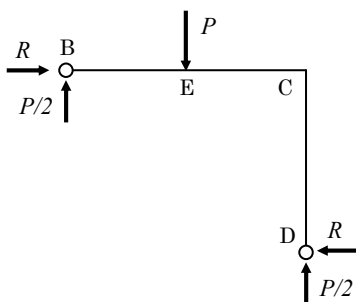


図 2

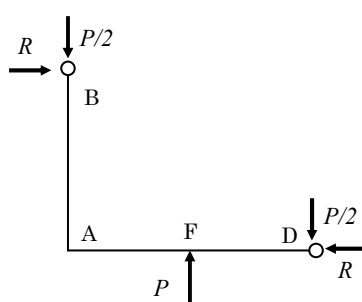
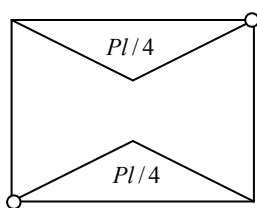
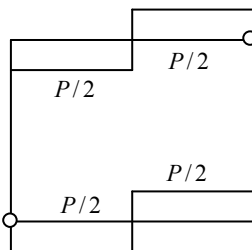
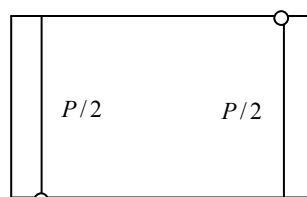


図 3

図 4  $M$ 図 5  $Q$ 図 6  $N$ 

(解) 図 2 のように B-D 線で対称形であるから、B-C-D 側と D-A-B 側の応力は等しい。E 点の荷重と B 点と D 点の反力が釣り合い、その反力の合力が F 点の外力  $P$  となっている。したがって、B 点と D 点の反力を図 2、図 3 のように分けると鉛直反力は B 点と D 点共に  $P/2$  となる。次に水平応力  $R$  を考える。そのとき B 点と D 点で B-C-D 側と D-A-B 側の反力が釣り合っていないなければならない。よって釣り合うためには  $R=0$  のときだけである。

$$M_{BC} = P(l-x)2 \quad (1)$$

$$x=0 \text{ で } M_{BC} = 0, \quad x=l/2 \text{ で } M_E = Pl/4$$

A-B 材と D-C 材の曲げモーメントは B 点、C 点の水平反力が零なので生じない。

せん断力は  $Q_{BC} = P/2$ 、 $Q_{AD} = P/2$  となり、軸方向力はせん断力を考慮して  $N_{AB} = P/2$ 、 $N_{AD} = P/2$

問 17 図 1 のような架構で、対角線 A-C に平行に外力  $P$  が作用するとき架構の応力を求めよ。

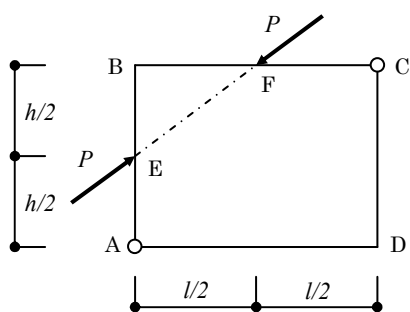


図 1

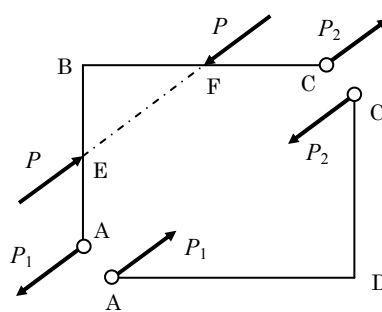


図 2

(解) 図 2 のように外力と反力が考えられる。A-C、E-F 方向で釣合いを考えると、図 3 に置換できる。そして左右対称だから x 点の曲げモーメントはゼロである。よって図 3 は図 4 のように考えてもよい。

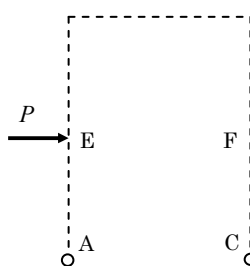


図 3

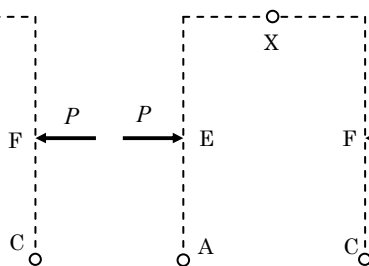


図 4

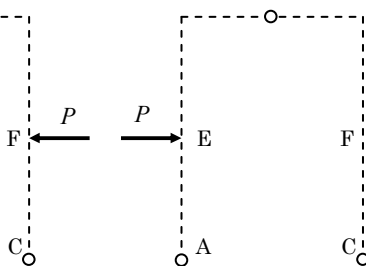


図 5

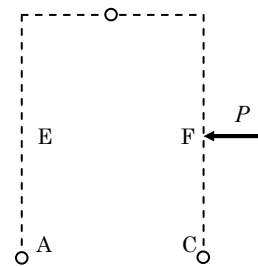


図 6

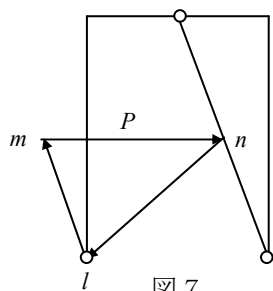


図 7

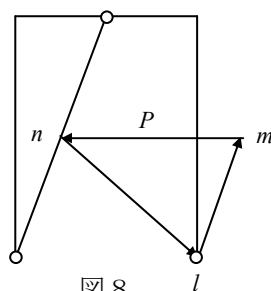


図 8

図 5 と図 6 を 3 ピン構造として図 7 と図 8 のように解く。両図とも、 $n-l$  と  $l-m$  の x 方向の成分の和は  $P$  となる。考えすぎか。もっと良い説明があるのでは。

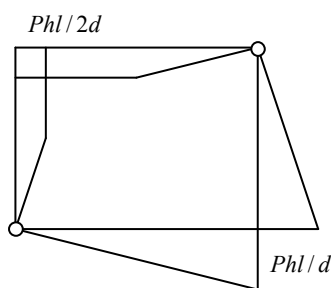


図 9 M

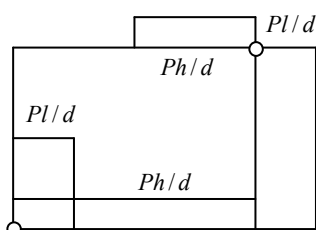


図 10 Q

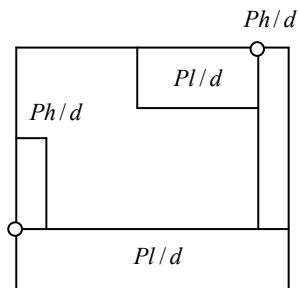


図 11 N