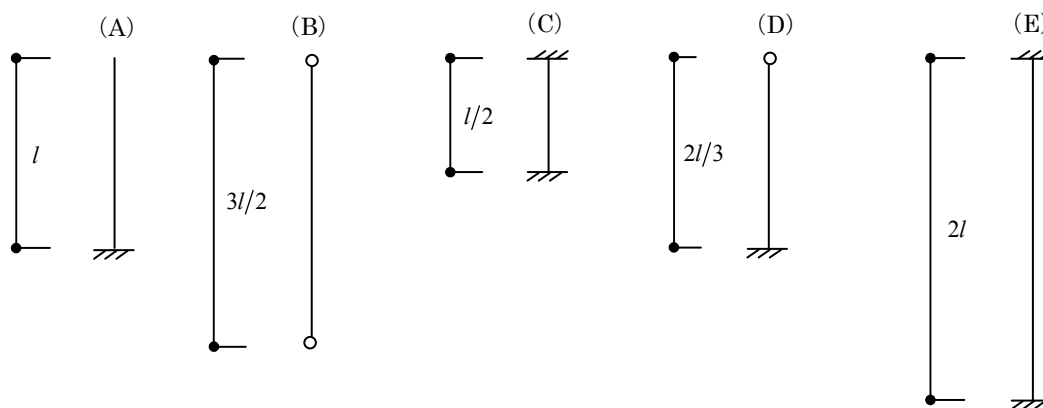


## 1 2 . 1 座屈

問 1 座屈荷重の大きい順番に並べよ。但し全ての部材断面は等しいとする。



両端ピンの座屈長さを基準にして、各柱の座屈長さを求めると

(A) の座屈長さは  $l_k = 2l$

(B) の座屈長さは  $l_k = 3l/2$

(C) の座屈長さは  $l_k = l/4$

(D) の座屈長さは  $l_k = 7l/15$

(E) の座屈長さは  $l_k = l$

となる。座屈荷重の大きさは座屈長さに反比例するから次のようになる。

(C) > (D) > (E) > (B) > (A)

問 2 図 1 の構造物で座屈荷重の大きい順に並べよ。部材は等質等断面とする。

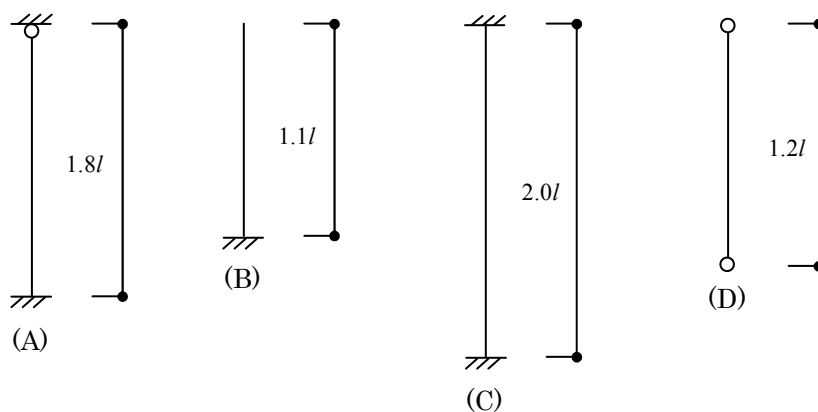


図 1

両端ピンの構造物を基準に座屈長さを求めると

(A) :  $l_k = 1.8l \times 0.7 = 1.26l$ 、(B) :  $l_k = 1.1l \times 2 = 2.2l$

(C) :  $l_k = 2l \times 0.5 = l$ 、(D) :  $l_k = 1.2l$

よって、(C) > (D) > (A) > (B)

問 3 図 1 のような両端固定の柱で座屈荷重  $P_k$  を求めよ。但し部材は均一断面とする。

(解)

部材は弱軸方向に座屈する。

$$\text{弱軸に関する断面 2 次モーメントは } I = \frac{2b \times b^3}{12} = \frac{b^4}{6}$$

$$\text{座屈長さは } l_k = \frac{4l}{2} = 2l$$

$$\text{座屈荷重は } P_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{\pi^2 E}{4l^2} \cdot \frac{b^4}{6} = \frac{\pi^2 E \cdot b^4}{24l^2}$$

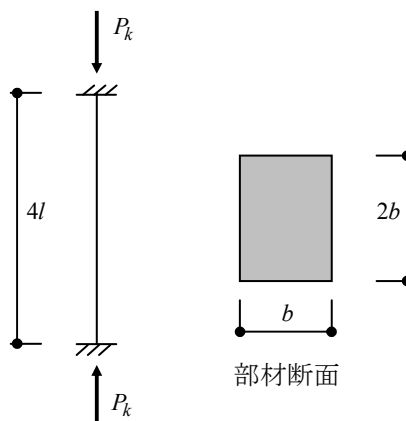


図 1

問 4 図 1 のような、一端ピン、多端固定の柱で座屈荷重  $P_k$  を求めよ。但し部材は均一断面とする。

円周率  $\pi$  とヤング係数  $E$  として計算せよ。

(解)

部材は弱軸について座屈する。

$$\text{弱軸に関する断面 2 次モーメントは } I = \frac{2b \times b^3}{12} = \frac{b^4}{6}$$

$$\text{座屈長さは } l_k = 3l \times \frac{7}{10} = \frac{21l}{10}$$

$$\text{座屈荷重は } P_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{100\pi^2 E}{441l^2} \cdot \frac{b^4}{6} = \frac{50\pi^2 E \cdot b^4}{1323l^2}$$

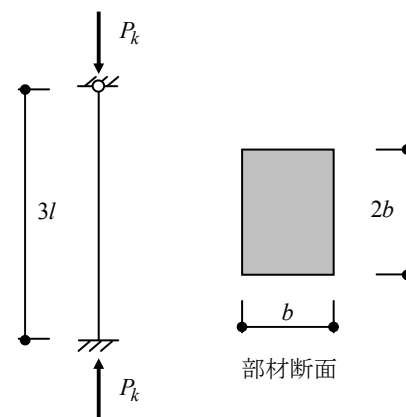


図 1

問 5 図 1 の、両端ピンの柱に  $P=8t$  が作用する。そのとき、最小正方形断面積を求めよ。

但し  $l=3m$ 、ヤング係数  $E=8 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$  とし座屈に関する安全率を 2 とする。

(解)

$$\text{両端ピンの座屈荷重は } P_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

$$\text{弱軸に関する断面 2 次モーメントは } I = \frac{a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

安全率が 2 であるから荷重  $8t$  が  $P_k/2$  以下になるようにすればよい。

$$a^4 = \frac{12l_k^2}{\pi^2 E} \cdot P_k = \frac{12 \times 300^2}{\pi^2 \times 8 \times 10^4} \times 16 \times 10^3 = \frac{21.6 \times 10^6}{\pi^2} \text{ cm}^4$$

$$\text{よって、} A = a^2 = \frac{\sqrt{21.6 \times 10^6}}{\pi} = 147.9 \text{ cm}^2, \quad a = 12.16 \text{ cm}$$

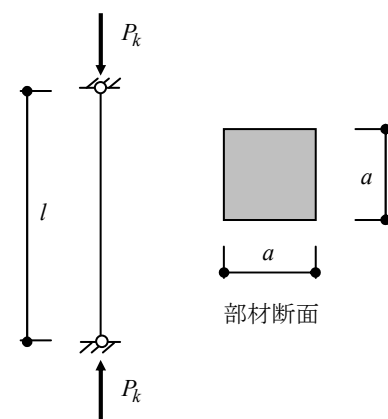


図 1

問6 図1の、両端ピンの柱に $P=8t$ が作用する。そのとき、最小円形断面積を求めよ。  
但し $l=3m$ 、ヤング係数 $E=8\times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ とし座屈に関する安全率を2とする。

(解)

$$\text{両端ピンの座屈荷重は } P_k = \frac{\pi^3 E a^4}{64 l^2}$$

$$\text{弱軸に関する断面2次モーメントは } I = \frac{a^4}{64}$$

安全率が2であるから荷重 $8t$ が $P_k/2$ 以下になるようにすればよい。

$$a^4 = \frac{64 l^2}{\pi^3 E} \cdot P_k = \frac{64 \times 9 \times 10^4}{\pi^2 \times 8 \times 10^4} \times 16 \times 10^3 = \frac{11.52 \times 10^5}{\pi^3} \text{ cm}^4$$

$$a^2 = 192.90 \text{ cm}^2$$

よって、 $A = \frac{\pi \times a^2}{4} = 151.43 \text{ cm}^2$ 、 $a = 13.89 \text{ cm}$  となり正方形よりも大きな断面を必要とする。

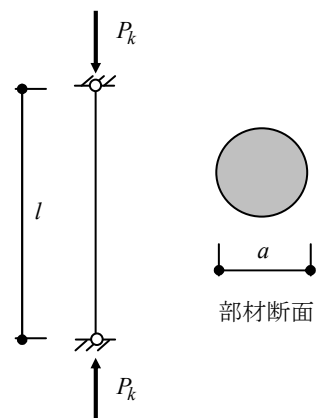


図1

問7 図のような支持条件及び断面形で同一材質からなる柱 A～C において、中心圧縮のオイラー座屈荷重の大小関係を求めよ。ただし、オイラー座屈荷重  $P_{cr}$  は、 $P_{cr} = \pi^2 EI / l_k^2$  で与えられる。ここで、 $E$  はヤング係数、 $I$  は座屈軸に関する断面 2 次モーメント、 $l_k$  は座屈長さを表すものとする。

(解) 座屈軸に対して断面 2 次モーメントは、弱軸に関する値をとる。

(A) 座屈長さは、 $l_k = l$

断面 2 次モーメントは、 $I = a \times a^3 / 12 = a^4 / 12$

$$P_{cr} = \pi^2 EI / l_k^2 = \frac{\pi^2 E}{l^2} \cdot \frac{a^4}{12} = \frac{\pi^2 E \cdot a^4}{12l^2} \text{ となる。}$$

(B) 座屈長さは、 $l_k = l/2$

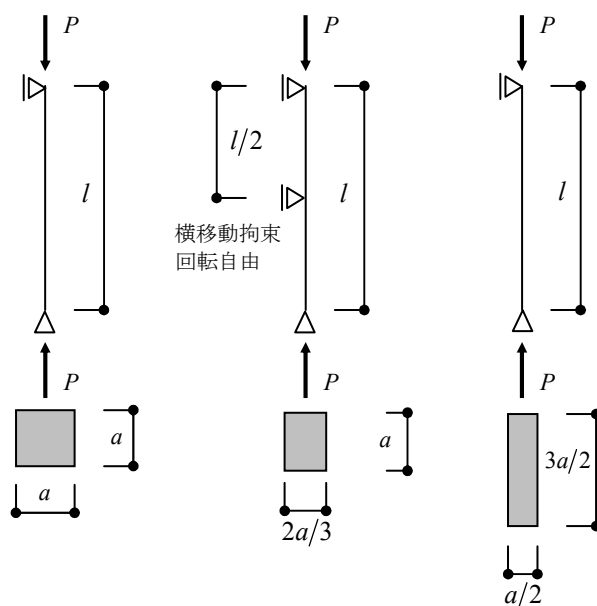
断面 2 次モーメントは、 $I = \frac{1}{12} \cdot a \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{27}\right) \frac{a^4}{12}$

$$P_{cr} = \frac{\frac{8\pi^2 E}{27} \cdot \frac{a^4}{12}}{(l/2)^2} = \frac{32}{27} \cdot \frac{\pi^2 E \cdot a^4}{12l^2} \text{ となる。}$$

(C) 座屈長さは、 $l_k = l$

断面 2 次モーメントは、 $I = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{3a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{3}{16} \cdot \frac{a^4}{12}$

$$P_{cr} = \frac{\frac{3\pi^2 E}{16} \cdot \frac{a^4}{12}}{l^2} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi^2 E \cdot a^4}{12l^2} \text{ となる。}$$



問8 図1で長さ  $l$  の柱が、自重によって座屈するとき、この柱の単位長さの重量  $w$  を求めよ。部材のヤング係数を  $E$ 、最小断面 2 次モーメントを  $I$  とする。

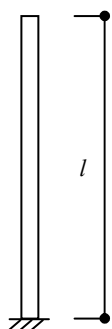


図1

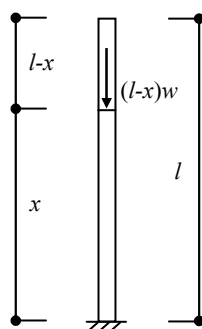


図2

(解) 固定端から  $x$  の距離にある任意の点  $x$  に作用する自重による荷重は  $(l-x) \cdot w$  で、その作用点は  $x + (l-x)/2 = (l+x)/2$  である。よって任意の長さ  $x$  に対する座屈荷重を求めるための座屈長さは

$(l+x)/2$  となる。一端固定他端自由の片持梁の座屈荷重は  $P_k = \frac{\pi^2 EI}{4l_k^2}$  である。

$$P_k = (l-x)w = \frac{\pi^2 EI}{4l_k^2} = \frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{l+x}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l+x)^2} \text{ から、 } w = \frac{\pi^2 EI}{(l+x)^2(l-x)}$$

$w$  が最小になる  $x$  を求めると、 $\frac{dw}{dx} = \frac{\pi^2 EI(3x-l)}{(l+x)(l^2-x^2)^2} = 0$  となり、 $x = \frac{l}{3}$  を得る。その値は

$$w = \frac{\pi^2 EI}{\left(l + \frac{l}{3}\right)\left(l^2 - \frac{l^2}{9}\right)} = \frac{27\pi^2 EI}{32l^3}$$

問9 図1で長さ  $l$  の柱が、単位長さ  $w$  の自重と外力  $P$  を受けているとき、この柱が座屈するときの最小の  $w$  を求めよ。部材のヤング係数を  $E$ 、最小断面2次モーメントを  $I$  とする。

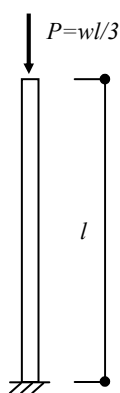


図 1

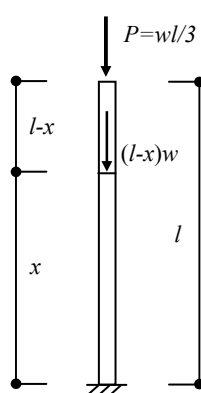


図 2

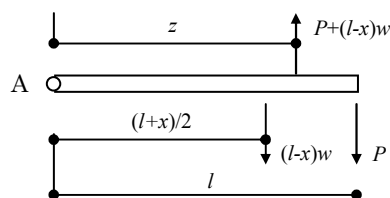


図 3

(解) 図3のように、固定端から  $z$  の距離にある任意の点  $z$  に作用する自重による荷重は  $P+(l-x)w$  で、その作用点は次のように考える。図3のように各作用力と作用点を考えて、あたかも A 点に関する曲

げモーメントの釣り合いによって  $z$  を求めればよい。 $\Sigma M_A = (l+x)w \times \frac{l+x}{2} + P \times l - \{P + (l-x)w\} \times z = 0$

から、座屈長さは  $z = \frac{(l+x)w \times \frac{l+x}{2} + Pl}{\{P + (l-x)w\}} = \frac{5l^2 - 3x^2}{2(4l - 3x)}$  となる。一端固定他端自由の片持梁の座屈荷重

は  $P_k = \frac{\pi^2 EI}{4l_k^2}$  である。 $P_k = P + (l-x)w = \left\{ \frac{4l}{3} - x \right\} w = \frac{\pi^2 EI}{4l_k^2} = \frac{\pi^2 EI}{4} \cdot \frac{4(4l-3x)^2}{(5l^2-3x^2)^2}$  となり

$$w = \frac{3(4l-3x)}{(5l^2-3x^2)^2} \cdot \pi^2 EI$$

$w$  が最小になる  $x$  を求めると、 $\frac{dw}{dx} = -9\pi^2 EI \cdot \frac{9x^2 - 16lx + 5l^2}{(5l^2 - 3x^2)^3} = 0$  となる。よって

$$9x^2 - 16lx + 5l^2 = 0, \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 45}}{9} \cdot l \cong 0.40l$$

$$w = \pi^2 EI \cdot \frac{3(4l-3x)}{(5l^2-3x^2)^2} = 0.41 \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^3}$$

問 10 ヤング係数  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  の棒鋼の圧縮応力度が  $2400 \text{ kg/cm}^2$  を超えないようにするため、座屈に対する最小有効細長比  $\lambda_k$  及び各支持条件の場合の  $\lambda$  を求めよ。安全率を 1.4 とする。

(解) 座屈応力度を  $\sigma_k$  とすると、安全率を 1.4 だから

$$\sigma_k = \frac{P_k}{1.4A} = \frac{\pi^2 E}{1.4} \cdot \left(\frac{i}{l_k}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{1.4\lambda_k^2} \text{ から、 } \lambda_k = \pi \sqrt{\frac{E}{1.4\sigma_k}} \text{ となる。}$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \sigma_k = 2400 \text{ kg/cm}^2 \text{ を代入すると、 } \lambda_k = \pi \sqrt{\frac{2.1 \times 10^6}{3360}} \approx 78.5 \text{ である。}$$

$$\sigma_k = \frac{P_k}{1.4A} = \frac{C\pi^2 E}{1.4} \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2 = \frac{C\pi^2 E}{1.4\lambda^2} \text{ だから、 } \lambda = \sqrt{C}\lambda_k$$

- ① 一端固定他端固定の場合は、 $C=1/4$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{1/4} \times 78.5 = 39.25$
- ② 両端回転端の場合は、 $C=1$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{1} \times 78.5 = 78.5$
- ③ 一端回転端他端固定の場合は、 $C=2$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{2} \times 78.5 = 111.0$
- ④ 両端固定の場合は、 $C=4$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{4} \times 78.5 = 157.0$

問 11 ヤング係数  $E = 8 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$  の木材の圧縮応力度が  $f = 160 \text{ kg/cm}^2$  を超えないようにするため、座屈に対する最小有効細長比  $\lambda_k$  及び各支持条件の場合の  $\lambda$  を求めよ。安全率を 2 とする。

(解) 座屈応力度を  $\sigma_k$  とすると、安全率を 2 だから

$$\sigma_k = \frac{P_k}{2A} = \frac{\pi^2 E}{2} \cdot \left(\frac{i}{l_k}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{2\lambda_k^2} \text{ から、 } \lambda_k = \pi \sqrt{\frac{E}{2\sigma_k}} \text{ となる。}$$

$$E = 8 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \sigma_k = 160 \text{ kg/cm}^2 \text{ を代入すると、 } \lambda_k = \pi \sqrt{\frac{8 \times 10^4}{2 \times 160}} \approx 49.7 \text{ である。また}$$

$\lambda = \sqrt{C}\lambda_k$  だから

- ① 一端固定他端固定の場合は、 $C=1/4$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{1/4} \times 49.7 = 24.9$
- ② 両端回転端の場合は、 $C=1$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{1} \times 49.7 = 49.7$
- ③ 一端回転端他端固定の場合は、 $C=2$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{2} \times 49.7 = 70.3$
- ④ 両端固定の場合は、 $C=4$  ゆえ、 $\lambda = \sqrt{C}\lambda_k = \sqrt{4} \times 49.7 = 99.4$

問 12 図 1 のような断面を持つ木製柱に  $20t$  の荷重が作用したとき、柱の座屈長さを両端の支持条件ごとに求めよ。  
但し  $E = 8 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$  とする。

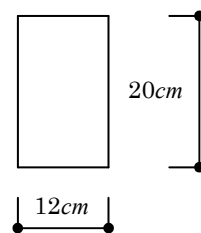


図 1

(解) 座屈荷重は、 $P_k = \frac{C\pi^2 EI}{l_k^2}$  から座屈長さは  $l_k^2 = \frac{C\pi^2 EI}{P_k}$

$$I = 20 \times 12^3 / 12 = 2880 \text{ cm}^4$$

① 一端固定他端固定の場合は、 $C=1/4$ 、 $l_k^2 = \frac{C\pi^2 EI}{P_k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \times 8 \times 10^4 \times 2880}{20 \times 1000} = 2.84 \times 10^4 \text{ cm}^2$

② 両端回転端の場合は、 $C=1$ 、 $l_k^2 = \frac{C\pi^2 EI}{P_k} = \frac{\pi^2 \times 8 \times 10^4 \times 2880}{20 \times 1000} = 11.36 \times 10^4 \text{ cm}^2$

③ 一端回転端他端固定の場合は、 $C=2$ 、 $l_k^2 = \frac{C\pi^2 EI}{P_k} = \frac{2 \times \pi^2 \times 8 \times 10^4 \times 2880}{20 \times 1000} = 22.72 \times 10^4 \text{ cm}^2$

④ 両端固定の場合は、 $C=4$ 、 $l_k^2 = \frac{C\pi^2 EI}{P_k} = \frac{4 \times \pi^2 \times 8 \times 10^4 \times 2880}{20 \times 1000} = 45.44 \times 10^4 \text{ cm}^2$

問 13 図 1 のトラス構造で筋かい B・D 材に座屈が生じるときの  $P$  を求めよ。

(解) C・D 材と B・C 材の応力はゼロである。

B・D 材は暗算で  $N_{BD} = -\sqrt{2}P$  (圧縮) である。

部材断面の弱軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{6 \times 4^3}{12} \text{ が分かれば後は簡単。}$$

両端ピンの座屈荷重は  $P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  となる。

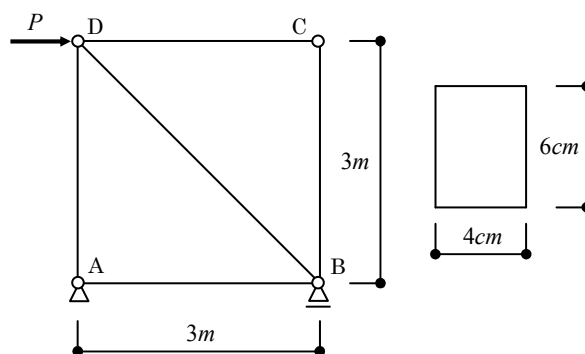


図 1

問 14 図 1 に示すように断面が異なる A・B、B・C 材の柱がある。自由端 A に軸力  $P$  が作用するとき座屈荷重を求めよ。ヤング係数は両部材共  $E$ 、最小断面 2 次モーメントは  $I_1$ 、 $I_2$  とする。

(解) 座屈荷重  $P_k$  で座屈したときの A 点の撓みを  $a$  とする。

C 点を原点として図 2 のように座標をとると任意の点  $x$  の曲げモーメントは次式のようになる。

$$M_x = -P(a - y)$$

$l \leq x \leq 2l$  のとき

$$EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = P(a - y) \quad (1)$$

$0 \leq x \leq l$  のとき

$$EI_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = P(a - y) \quad (2)$$

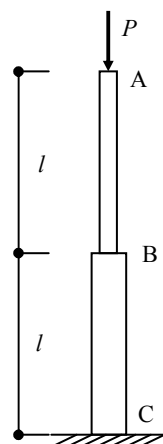


図 1

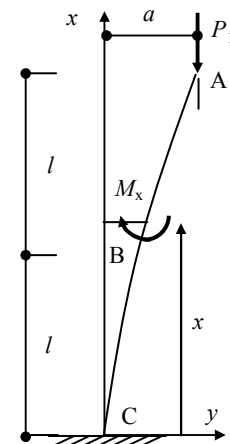


図 2

(1)式、(2)式で  $\frac{P}{EI_1} = k_1^2$ 、 $\frac{P}{EI_2} = k_2^2$  とおくと

$$y'' + k_1^2 y = k_1^2 a \quad (3)$$

$$y'' + k_2^2 y = k_2^2 a \quad (4)$$

(3)、(4)式を解くと A・B 間と B・C 間では次式となる。

$$y_1 = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x + a \quad (5)$$

$$y'_1 = k_1 (A \cos k_1 x - B \sin k_1 x) \quad (6)$$

$$y_2 = C \sin k_2 x + D \cos k_2 x + a \quad (7)$$

$$y'_2 = k_2 (C \cos k_2 x - D \sin k_2 x) \quad (8)$$

境界条件により、C 点において  $x=0$  で(7)式で  $y_2=0$ 、(8)式で  $y'_2=0$  である。よって

$D=-a$ 、 $C=0$  を得る。よって(7)式(8)式は次式となる。

$$y_2 = -a \cos k_2 x + a \quad (9)$$

$$y'_2 = ak_2 \sin k_2 x \quad (10)$$

B 点の連続条件から  $x=l$ 、で  $y_1=y_2$ 、 $y'_1=y'_2$  だから(5)式(9)式、(6)式(10)式から

$$A \sin k_1 l + B \cos k_1 l = -a \cos k_2 l \quad (11)$$

$$A \cos k_1 l - B \sin k_1 l = \frac{k_2}{k_1} a \sin k_2 l \quad (12)$$

(11)、(12)式から A、B を求めると

$$A = a \frac{\frac{k_2}{k_1} \sin k_2 l - \cos k_2 l \sin k_1 l}{\cos^2 k_1 l + \sin^2 k_1 l} = a \left( \frac{k_2}{k_1} \sin k_2 l \cos k_1 l - \cos k_2 l \sin k_1 l \right) \quad (13)$$

$$B = -a \left( \cos k_1 l \cos k_2 l + \sin k_1 l \cdot \frac{k_2}{k_1} \sin k_2 l \right) \quad (14)$$

(13)式と(14)式を(5)式に代入すると

$$y_1 = a \left\{ \left( \frac{k_2}{k_1} \cos k_1 l \sin k_2 l - \sin k_1 l \cos k_2 l \right) \sin k_1 x - \left( \frac{k_2}{k_1} \sin k_1 l \sin k_2 l + \cos k_1 l \cos k_2 l \right) \cos k_1 x + 1 \right\} \quad (15)$$



この式で、 $x=2l$  すなわち A 点の変位は  $y_1=a$  だから(15)式に代入すると

$$\left( \frac{k_2}{k_1} \cos k_1 l \sin k_2 l - \sin k_1 l \cos k_2 l \right) \sin 2k_1 l = \left( \frac{k_2}{k_1} \sin k_1 l \sin k_2 l + \cos k_1 l \cos k_2 l \right) \cos 2k_1 l$$

そして、 $k_1 l = \alpha$ 、 $k_2 l = \beta$  とおくと上式は

$$\begin{aligned} & 2 \frac{k_2}{k_1} \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta \\ &= \frac{k_2}{k_1} \sin \alpha \sin \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \beta - \frac{k_2}{k_1} \sin^3 \alpha \sin \beta - \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

で、整理すると

$$\frac{k_2}{k_1} \sin \alpha \sin \beta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos \alpha \cos \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \quad \frac{k_2}{k_1} \sin k_1 l \sin k_2 l = \cos k_1 l \cos k_2 l \quad \text{となり、}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \tan k_1 l \tan k_2 l \quad (16)$$

$\frac{k_1}{k_2} = \gamma$  とおくと、 $k_1 = \gamma \cdot k_2$  で次式を得る。

$$\gamma = \tan \gamma \cdot k_2 l \tan k_2 l \quad (17)$$

A・B、B・C 材の断面が与えられれば  $\gamma = \frac{k_1}{k_2}$  は定数となる。(17)式を満足する  $k_2 \cdot l$  の値は前問のように

図解法で求められる。 $k_2 \cdot l$  が決まれば  $P_k = \omega \frac{EI_2}{l^2}$  ただし、 $\omega = (k_2 l)^2$  より座屈荷重を得る。