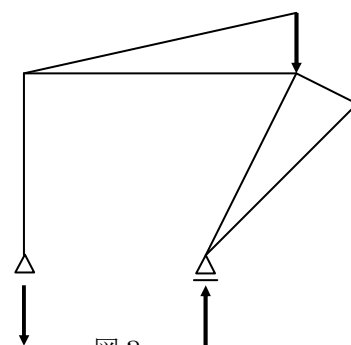
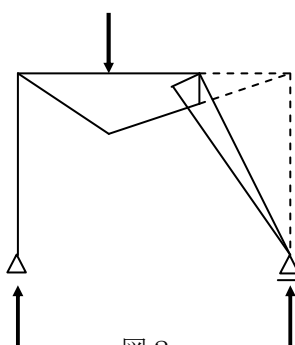
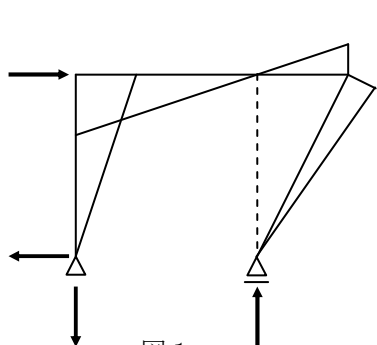
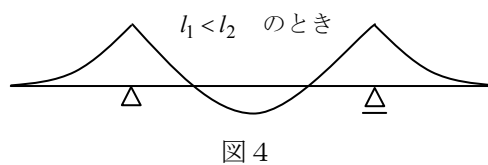
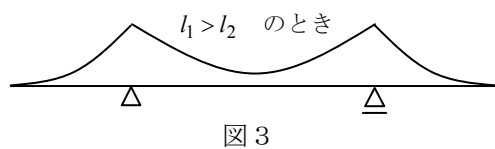
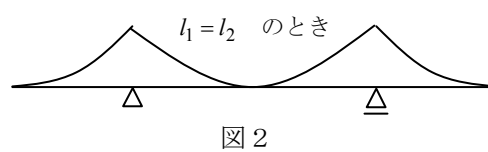
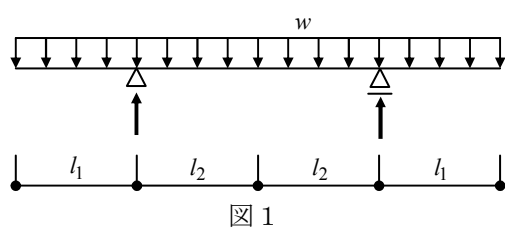


## 1. 1 静定曲げモーメント

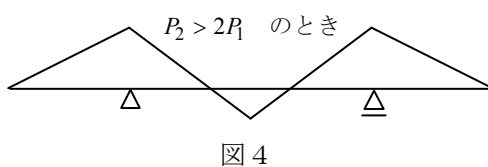
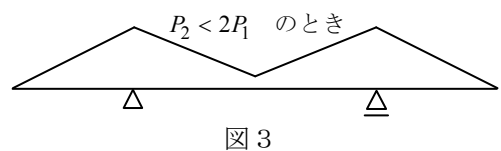
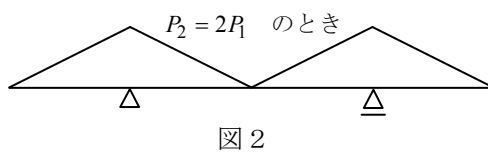
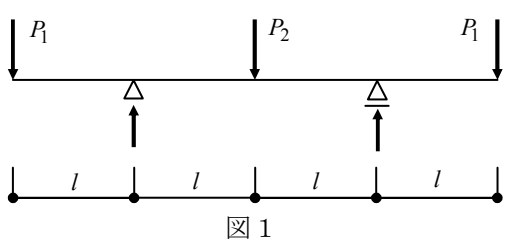
問1 曲げモーメント図を描け。



問2 曲げモーメント図を描け。



問3 曲げモーメント図を描け。



問4 図1のような梁で曲げモーメント図とせん断力図を描け。

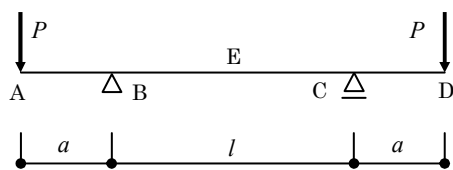


図1

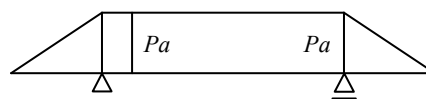


図2

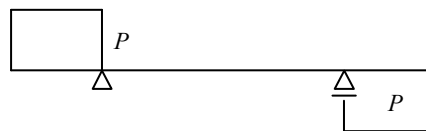


図3

(解) B点とC点の鉛直反力は等しく上向きに、 $R_B=R_C=P$ となる。

問5 図1の梁に曲げモーメントが生じている。そのとき、荷重、せん断力、軸方向力を求めよ。

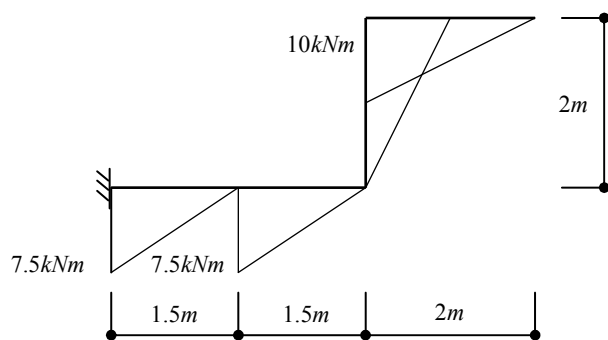


図1

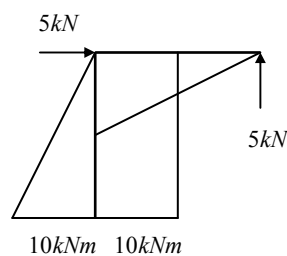


図2

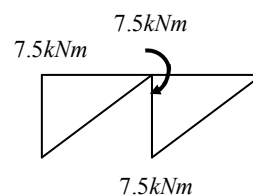


図3

(解)

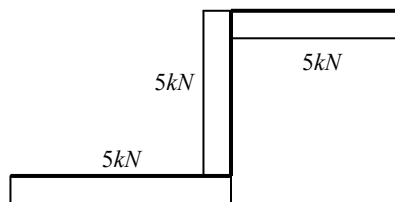


図4 Q

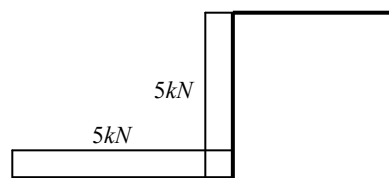


図5 N

問6 図1の梁で曲げモーメント図とせん断力図を描け。

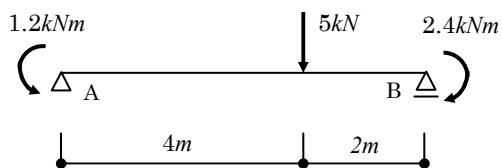


図1

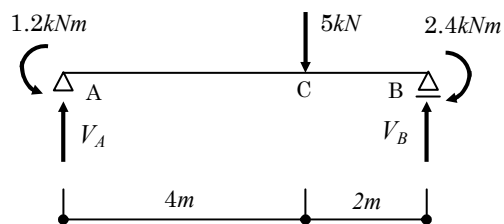


図2

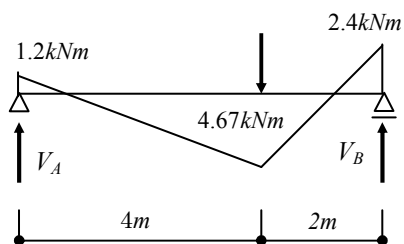


図3 M図

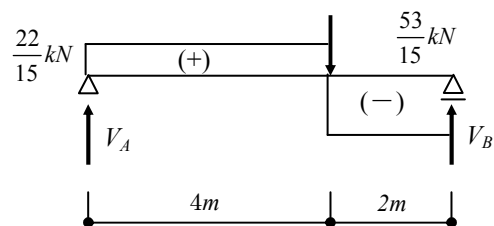


図4 せん断力図

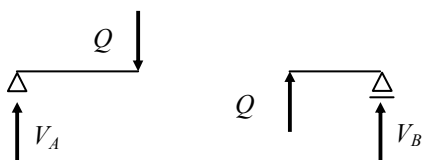


図5 せん断力の正負

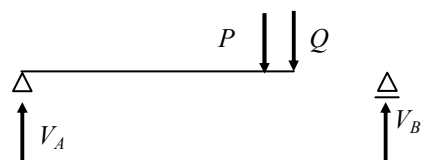


図6 せん断力の正負

(解) 図2のように反力を仮定すると、

$$\Sigma M_A = -1.2 \text{ kNm} + 5 \text{ kN} \times 4 \text{ m} + 2.4 \text{ kNm} = 0, \quad \Sigma Y = V_A + V_B - 5 \text{ kN} = 0 \text{ から、}$$

$$V_A = \frac{22}{15} \text{ kN}, \quad V_B = \frac{53}{15} \text{ kN}$$

図2から、A点の曲げモーメントは、 $M_A = -1.2 \text{ kNm}$ である。

$$\text{C点は、} M_C = -1.2 \text{ kNm} + \frac{22}{15} \text{ kN} \times 4 \text{ m} = 4.67 \text{ kNm}$$

問7 図1のような梁で A・B 間の最大曲げモーメント B 点のそれと絶対値が等しくなるような  $l$ ;  $a$  の比を求めよ。

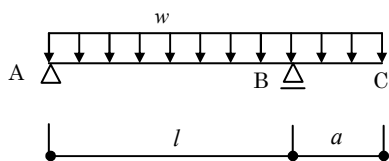


図 1

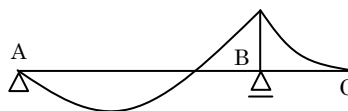


図 2

(解) A 点の反力を上向きに  $R_A$  とする。

$$\Sigma M_B = R_A \times l - wl \times \frac{l}{2} + wa \times \frac{a}{2} = 0 \text{ から、 } R_A = \frac{w}{2l}(l^2 - a^2) \quad (1)$$

$$\text{となる。A・B 間の任意の点 } x \text{ の曲げモーメントは、 } M_x = \frac{w}{2l}(l^2 - a^2)x - \frac{w}{2}x^2 \quad (2)$$

$$\text{B 点の曲げモーメントは、 } x=l \text{ で } M_l = \frac{w}{2l}(l^2 - a^2) \cdot l - \frac{w}{2}l^2 = -\frac{w}{2}a^2 \quad (3)$$

A・B 間の最大曲げモーメントは、  $\frac{dM_x}{dx} = \frac{w}{2l}(l^2 - a^2) - wx = 0$  を満たす  $x$  である。ゆえに

$$x = \frac{l^2 - a^2}{2l} \quad (4)$$

$$\text{よって、 } M_x = \frac{w}{4l^2}(l^2 - a^2)^2 - \frac{w}{8l^2}(l^2 - a^2)^2 = \frac{w}{8l^2}(l^2 - a^2)^2 \quad (5)$$

を得て、  $\frac{w}{2}a^2 = \frac{w}{8l^2}(l^2 - a^2)^2$  から、  $l^4 - 6l^2a^2 + a^4 = 0$  となり、これを解くと

$$\frac{l^2}{a^2} = 3 \pm \sqrt{9 - 1} = 3 \pm 2\sqrt{2} \cong 5.83 \text{ より、 } \frac{l}{a} = 2.41$$

問8 図1のような梁でB点とD点の最大曲げモーメントの絶対値が等しくなるような $l:a$ の比を求めよ。

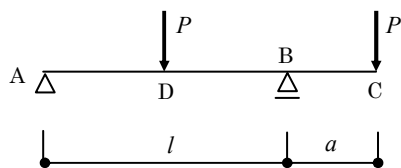


図1

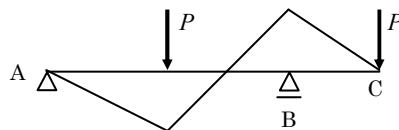


図2

(解) A点の反力を上向きに $R_A$ とすると、B点に関する曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_B = R_A \times l - P \times \frac{l}{2} + P \times a = 0 \text{ から、 } R_A = \frac{P}{l} \left( \frac{l}{2} - a \right) \quad (1)$$

$$\text{D点の曲げモーメントは、 } M_D = R_A \times \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - a \right) \quad (3)$$

$$\text{B点の曲げモーメントは、 } M_B = -Pa \quad (4)$$

よって、 $\frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - a \right) = |Pa|$ となる。

$$\frac{l}{4} = \frac{3a}{2} \text{ または } \frac{l}{4} = -\frac{a}{2} \text{ だから、 } l:a = 6:1$$

問9 図1のような梁に等分布荷重が作用している。B点、C点と梁中央のE点の曲げモーメントが等しくなるように、 $l:a$ を求めよ。

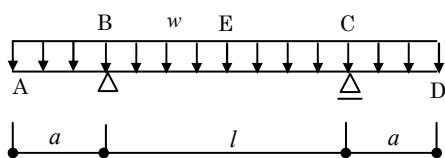


図1

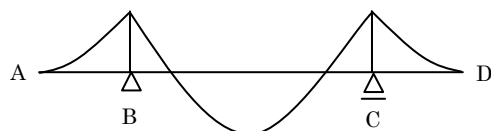


図2

(解) 対称梁だから、B点、C点の反力は、 $R_B = R_C = \frac{l+2a}{2}w$ である。B点の曲げモーメントは

$$M_B = -wa \times \frac{a}{2} = -\frac{wa^2}{2}$$

B点から任意の点 $x$ の距離の曲げモーメントは、図3から

$$M_x = -wa \times \left( x + \frac{a}{2} \right) + \left( \frac{l+2a}{2}w \right) \times x - wx \times \frac{x}{2} = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wlx}{2} - \frac{wa^2}{2}$$

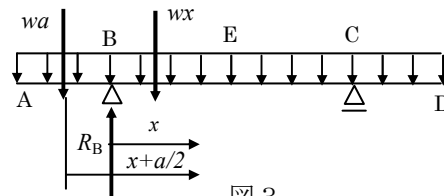


図3

となり梁中央のE点では $x = \frac{l}{2}$ を代入して、 $M_E = -\frac{wl^2}{8} + \frac{wl^2}{4} - \frac{wa^2}{2} = \frac{wl^2}{8} - \frac{wa^2}{2}$ を得る。

$$|M_B| = |M_E| \text{ だから、 } \left| \frac{wl^2}{8} - \frac{wa^2}{2} \right| = \frac{wa^2}{2}$$

ゆえに、 $\frac{l^2}{4} - a^2 = \pm a^2$ から、 $\frac{l^2}{4} = 2a^2$ となり、 $l:a = 2\sqrt{2}:1$

問 10 図 1 のような荷重を受ける骨組の固定端 A 点に、曲げモーメントが生じない場合の荷重  $P$  と荷重  $Q$  との比を求めよ。

(解)

荷重  $P$  による A 点の曲げモーメントは  $M_A = P \times 5l = 5Pl$

荷重  $Q$  による A 点の曲げモーメントは  $M_A = Q \times 3l = 3Ql$

よって A 点の曲げモーメントは  $M_A = 5Pl - 3Ql = 0$ 、 $P:Q = 3:5$

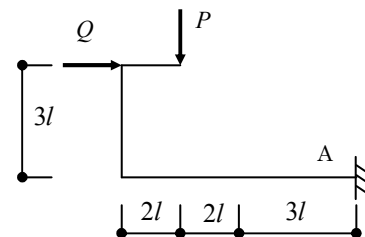


図 1

問 11 図 1 に示すラーメンで A 点と B 点の鉛直反力を求めよ。但し、反力は上向きを (+)、下向きを (-) とする。

(解) A 点の曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_A = 6kN \times 3m - 3kN \times 10m - V_B \times 6m = 0 \text{ となり}$$

$$V_B = 2kN$$

Y 方向の釣り合いから、 $\Sigma Y = V_A + V_B - 6kN = 0$  となり

$$V_A = 8kN$$

問題の注意点は、図 1 のように反力は図示されていない。

よって、鉛直方向だけ求めよという設問に、反力  $H_A$  を見落として、X 点の曲げモーメントの釣り合い式により解を得る恐れがある。 $\Sigma M_X = V_A \times 6m - 6kN \times 3m = 0$  (誤った解答例)

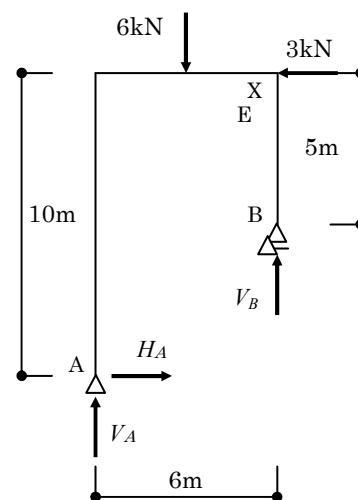


図 1

問 12 図 1 示す 3 ピンラーメンの A 点と B 点の反力を求めて、曲げモーメント図を描け。

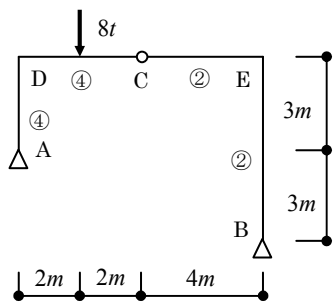


図 1

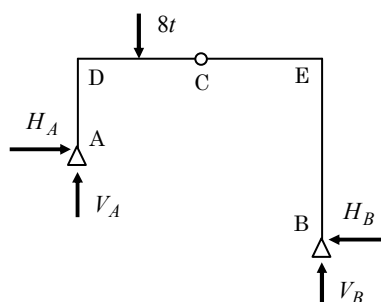


図 2 反力の仮定

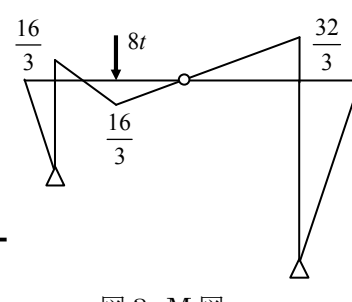


図 3 M 図

(解) C・B 側の架構で C 点について曲げモーメントの釣り合いを考えると

$\Sigma M_C = H_B \times 6m - V_B \times 4m = 0$  である。全体を自由体としたときの、A 点に関する曲げモーメントの釣り合いは、 $\Sigma M_A = H_B \times 3m - V_B \times 8m + 8t \times 2m = 0$  となる。同様に X 方向と Y 方向の釣り合いは

$$\Sigma X = H_A - H_B = 0, \quad \Sigma Y = V_A + V_B - 8t = 0$$

よって  $V_A = 16/3t$ 、 $V_B = 8/3t$ 、 $H_A = H_B = 16/9t$ 、 $M_D = 16/3tm$ 、 $M_E = 32/3tm$

問 13 図 1 示す 3 ピンラーメンの A 点と B 点の反力を求めて、曲げモーメント図を描け。

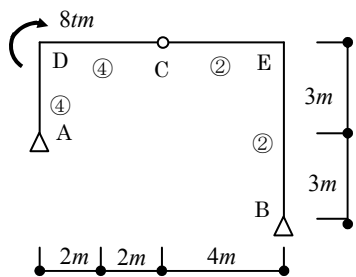


図 1

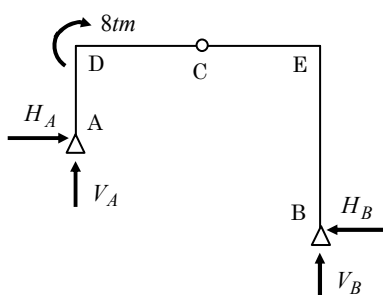


図 2 反力の仮定

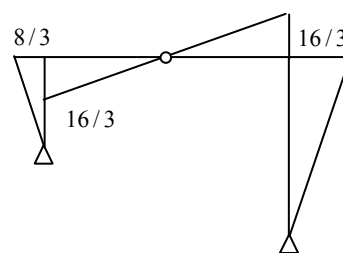


図 3 M 図

(解) C-B 側の架構で C 点について曲げモーメントの釣り合いを考えると

$\Sigma M_C = H_B \times 6m - V_B \times 4m = 0$  である。全体を自由体としたときの、A 点に関する曲げモーメントの釣り合いは、 $\Sigma M_A = H_B \times 3m - V_B \times 8m + 8tm = 0$  となる。同様に X 方向と Y 方向の釣り合いは

$$\Sigma X = H_A - H_B = 0, \quad \Sigma Y = V_A + V_B = 0$$

よって  $V_A = -12/9t$ 、 $V_B = 12/9t$ 、 $H_A = H_B = 8/9t$ 、 $M_D = 8/3tm$ 、 $M_E = 16/3tm$

問 14 図 1 示す 3 ピンラーメンの A 点と B 点の反力を求めて、曲げモーメント図を描け。

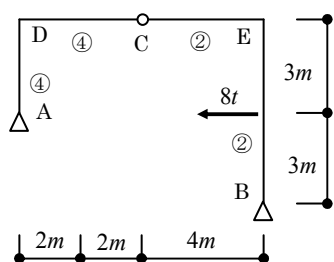


図 1

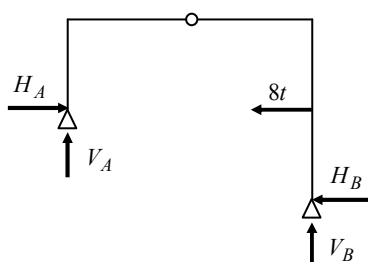


図 2 反力の仮定

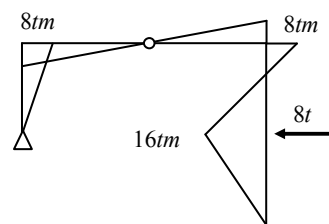


図 3 M 図

(解) A-C 架構側で C 点についての曲げモーメントの釣り合いを考えると

$\Sigma M_C = -H_A \times 3m + V_A \times 4m = 0$  である。全体を自由体としたときの、A 点に関する曲げモーメントの釣り合いは、 $\Sigma M_A = H_B \times 3m - V_B \times 8m = 0$  となる。同様に X 方向と Y 方向の釣り合いは

$$\Sigma X = H_A - H_B - 8t = 0, \quad \Sigma Y = V_A + V_B = 0$$

よって  $V_A = +2t$ 、 $V_B = -2t$ 、 $H_A = +8/3t$ 、 $H_B = -16/3t$

$$M_D = H_A \times 3m = 8tm, \quad M_E = V_A \times 8m - H_A \times 3m = 8tm$$

問 15 図 1 の 3 ピンラーメンで反力を求めよ。

(解) 図 1 のように反力を仮定する。X 方向と Y 方向の釣り合いは次式となる。

$$H_A + H_E + 2P = 0 \quad (1)$$

$$V_A + V_E = 0 \quad (2)$$

左側架構の C 点に関する曲げモーメントの釣り合いは

$$\Sigma M_C = -H_A \times 6l + V_A \times 2l = 0 \text{ から}$$

$$V_A = 3H_A \quad (3)$$

右側架構の C 点に関する曲げモーメントの釣り合いは

$$\Sigma M_C = -V_E \times 6l - H_E \times 6l = 0 \text{ から}$$

$$V_E = -H_E \quad (4)$$

(3)、(4)式を(2)式に代入

$$H_E = 3H_A \quad (5)$$

(1)、(5)式から  $H_A = -P/2$ 、 $H_E = -3P/2$ 、 $V_A = -3P/2$ 、 $V_E = +3P/2$

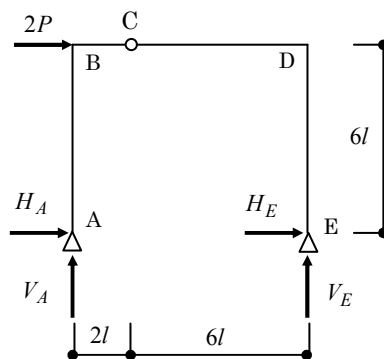


図 1

問 16 図 1 の 3 ピンラーメンで反力を求めて曲げモーメント図を描け。

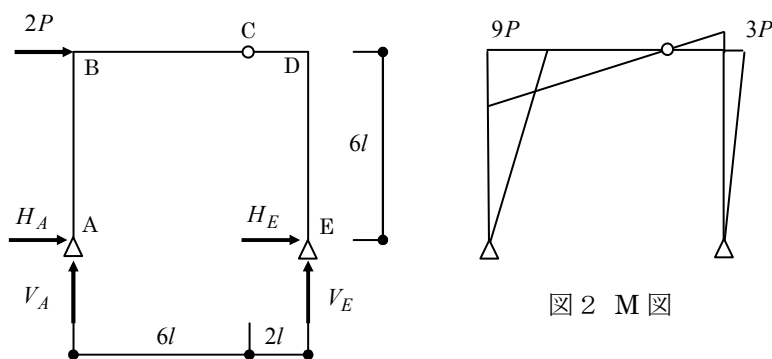


図 2 M 図

(解) ラーメン全体を自由体として、釣り合い式を求めると

$\Sigma X = 2P + H_A + H_E = 0$ 、 $\Sigma Y = V_A + V_E = 0$ 、 $\Sigma M_A = 2P \times 6l - V_E \times 8l = 0$  である。左側架構の C 点に関する曲げモーメントは零だから  $\Sigma M_C = V_A \times 6l - H_A \times 6l = 0$  となる。よって、

$$H_A = -3P/2, H_E = -P/2, V_A = -3P/2, V_E = +3P/2$$



問 17 図 1 のような荷重  $P=4t$  と  $m=6tm$  を受ける静定ラーメンで反力  $V_A$ 、 $V_B$ 、 $H_B$  を求めよ。

(解)  $x$  方向の釣り合いから、 $\Sigma X = H_A = 0$ 、 $H_A = 0$

$y$  方向の釣り合いから、 $\Sigma Y = V_A + V_B - 4 = 0$

A 点に関する曲げモーメントの釣り合いから

$\Sigma M_A = 4 \times 4l + 6 - V_B \times 8l = 0$  となり、

$V_B = 2 + \frac{3}{4l}$ 、 $V_A = 2 - \frac{3}{4l}$  が得られる。

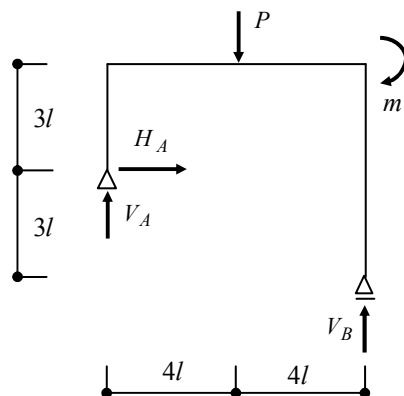


図 1

問 18 図 1 のような荷重  $P$  を受けるラーメンで反力  $V_A$ 、 $V_B$ 、 $H_A$  を求めよ。

(解)  $x$  方向の釣り合いから、 $\Sigma X = H_A - P = 0$ 、 $H_A = P$

$y$  方向の釣り合いから、 $\Sigma Y = V_A + V_B - 2P = 0$

A 点に関する曲げモーメントの釣り合いから

$\Sigma M_A = 2P \times 4l - P \times 3l - V_B \times 8l = 0$  となり

$V_B = 5P/8$ 、 $V_A = 11P/8$  が得られる。

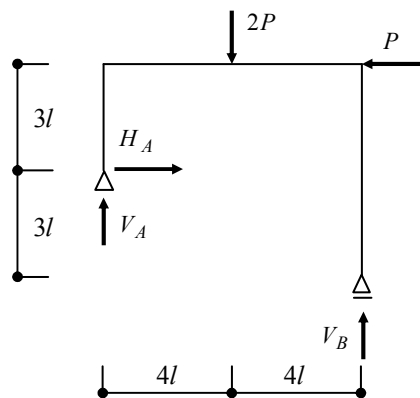


図 1

問 19 図 1 の構造物の曲げモーメント図、せん断力図と軸方向力図を描け。

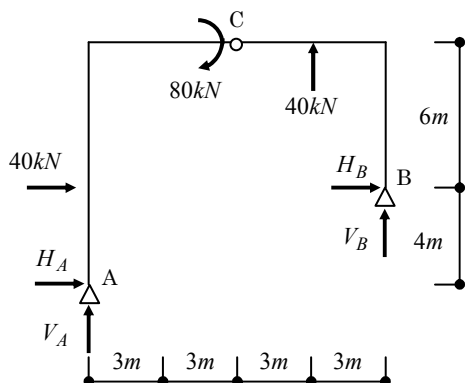


図 1

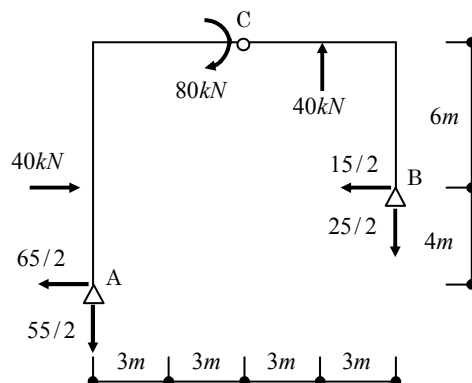


図 2

(解)

$$\Sigma X = H_A + H_B + 40kN = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = V_A + V_B + 40kN = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 40kN \times 4m + 80kNm - 40kN \times 9m + H_B \times 4m - V_B \times 12m = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_B = V_A \times 12m - H_A \times 4m + 80kNm + 40kN \times 3m = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_C = V_A \times 6m - H_A \times 10m - 40kN \times 6m + 80kN = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma M_C = -V_B \times 6m - H_B \times 6m - 40kN \times 3m = 0 \quad (6)$$

未知数は 4 個だから(1)式～(6)式のうち 4 個を採用して解けばよい。(1)、(2)、(3)、(6)式により解くと

$V_A = -55/2kN$ 、 $V_B = -25/2kN$ 、 $H_A = -65/2kN$ 、 $H_B = -15/2kN$  となる。この解を(4)、(5)式に代入しても成立することが分かる。(確認せよ)

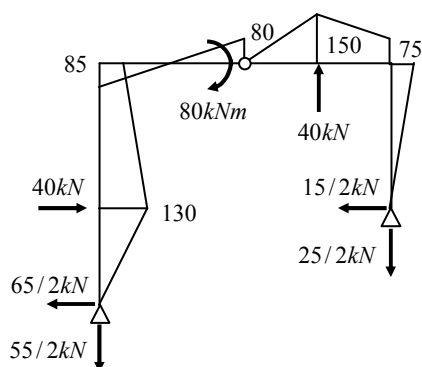


図 3 M 図

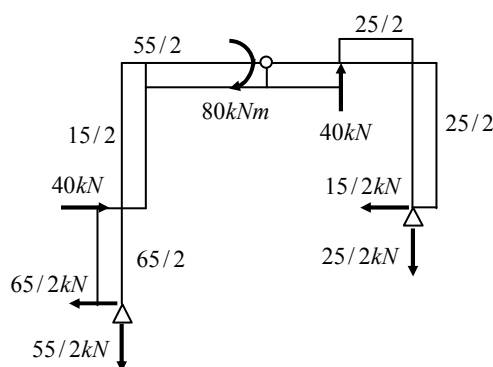


図 4 Q 図

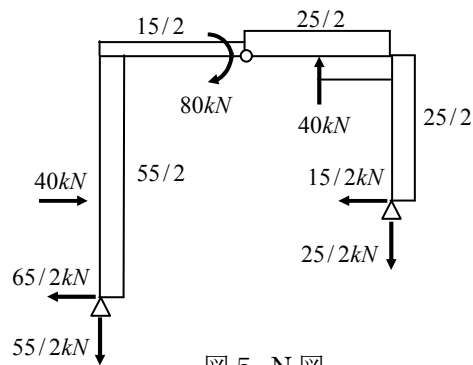


図 5 N 図

問 20 図 1 のようなラーメンで曲げモーメント図、せん断力図、軸方向力図を図示せよ。

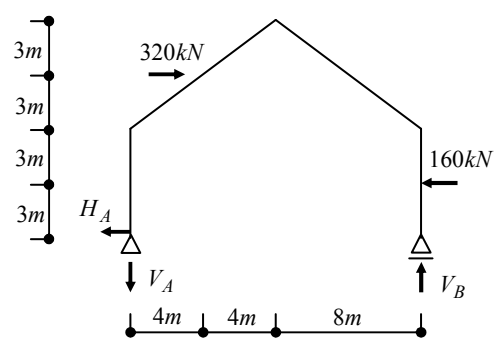


図 1

(解)

$\Sigma X = 320kN - 160kN - H_A = 0$ 、 $\Sigma Y = -V_A + V_B = 0$ 、 $\Sigma M_A = 320 \times 9 - 160 \times 3 - V_B \times 16 = 0$  が得られ、これらを解くと、 $V_A = 150kN$ 、 $V_B = 150kN$ 、 $M_A = 160kN$

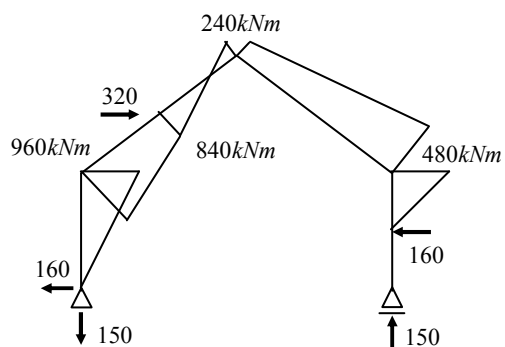


図 2 M 図

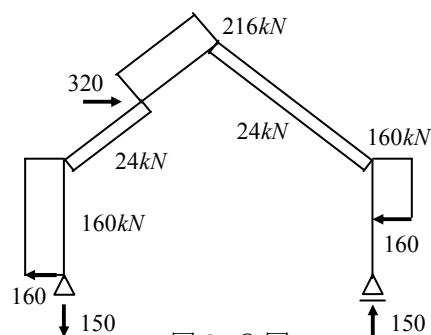


図 3 Q 図

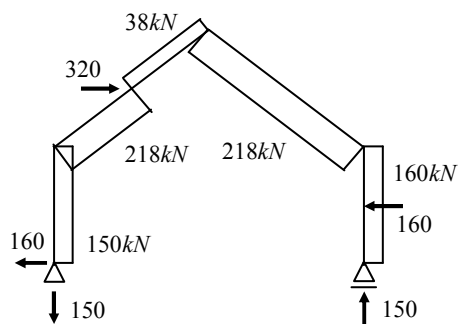


図 4 N 図

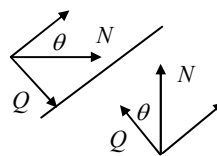


図 5

問 21 図 1 のラーメンで曲げモーメント図、せん断力図、軸方向力図を求めよ。

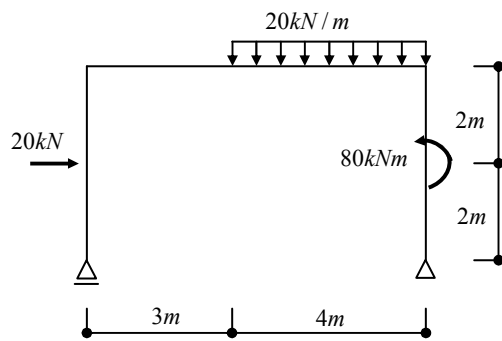


図 1

(解)  $\Sigma X = 20kN - H_B = 0$  から、 $H_B = 20kN$ 。 $\Sigma Y = V_A + V_B - 20kN/m \times 4m = 0$   
 $\Sigma M_A = 20kN \times 2m + 80kNm \times 5m - 80kNm - V_B \times 7m = 360kNm - 7V_B = 0$  から  
 $V_A = 200/7kN$ 、 $V_B = 360/7kN$

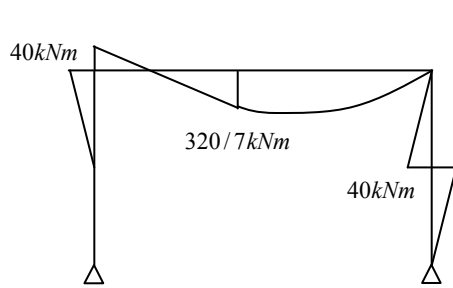


図 2 M 図

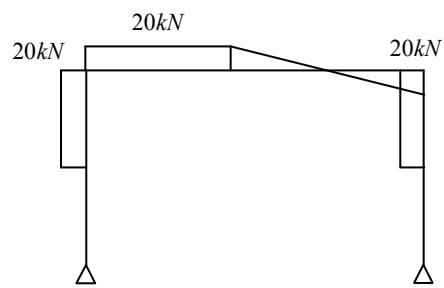


図 3 Q 図

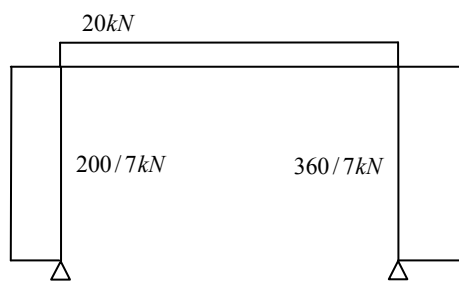
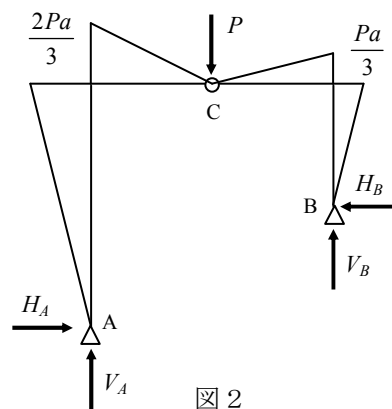
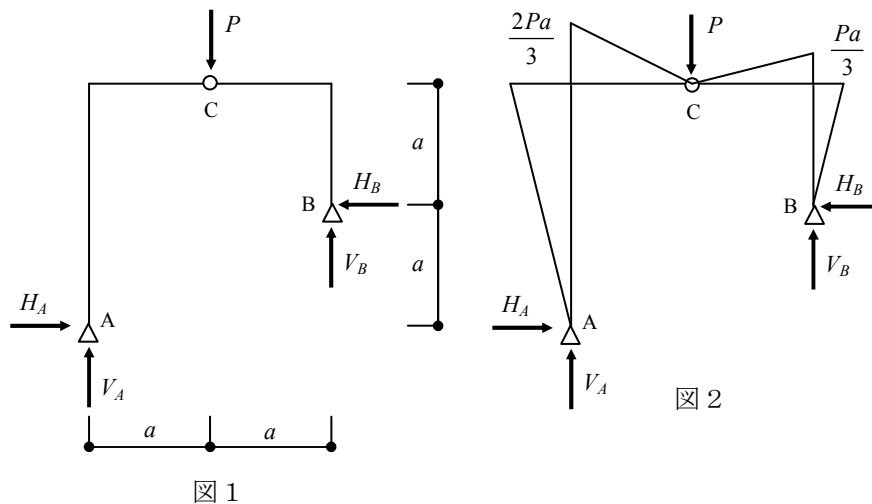


図 4 N 図

問 22 図 1 のような静定 3 ヒンジラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



(解) 鉛直反力は上向きである。よって、C 点の曲げモーメントの釣り合いから、 $H_A$  と  $H_B$  は図 2 のように内向きになる。右側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_C = H_B \times a - V_B \times a = 0。$$

左側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_C = -H_A \times 2a + V_A \times a = 0$ 。

X 方向、Y 方向の釣り合いから  $\Sigma X = H_A - H_B = 0$ 、 $\Sigma Y = V_A + V_B - P = 0$  となる。

$$H_B = V_B, \quad V_A = 2H_A, \quad H_A = H_B, \quad \text{から} \quad H_A = H_B = \frac{P}{3}, \quad V_A = \frac{2P}{3}, \quad V_B = \frac{P}{3}$$

問 23 図 1 のような静定 3 ヒンジラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

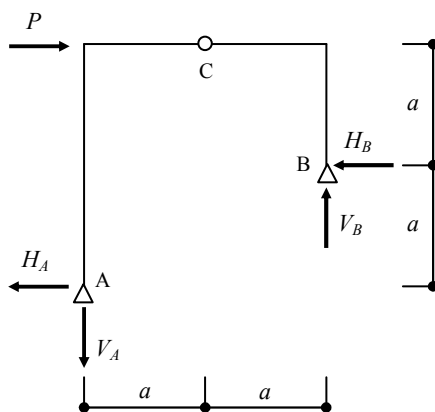


図 1

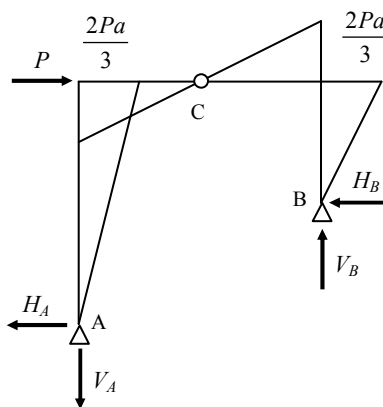


図 2

(解) 水平反力は左向きである。よって、C 点の曲げモーメントの釣り合いから、 $V_A$  は下向き  $V_B$  は上向きとなる。右側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_C = H_B \times a - V_B \times a = 0$ 。

左側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_C = H_A \times 2a - V_A \times a = 0$ 。

X 方向、Y 方向の釣り合いから  $\Sigma X = P - H_A - H_B = 0$ 、 $\Sigma Y = -V_A + V_B = 0$  となる。

$$H_B = V_B, V_A = 2H_A, V_A = V_B, \text{ から } H_A = \frac{P}{3}, H_B = \frac{2P}{3}, V_A = V_B = \frac{2P}{3}$$

問 24 図 1 のような静定 3 ヒンジラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

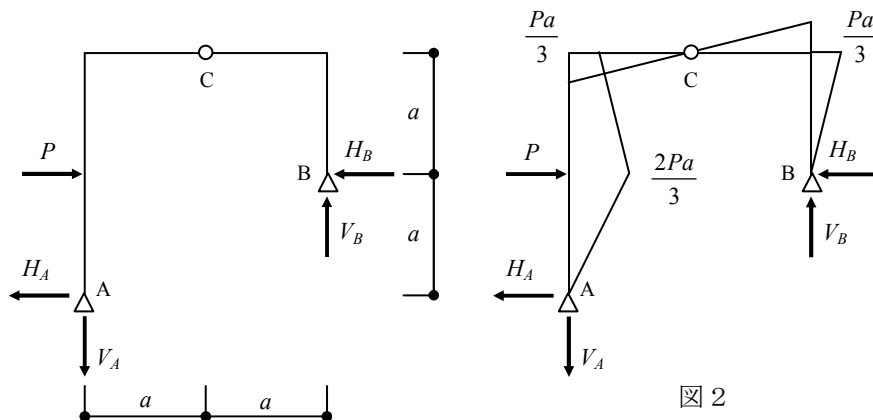


図 1

図 2

(解) 水平反力は左向きである。よって、C 点の曲げモーメントの釣り合いから、 $V_A$  は下向き  $V_B$  は上向きとなる。右側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_C = H_B \times a - V_B \times a = 0$ 。左側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_C = H_A \times 2a - V_A \times a - P \times a = 0$ 。 $X$  方向、 $Y$  方向の釣り合いから  $\Sigma X = P - H_A - H_B = 0$ 、 $\Sigma Y = -V_A + V_B = 0$  となる。

$$H_B = V_B, \quad V_A = 2H_A, \quad V_A = V_B, \quad \text{から} \quad H_A = \frac{2P}{3}, \quad H_B = \frac{P}{3}, \quad V_A = V_B = \frac{P}{3}$$

問 25 図1のような静定3ヒンジラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

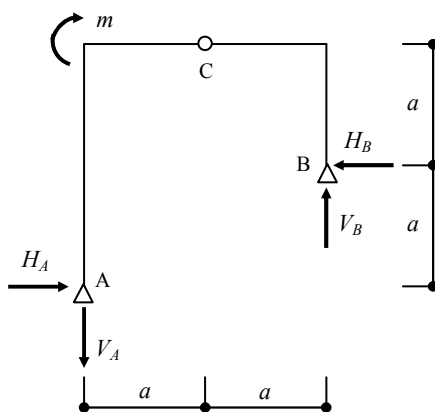


図 1

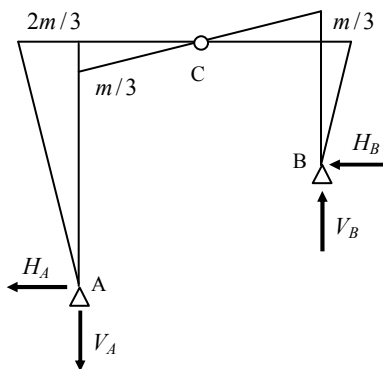


図 2

(解) 水平反力は左向きである。よって、C 点の曲げモーメントの釣り合いから、 $V_A$  は下向き  $V_B$  は上向きとなる。右側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_C = H_B \times a - V_B \times a = 0$ 。左側の架構による C 点の曲げモーメントの釣り合いから  $\Sigma M_C = m - H_A \times 2a - V_A \times a = 0$ 。 $X$  方向、 $Y$  方向の釣り合いから  $\Sigma X = H_A - H_B = 0$ 、 $\Sigma Y = -V_A + V_B = 0$  となる。

$$H_B = V_B, H_A = H_B, V_A = V_B, \text{ から } H_A = H_B = \frac{m}{3a}, V_A = V_B = \frac{m}{3a}$$



問 26 図 1、2、3 で柱 A・B に生じる軸力の絶対値の大きい順に並べよ。

但し、 $h > l > a$  である。

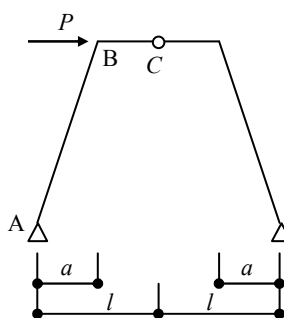


図 1

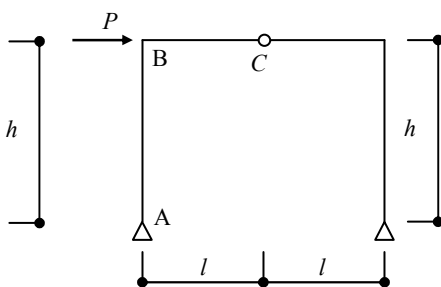


図 2

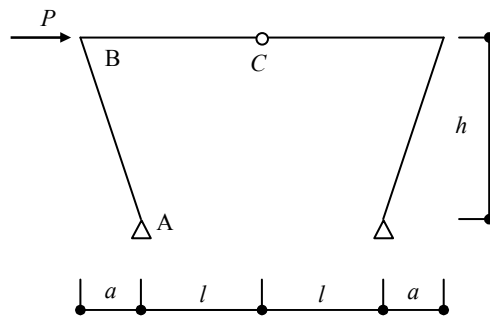


図 3

(解) 図 4 のように、A 点の反力は  $R_A$  となり水平と鉛直の分力に分けると  $H_A$ 、 $V_A$  である。逆対称であるから、 $H_A = P/2$  で、 $\Sigma M_C = H_A \cdot h - V_A \cdot l = 0$ 、 $V_A = Ph/2l$  を得る。

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad \text{だから、} \quad R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = \frac{P}{2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{l^2}} \quad \text{を得る。}$$

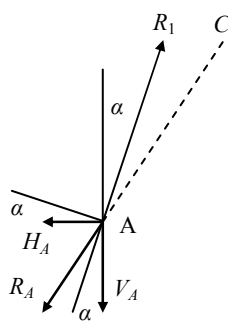


図 4

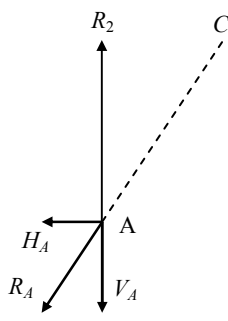


図 5

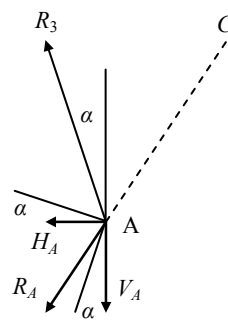


図 6

図 4 の場合は

$$R_1 = H_A \sin \alpha + V_A \cos \alpha = \frac{P}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{Ph}{2l} \cdot \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (1)$$

図 5 の場合は

$$R_2 = V_A = \frac{Ph}{2l} \quad (2)$$

図 6 の場合は

$$R_3 = -H_A \sin \alpha + V_A \cos \alpha = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{Ph}{2l} \cdot \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (3)$$

問題図のように、具体的な長さが設定された場合、 $R_1 > R_3$  となるが、 $R_2$  との比較は難しい。例えば、階高  $h$  を設定しない場合は  $R_1 > R_2 > R_3$  といえる。