

2. 3 不静定トラス

問1 図1は断面積 A 、部材長 l 、ヤング係数 E の部材A-B、C-DとE-F材の3本で荷重 P を支える構造物で斜線部分は剛体と考える。各部材の応力と鉛直方向の伸びを求めよ。但し部材断面、材質、形状は同一とする。

(解答) A-B材、C-D材、E-F材の応力を N_{AB} 、 N_{CD} 、 N_{EF} とすると、外力が P との釣り合式から次式が得られる。

$$N_{AB} + N_{CD} + N_{EF} = P \quad (1)$$

$$\text{各部材の伸び量は } \delta_{AB} = \frac{N_{AB}l}{AE}, \quad \delta_{CD} = \frac{N_{CD}l}{AE}, \quad \delta_{EF} = \frac{N_{EF}(l/3)}{AE}$$

で、それらは等しいので

$$\frac{N_{AB} \cdot l}{AE} = \frac{N_{CD} \cdot l}{AE}$$

$$\frac{N_{CD} \cdot l}{AE} = \frac{N_{EF} \cdot l}{3AE}$$

$$\frac{N_{EF} \cdot l}{3AE} = \frac{N_{AB} \cdot l}{AE}$$

(2)式(3)式から

$$N_{AB} = N_{CD}, \quad N_{AB} = N_{CD} = N_{EF} / 3 \quad (5)$$

となり、(1)式に代入すると

$$N_{EF} / 3 + N_{EF} / 3 + N_{EF} = P \quad (6)$$

よって $N_{EF} = 3P/5$ 、 $N_{AB} = N_{CD} = P/5$

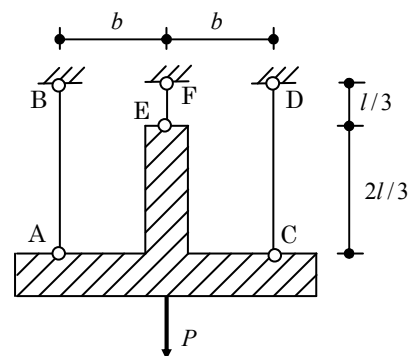


図1 (2)

(3)

(4)

問2 図1は断面積 A 、部材長 l 、ヤング係数 E の部材A-B、C-DとE-F材の3本で荷重 P を支える構造物で斜線部分は剛体と考える。各部材の応力と鉛直方向の伸びを求めよ。

(解答) 図1のような、構造物に荷重 P を作用させたとき、各部材の軸方向力と外力 P との釣り合いから次式となる。

$$N_{AB} + N_{CD} + N_{EF} = P \quad (1)$$

また、各部材の伸び量は

$$\delta_{AB} = \frac{N_{AB}l}{AE}, \quad \delta_{CD} = \frac{N_{CD}l}{AE}, \quad \delta_{EF} = \frac{N_{EF}(l/2)}{AE} \text{ で、}$$

それらは等しいので

$$\frac{N_{AB} \cdot l}{AE} = \frac{N_{CD} \cdot l}{AE} = \frac{N_{EF} \cdot l}{2AE}$$

となり、(1)式と(2)式から次式となる。尚、(2)式には2個の方程式がある。

$$N_{AB} = N_{CD} = +P/4 \quad (3)$$

$$N_{EF} = +P/2 \quad (4)$$

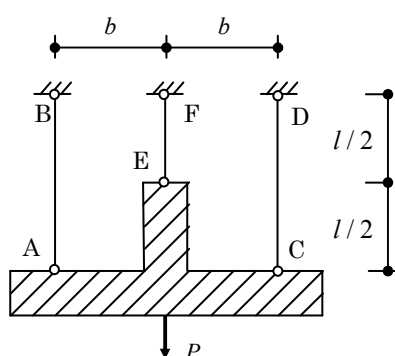


図1 (2)

(3)

(4)

問3 図1のような同一断面積 A でヤング係数 E のトラスで、A点に鉛直荷重 P が作用するときA-B材、A-C材とA-D材の応力を求めよ。

(解) A-B材と水平となす角度を θ とすると $\sin\theta = 3/5$ 、となる。A-B材、A-C材、A-D材の応力を N_{AB} 、 N_{AC} 、 N_{AD} とすると、外力 P との釣り合いから次式が得られる。

$$N_{AB} \sin\theta + N_{AC} + N_{AD} \sin\theta = P \quad (1)$$

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} \sin\theta = 3\delta_{AC} / 5 \quad (2)$$

架構は対称形だから、 $N_{AB} = N_{AD}$ である。よって

(1)式は次式となる。

$$6N_{AB} / 5 + N_{AC} = P \quad (3)$$

A-B材の伸び量は $\delta_{AB} = \frac{5N_{AB}l}{EA}$ 、A-C材の伸び量は $\delta_{AC} = \frac{3N_{AC}l}{EA}$ である。これらの式を(2)式に代入す

ると、 $\frac{5N_{AB}l}{EA} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3N_{AC}l}{EA}$ より、 $N_{AB} = \frac{9}{25}N_{AC}$ となり、(3)式に代入すると

$$N_{AB} = N_{AD} = \frac{45}{179}P, \quad N_{AC} = \frac{125}{179}P \text{ を得る。}$$

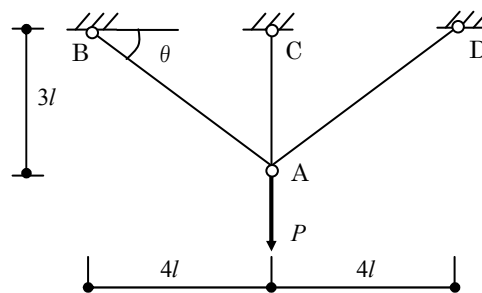


図 1

問4 図1のような同一断面積 A でヤング係数 E のトラスで、A点に鉛直荷重 P が作用するときA-B材、A-C材とA-D材の応力を求めよ。

(解) A-B材、A-C材とA-D材の応力を N_{AB} 、 N_{AC} 、 N_{AD} とすると、外力 P との釣り合いから次式が得られる。

$$N_{AB} \sin \theta + N_{AC} + N_{AD} \sin \theta = P \quad (1)$$

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} \sin \theta = \delta_{AC} / \sqrt{2} \quad (2)$$

架構は対称形だから、 $N_{AB} = N_{AD}$ である。よって

(1)式は次式となる。

$$\sqrt{2}N_{AB} + N_{AC} = P \quad (3)$$

A-B材の伸び量は $\delta_{AB} = \frac{\sqrt{2}N_{AB}l}{EA}$ 、A-C材の伸び量は $\delta_{AC} = \frac{N_{AC}l}{EA}$ である。これらの式を(2)式に代入す

ると、 $\frac{\sqrt{2}N_{AB}l}{EA} = \frac{N_{AC}l}{\sqrt{2}EA}$ より、 $N_{AB} = \frac{1}{2}N_{AC}$ となり、(3)式に代入すると

$$N_{AB} = N_{AD} = \frac{P}{2 + \sqrt{2}}、N_{AC} = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} \text{を得る。}$$

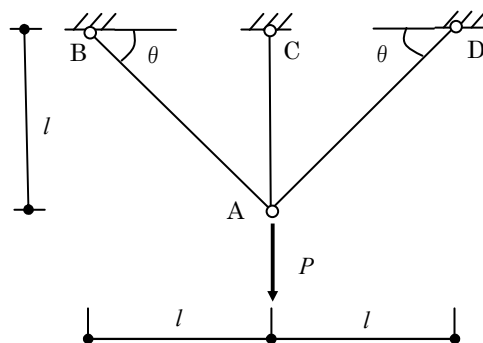


図1

問5 図1でA・B材、C・D材、E・F材の応力を求めよ。但し部材は等質材で断面積は2:3:4とする。

(解) 剛体で繋がっているから完全に斜めに傾く。

よって、各部材の歪度は次のような関係がある。

$$P_A + P_B + P_C = P \quad (1)$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_B - \Delta\varepsilon, \quad \varepsilon_C = \varepsilon_B + \Delta\varepsilon$$

両辺を加えると、

$$2\varepsilon_B = \varepsilon_A + \varepsilon_C \quad (2)$$

各部材の断面積を

$$A_A = 2A, \quad A_B = 3A, \quad A_C = 4A \quad \text{とすると}$$

$$P_A = \varepsilon_A E \cdot 2A, \quad P_B = \varepsilon_B E \cdot 3A, \quad P_C = \varepsilon_C E \cdot 4A \quad (3)$$

(3)式を(1)式に代入すると

$$2\varepsilon_A E \cdot A + 3\varepsilon_B E \cdot A + 4\varepsilon_C E \cdot A = P \quad (4)$$

(2)式を代入すると

$$7\varepsilon_B + 2\varepsilon_C = P / EA \quad (5)$$

D点に関する曲げモーメントの釣り合いから

$$P_A \times 1m + P \times 0.4m - P_C \times 1m = 0, \quad 2\varepsilon_A EA + 0.4P - 4\varepsilon_C EA = 0$$

$$2\varepsilon_A - 4\varepsilon_C = -0.4P / EA \quad \text{から}$$

$$4\varepsilon_B - 6\varepsilon_C = -0.4P / EA \quad (6)$$

(5)式と(6)式から

$$\varepsilon_A = \frac{9P}{125EA}, \quad \varepsilon_B = \frac{13P}{125EA}, \quad \varepsilon_C = \frac{17P}{125EA}$$

$$P_A = \varepsilon_A E \cdot 2A = \frac{18P}{125}, \quad P_B = \varepsilon_B E \cdot 3A = \frac{39P}{125}, \quad P_C = \varepsilon_C E \cdot 4A = \frac{68P}{125}$$

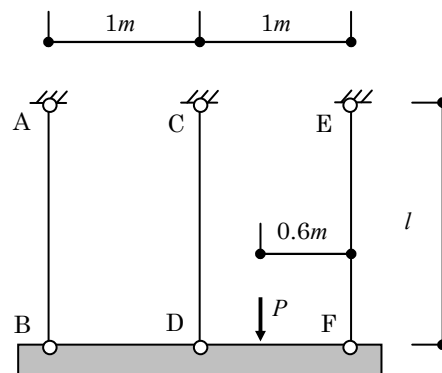
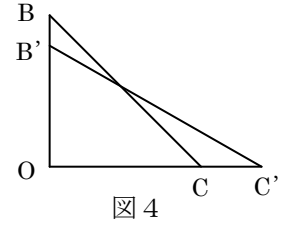
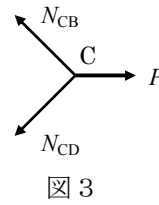
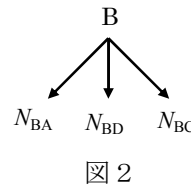
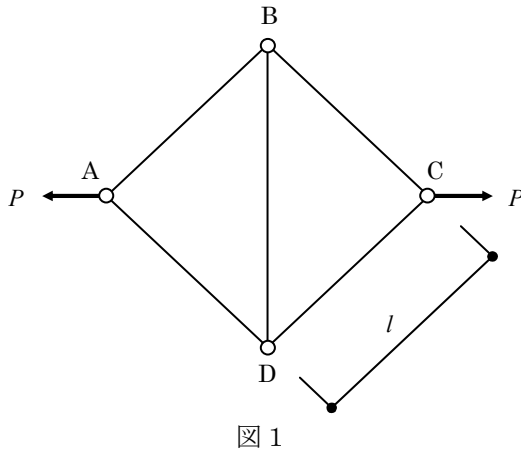


図1

問6 図1のような正方形トラスのA-C間の変位を求めよ。但し、各部材の断面積を A 、ヤング係数を E としB-D材の応力は座屈荷重以下とする。



(解) 図2、図3はB点とC点の釣合いで各応力を N_{BA} 、 N_{BD} 、 N_{BC} 、 N_{CD} とし、各点の釣り合いから次式が得られる。

$$\Sigma X = -N_{BA} \cos 45^\circ + N_{BC} \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = -N_{BA} \sin 45^\circ - N_{BD} - N_{BC} \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma X = -N_{CB} \cos 45^\circ - N_{CD} \cos 45^\circ + P = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma Y = N_{CB} \sin 45^\circ - N_{CD} \sin 45^\circ = 0 \quad (4)$$

これらの式を解くと、 $N_{BA} = N_{BC} = N_{CB} = N_{CD} = P/\sqrt{2}$ となり引張応力。 $N_{BD} = -P$ で圧縮応力。

図1のB-D材とB-C材が変形して図4のB'-O材とB'-C'材になる。

B-D材とB-C材の長さの変形後の長さは

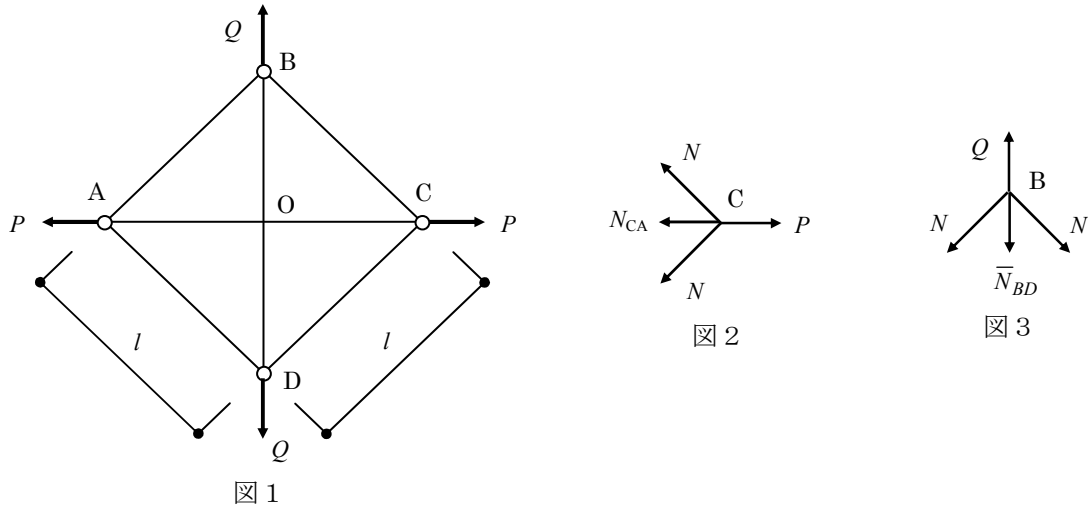
$$B'D' = \sqrt{2} \cdot l \times \left(1 - \frac{P}{EA}\right), \quad B'C' = l \times \left(1 + \frac{P}{\sqrt{2}EA}\right), \quad B'O = \frac{\sqrt{2} \cdot l}{2} \times \left(1 - \frac{P}{EA}\right) \text{ である。}$$

$$\text{よって、} OC' = \sqrt{BC'^2 - BO'^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{P}{\sqrt{2}EA}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P}{EA}\right)^2} \times l = \sqrt{\frac{1}{2} + (\sqrt{2} + 1) \frac{P}{EA}} \times l \text{ となり}$$

$$CC' = \sqrt{\frac{1}{2} + (\sqrt{2} + 1) \frac{P}{EA}} \times l - \frac{\sqrt{2}}{2} \times l \text{ で A-C 間の変位 } \delta_{AC} \text{ は}$$

$$\delta_{AC} = 2CC' = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + (\sqrt{2} + 1) \frac{P}{EA}} \times l - \sqrt{2} \cdot l$$

問7 図1のような正方形トラスで各部材の応力を求めよ。但し、O点で部材は分離していて、各部材の断面積を A 、ヤング係数を E とし A-C 材と B-D 材の応力は座屈荷重以下とする。



(解) $N_{AB} = N_{BC} = N_{CD} = N_{DA} = N_1$ 、 $N_{BD} = N_2$ 、 $N_{AC} = N_3$ と置く。

図2のC点の釣合いより $\Sigma X = P - N_1 \cos 45^\circ - N_1 \cos 45^\circ - N_3 = 0$ から、 $P = \sqrt{2}N_1 + N_3$ (1)

図3のB点の釣合いより $\Sigma Y = Q - N_1 \sin 45^\circ - N_2 - N_1 \sin 45^\circ = 0$ から、 $Q = \sqrt{2}N_1 + N_2$ (2)

この架構のなす軸方向力による変形仕事量は $W = \frac{1}{2EA} \Sigma N^2 L$ (3)

最小仕事の定理により $\frac{\partial W}{\partial N_1} = \frac{2}{2EA} \Sigma N \frac{\partial N}{\partial N_1} L = 0$ を得る。(1)式から、 $\frac{\partial N_3}{\partial N_1} = -\sqrt{2}$ となり

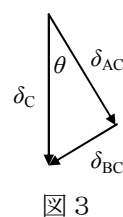
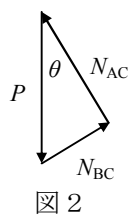
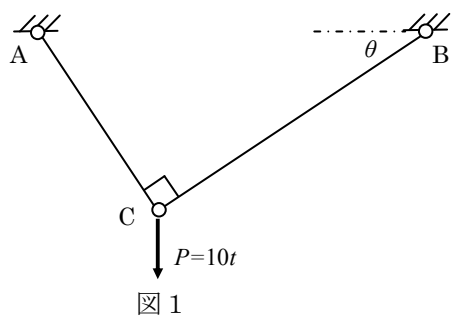
$N_3 \frac{\partial N_3}{\partial N_1} = -\sqrt{2}P + 2N_1$ である。(2)式から、 $\frac{\partial N_2}{\partial N_1} = -\sqrt{2}$ となり $N_2 \frac{\partial N_2}{\partial N_1} = -\sqrt{2}Q + 2N_1$ だから

$\frac{\partial W}{\partial N_1} = \frac{1}{EA} (4N_1 l - 2Pl + 2\sqrt{2}N_1 l - 2Ql + 2\sqrt{2}N_1 l) = \frac{2}{EA} \{ (2 + 2\sqrt{2}) \cdot l N_1 - (P + Q) \cdot l \} = 0$ となる。

ゆえに、 $N_1 = \frac{P+Q}{2(1+\sqrt{2})}$ を得る。(1)式に代入すると $N_3 = P - \sqrt{2} \times \frac{P+Q}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{(2+\sqrt{2})P - \sqrt{2}Q}{2(1+\sqrt{2})}$

(2)式から $N_2 = Q - \sqrt{2} \times \frac{P+Q}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{(2+\sqrt{2})Q - \sqrt{2}P}{2(1+\sqrt{2})}$

問8 図1の架構でA-C材とB-C材の応力度が等しいとする。A-C、B-C材の長さは3m、4m。
部材の許容引張応力度： 1600kg/cm^2 、ヤング係数： $2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ のとき以下の質問に答えよ。



- (1) A-C材とB-C材の断面積の比を求めよ。
- (2) 各部材の最小断面積を求めよ。
- (3) 外力Pのなす仕事量を求めよ。ただし、 $\sin\theta=3/5$ 、 $\cos\theta=4/5$

(解) 図2から、 $\Sigma X = -N_{AC} \sin\theta + N_{BC} \cos\theta = 0$ 、 $\Sigma Y = N_{AC} \cos\theta + N_{BC} \sin\theta - P = 0$

$N_{AC} = 4P/5 = 8t$ 、 $N_{BC} = 3P/5 = 6t$ となり、 $\sigma = N_{AC} / A_{AC} = N_{BC} / A_{BC}$ を得て

$A_{BC} : A_{AC} = N_{BC} : N_{AC} = 3 : 4$ となる。断面積は

$$A_{AC} = \frac{N_{AC}}{f} = \frac{8000\text{kg}}{1600\text{kg/cm}^2} = 5\text{cm}^2, \quad A_{BC} = \frac{N_{BC}}{f} = \frac{6000\text{kg}}{1600\text{kg/cm}^2} = 3.75\text{cm}^2 \text{ だから、}$$

$$\text{A-C材の伸びは、} \delta_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{EA_{AC}} = \frac{8000\text{kg} \times 300\text{cm}}{2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2 \times 5\text{cm}^2} = 0.229\text{cm}$$

$$\text{B-C材の伸びは、} \delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{6000\text{kg} \times 400\text{cm}}{2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2 \times 3.75\text{cm}^2} = 0.305\text{cm}$$

外力Pのなした仕事量は、各部材の応力の仕事量である。

$$W = \frac{1}{2}(N_{AC} \times \delta_{AC} + N_{BC} \times \delta_{BC}) = \frac{1}{2}(8t \times 0.00229\text{m} + 6t \times 0.00305\text{m}) = 1.831 \times 10^{-2} \text{tm}$$

問9 図1の架構でA・C材とB・C材の応力度が等しいとする。A・C材の長さは4mとする。

部材の許容引張応力度： 1600kg/cm^2 、ヤング係数： $2.1 \times 10^6\text{kg/cm}^2$ のとき以下の質問に答えよ。

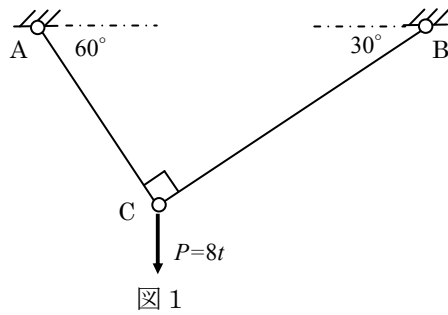


図1

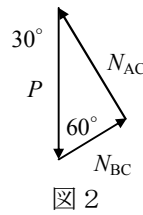


図2

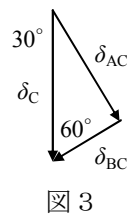


図3

(1) A・C材とB・C材の断面積の比を求めよ。

(2) 各部材の最小断面積を求めよ。

(3) 外力Pのなす仕事量を求めよ。

(解) 図2から、 $\Sigma X = -N_{AC} \cos 60^\circ + N_{BC} \cos 30^\circ = 0$ 、 $\Sigma Y = N_{AC} \sin 60^\circ + N_{BC} \sin 30^\circ - P = 0$

$N_{AC} = 4\sqrt{3}t$ 、 $N_{BC} = 4t$ となり、 $\sigma = N_{AC} / A_{AC} = N_{BC} / A_{BC}$ を得て

$A_{BC} : A_{AC} = N_{BC} : N_{AC} = 1 : \sqrt{3}$ となる。断面積は

$$A_{AC} = \frac{N_{AC}}{f} = \frac{6928.2\text{kg}}{1600\text{kg/cm}^2} = 4.33\text{cm}^2, \quad A_{BC} = \frac{N_{BC}}{f} = \frac{4000\text{kg}}{1600\text{kg/cm}^2} = 2.5\text{cm}^2 \text{ だから、}$$

$$\text{A・C材の伸びは、} \delta_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{EA_{AC}} = \frac{6928.2\text{kg} \times 400\text{cm}}{2.1 \times 10^6\text{kg/cm}^2 \times 4.33\text{cm}^2} = 0.3048\text{cm}$$

$$\text{B・C材の伸びは、} \delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{4000\text{kg} \times 346.41\text{cm}}{2.1 \times 10^6\text{kg/cm}^2 \times 2.5\text{cm}^2} = 0.2639\text{cm}$$

外力Pのなした仕事量は、各部材の応力の仕事量である。

$$W = \frac{1}{2}(N_{AC} \times \delta_{AC} + N_{BC} \times \delta_{BC}) = \frac{1}{2}(6.928t \times 0.00305\text{m} + 4t \times 0.00264\text{m}) = 3.169 \times 10^{-2}\text{tm}$$