

4. 4 弾性曲線式

問1 図1の梁で撓みが最大となる位置と撓みの最大値を求めよ。

部材のヤング係数は $E = 20000 \text{ N/mm}^2$

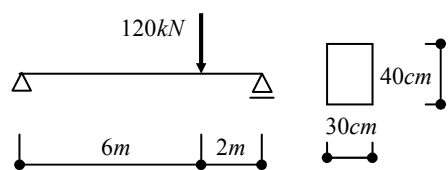


図1

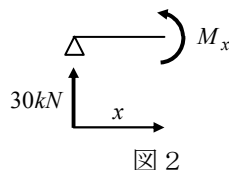


図2

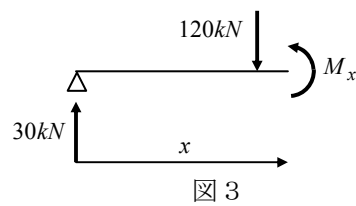


図3

(解) 弾性曲線式を使って撓みの曲線方程式を求める。図2から、 $0 \leq x \leq 6\text{m}$ の場合、A点から任意の距離 x にある点の曲げモーメントは $\Sigma M_o = 30\text{kN} \times x - M_x = 0$ から、 $M_x = 30x$ 。 $6\text{m} \leq x \leq 8\text{m}$ の場合、A点から任意の距離 x にある点の曲げモーメントは $\Sigma M_o = 30\text{kN} \times x - 120(x - 6) - M_x = 0$ から、

$M_x = 720 - 90x$ が得られ、 $\frac{d^2 y^2}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI}$ 式に代入して微分方程式を解くと

$$EI \frac{d^2 y_1^2}{dx^2} = -30x \quad (1)$$

$$EI \frac{dy_1}{dx} = -15x^2 + C_1 \quad (2)$$

$$EI y_1 = -5x^3 + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

$$EI \frac{d^2 y_2^2}{dx^2} = 90x - 720 \quad (4)$$

$$EI \frac{dy_2}{dx} = -45x^2 - 720x + C_3 \quad (5)$$

$$EI y_2 = 15x^3 - 360x^2 + C_3 x + C_4 \quad (6)$$

境界条件から(3)式に $x = 0$ を、(6)式に $x = 8$ を代入すると

$$EI y_1 = C_2 = 0 \quad (7)$$

$$EI y_2 = 7680 - 23040 + 8C_3 + C_4 = 0 \quad (8)$$

連続条件から(2)式に $x = 6$ 、(5)式に $x = 6$ を代入すると

$$-540 + C_1 = 1620 - 4320 + C_3 \text{ から、 } C_1 - C_3 = -2160 \quad (9)$$

同様に、(3)式に $x = 6$ 、(6)式に $x = 6$ を代入すると

$$-1080 + 6C_1 = 3240 - 12960 + 6C_3 + C_4 \text{ から、 } 6C_1 - 6C_3 - C_4 = -8640 \quad (10)$$

これらを解くと、 $C_1 = 300$ 、 $C_2 = 0$ 、 $C_3 = 2460$ 、 $C_4 = -4320$ を得る。よって、 $0 \leq x \leq 6\text{m}$ の範囲の弾

性曲線は、 $EI y_1 = -5x^3 + 300x$ となり 1 回微分すると、 $EI \frac{dy_1}{dx} = -15x^2 + 300$ となる。この式をゼロと置

いて得た、 $x = 4.472\text{m}$ の点が最大撓みの生じる点である。

$$EI y_1 = -5 \times (4.472)^3 + 300 \times 4.472 = 894.43\text{m}$$

問2 図1のA点が弾性支持で等分布荷重 w が作用している梁がある。弾性曲線式と反力 R_A を求めよ。但し、A点の変位は $\delta_A = kR_A$ とする。

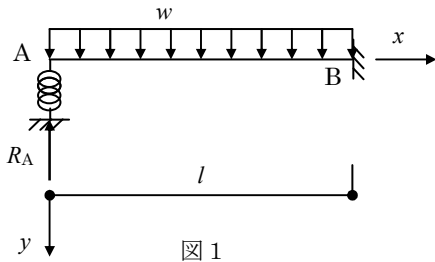


図1

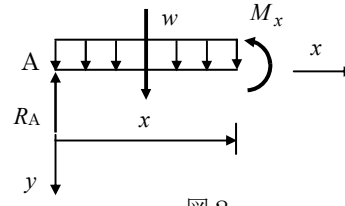


図2

(解) 図2のようにA点を原点とした座標をとる。A点から任意の距離 x にある点の曲げモーメントは $\Sigma M_o = R_A \times x - wx \times x/2 - M_x = 0$ から、 $M_x = R_A x - wx^2/2$ が得られ、 $\frac{d^2 y^2}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI}$ 式に代入して微分方程式を解くと

$$EI \frac{d^2 y^2}{dx^2} = -R_A x + \frac{wx^2}{2} \quad (1)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{R_A x^2}{2} + \frac{wx^3}{6} + C_1 \quad (2)$$

$$EI y = -\frac{R_A x^3}{6} + \frac{wx^4}{24} + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

境界条件から、 $x=0$ で $y_A = kR_A$ だから、(3)式に代入すると $C_2 = E \cdot I \cdot k \cdot R_A$ となる。 $x=l$ で、 $\frac{dy}{dx} = 0$ 、 $y=0$

だから、(2)式と(3)式に代入すると $C_1 = \frac{R_A l^2}{2} - \frac{wl^3}{6}$ 、 $-\frac{R_A l^3}{6} + \frac{wl^4}{24} + \frac{R_A l^3}{2} - \frac{wl^4}{6} + ElkR_A = 0$ を得る。

$$R_A = \frac{3}{8} \cdot \frac{wl^4}{6} + \frac{wx^4}{l^3 + 3Elk} \quad (4)$$

$$C_1 = \left(\frac{3}{16} \cdot \frac{l^3}{l^3 + 3Elk} - \frac{1}{6} \right) \cdot wl^3 \quad (5)$$

$$C_2 = \frac{3Elk}{8(l^3 + 3Elk)} \cdot wl^4 \quad (6)$$

となり、(4)式、(5)式と(6)式を(3)式に代入すると

$$y = \frac{wl^4}{24EI} \left\{ \frac{x^4}{l^4} - \frac{3l^3}{2(l^3 + 3Elk)} \cdot \frac{x^3}{l^3} + \left(\frac{9l^3}{2(l^3 + 3Elk)} - 4 \right) \cdot \frac{x}{l} + \frac{9Elk}{l^3 + 3Elk} \right\} \quad (7)$$

$$\text{を得て、} M = \frac{3}{8} \cdot \frac{wl^4}{l^3 + 3Elk} \cdot x - \frac{wx^2}{2} \quad (8)$$

$$Q = \frac{3}{8} \cdot \frac{wl^4}{l^3 + 3Elk} - wx \quad (9)$$

を得て $Q=0$ と置くと $x = \frac{3}{8} \cdot \frac{l^4}{l^3 + 3Elk}$ となり、この x 点が(8)式の最大値である。よって

$$M_{\max} = \frac{9}{129} \cdot \frac{wl^8}{(l^3 + 3EI k)^2} \cdot \quad (10)$$

(8)式で $M=0$ と置くと $x=0$ 、 $x = \frac{3l^4}{4(l^3 + 3EI k)}$ となる。ここで、 $k=0$ とした場合、A 点が回転端で B 点が固定端の梁の解となる。