

5. 1 梁

問1 仮想仕事法により図1のA点の垂直たわみ δ とたわみ角 α を求めよ。ヤング係数を E 、断面2次モーメントを I とする。

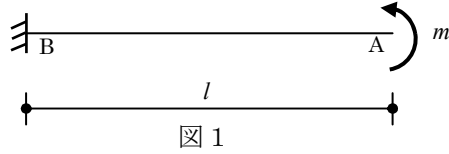


図 1

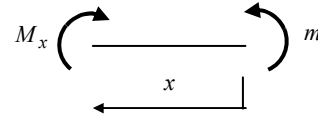


図 2

図2でA点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_o = -m + M_x = 0, \quad M_x = +m$$

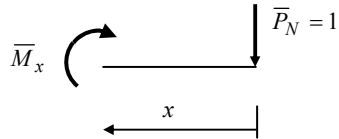


図 3

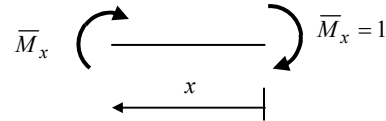


図 4

A点のたわみは図3のように仮想荷重を作用させる。曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_o = -x - \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = -x$$

$$\text{ゆえに、} \delta = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^l \frac{(m)(-x)}{EI} dx = -\frac{P}{EI} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

A点のたわみ角は図4のように仮想荷重を作用させる。曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_o = 1 + \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = -1$$

$$\text{ゆえに、} \alpha = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^l \frac{(m)(-1)}{EI} dx = -\frac{m}{EI} [x]_0^l = -\frac{ml}{EI}$$

問2 仮想仕事法により図1のA点の垂直たわみ δ とたわみ角 α を求めよ。ヤング係数を E 、断面2次モーメントを I とする。

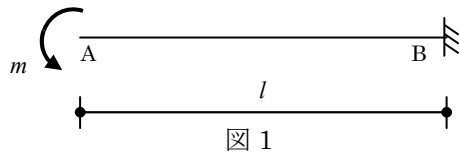


図1

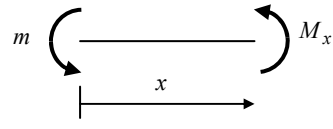


図2

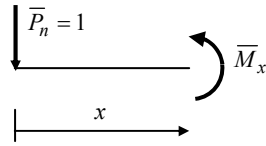


図3

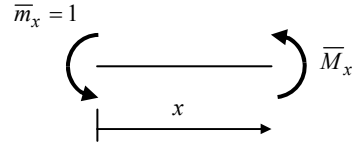


図4

$$\text{図2から } M_x = -m, \text{ 図3から } M_x = -x, \quad \delta_A = \int_0^l \frac{(-m)(-x)}{EI} dx = \left[\frac{mx^2}{2EI} \right]_0^l = \frac{ml^2}{2EI}$$

$$\text{図4から } M_x = -1, \quad \theta_A = \int_0^l \frac{(-m)(-1)}{EI} dx = \left[\frac{mx}{EI} \right]_0^l = \frac{ml}{EI}$$

問3 図1の片持梁を仮想仕事法によりA点の垂直たわみ δ とたわみ角 α を求めよ。ヤング係数を E 、断面2次モーメントを I とする。

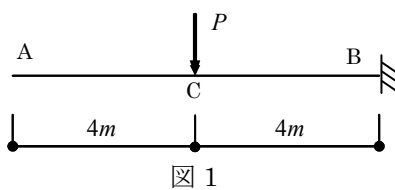


図1

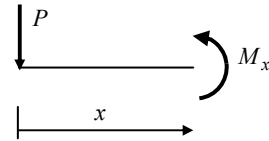


図2

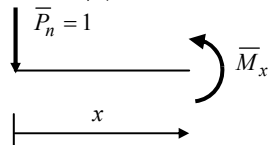


図3

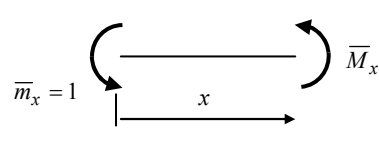


図4

まずC点の撓みと撓み角を求める。図2から $M_x = -Px$ で仮想荷重は前問を利用すると

$$\delta_1 = \int_0^4 \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx = \left[\frac{mx^3}{3EI} \right]_0^4 = \frac{64P}{3EI}$$

$$\theta_1 = \int_0^4 \frac{(-Px)(-1)}{EI} dx = \left[\frac{Px^2}{2EI} \right]_0^4 = \frac{8P}{EI}$$

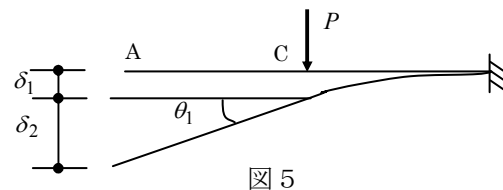


図5

図4から分かるようにA-C材は直線で変形しない

からA点の撓み角はC点のそれに等しい。また $\delta_2 = 4m \times \theta_1$ であるから

$$\delta_A = \delta_1 + \delta_2 = \frac{64P}{3EI} + \frac{32P}{EI} = \frac{160P}{3EI}, \quad \theta_A = \theta_1 = \frac{8P}{EI} \text{ となる。}$$

問4 図1の片持ち梁でA点の撓みと撓み角を仮想仕事法により求めよ。但し、部材のヤング係数は E 、断面2次モーメントは I とする。

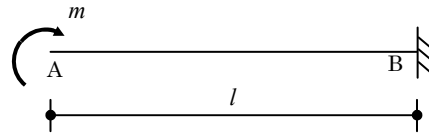


図1

(解答) 図2で曲げモーメントの釣り合いから $\Sigma M_o = +m - M_x = 0$ 、 $M_x = +m$

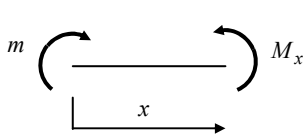


図2

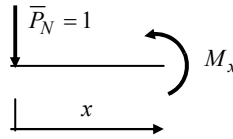


図3

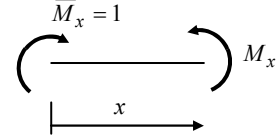


図4

A点のたわみは図3のように仮想荷重を作用させる。曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_o = -x - \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = -x$$

$$\text{となる。ゆえに、} \delta = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^l \frac{(m)(-x)}{EI} dx = -\frac{P}{EI} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

A点のたわみ角は図4のように仮想荷重を作用させる。曲げモーメントの釣り合いから

$$\Sigma M_o = 1 - \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = +1$$

$$\text{である。撓み角は、} \alpha = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^l \frac{(m)(+1)}{EI} dx = +\frac{m}{EI} [x]_0^l = +\frac{ml}{EI}$$

A点の撓みは仮想荷重と反対方向（上方）に、撓み角は仮想荷重と同方向（時計回り）に変位、回転する。

問5 図1の単純梁のB点に曲げモーメント m が作用している。このとき梁中央のC点の回転角 θ_C と垂直変位 δ_C を仮想仕事法で求めよ。但し部材の性状はヤング係数を E 、断面2次モーメントを I とする。

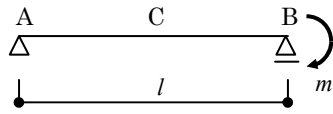


図1

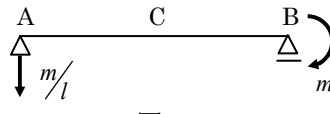


図2

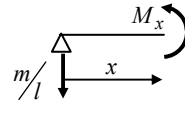


図3

(解) 図2のモーメントの釣合いから $M_x = -\frac{m}{l}x$ となる。ここでC点に仮想荷重 $\bar{P}_n = 1$ を作用させる

と

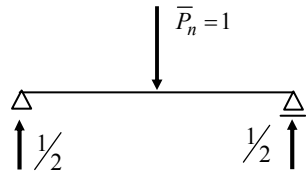


図4

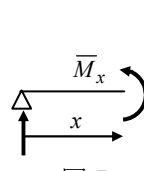


図5

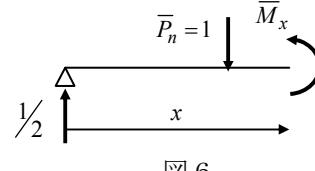


図6

$0 \leq x \leq l/2$ のとき、図4のモーメントの釣合いから $\bar{M}_x = x/2$ となる。

$l/2 \leq x \leq l$ のとき、図5のモーメントの釣合いから、 $\bar{M}_x = \frac{1}{2}x - (x - \frac{l}{2}) = \frac{l}{2} - \frac{x}{2}$

ここでC点の垂直変位は次のようになる。
$$\delta_C = \int_0^{l/2} \frac{(-\frac{mx}{l})(\frac{x}{2})}{EI} dx + \int_{l/2}^l \frac{(-\frac{mx}{l})(\frac{l}{2} - \frac{x}{2})}{EI} dx = -\frac{ml^2}{16EI}$$

またC点の回転角を求めるために図7のC点に仮想荷重 $\bar{M}_n = 1$ をかけると

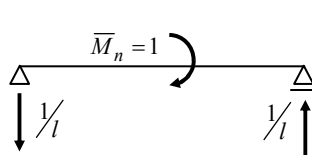


図6

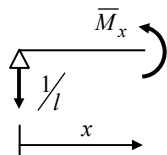


図7

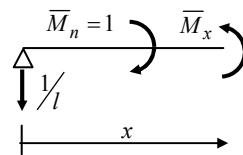


図8

$0 \leq x \leq l/2$ のとき、図2のモーメントの釣合いから $\bar{M}_x = -x/l$ となる。

$l/2 \leq x \leq l$ のとき $\bar{M}_x = 1 - x/l$ となる。C点の回転角は次式となる。

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(-\frac{m}{l}x\right) \left(-\frac{1}{l}x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \left(-\frac{m}{l}x\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{m}{EI} \left\{ \left[\frac{x^3}{3l^2} \right]_0^{l/2} + \left[\frac{x^3}{3l^2} - \frac{x^2}{2l} \right]_{l/2}^l \right\} = -\frac{ml}{24EI}$$

問6 B点に P が作用している。片持梁の中央C点の回転角 θ_c と垂直変位 δ_c を仮想仕事法で求めよ。
但し部材の性状はヤング係数を E 、断面2次モーメントを I とする。

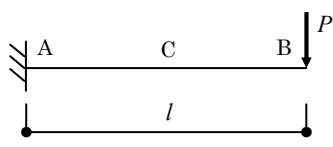


図 1

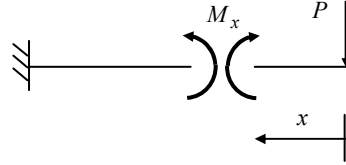


図 2

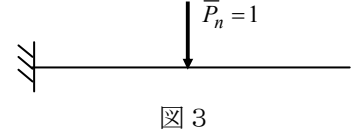


図 3

(解) 図のように B 点から x の距離にある点のモーメントは $\Sigma X = M_x + Px = 0$ となる。ゆえに

$$M_x = -Px$$

C 点の垂直変位を求めるには図 2 に仮想荷重 $\bar{P}_n = 1$ を C 点にかける。

ここで $0 \leq x \leq l/2$ のとき $\bar{M}_x = 0$ となり、 $l/2 \leq x \leq l$ のとき

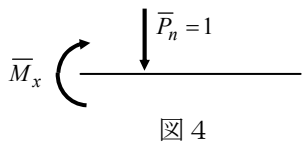


図 4

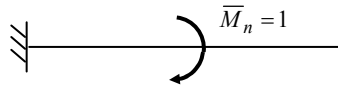


図 5

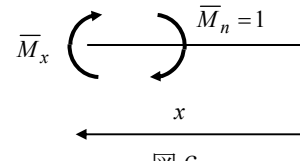


図 6

$$\Sigma X = \bar{M}_x + x - l/2 = 0$$

$$\bar{M}_x = l/2 - x \text{ となる。}$$

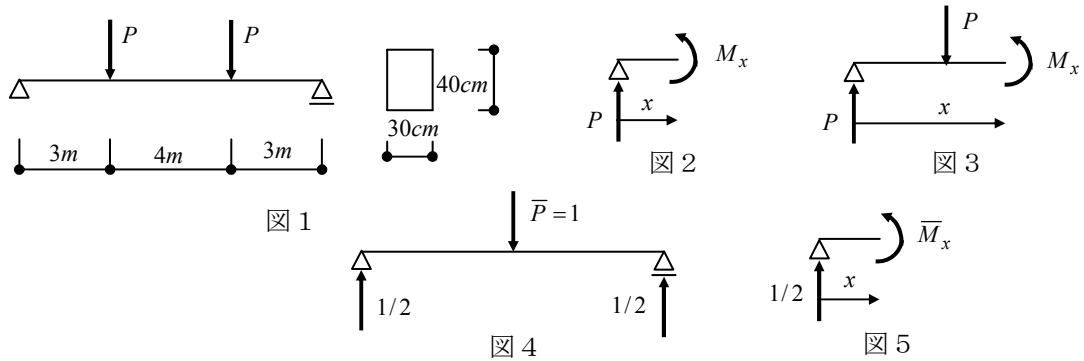
$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l (-Px)(l/2 - x) dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{4} \right]_{l/2}^l = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

C 点の回転角は C 点に図 4 に仮想荷重 $\bar{M}_x = 1$ をかける。ここで $0 \leq x \leq l/2$ のとき $\bar{M}_x = 0$
 $l/2 \leq x \leq l$ のとき図 5 から $\bar{M}_x = -1$ となる。ゆえに C 点の回転角は次式となる。

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l (-Px)(-1) dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{l/2}^l = \frac{3Pl^2}{8EI}$$

問7 図1のような単純梁に鉛直力 P が作用しているとき、梁中央部の撓み δ を求めよ。

梁のヤング係数は $E = 20000 \text{ N/mm}^2$ とする。



(解) 仮想仕事法で解く。対称形なので左半分で解いて2倍すればよい。

図2の釣り合いから、 $0 \leq x \leq 3\text{m}$ の場合は $\Sigma M = Px - M_x = 0$ から、 $M_x = Px$

図3の釣り合いから、 $3 \leq x \leq 5\text{m}$ の場合は $\Sigma M = Px - P(x-3) - M_x = 0$ から、 $M_x = 3P$

図4のように、撓みを求めたい場所に仮想荷重 $\bar{P}=1$ を作用させたとき、

図5の釣り合いから、 $0 \leq x \leq 3\text{m}$ の場合と $3 \leq x \leq 5\text{m}$ の場合共、 $\Sigma M = x/2 - M_x = 0$ から、 $M_x = x/2$

$$EI\delta = 2 \int_0^3 (Px)(x/2)dx + 2 \int_3^5 (3P)(x/2)dx = 2P \left\{ \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 + \left[\frac{3x^2}{2} \right]_3^5 \right\} = 33P \text{ となり、 } \delta = 33P/EI$$

(別解) モールの定理で求める。

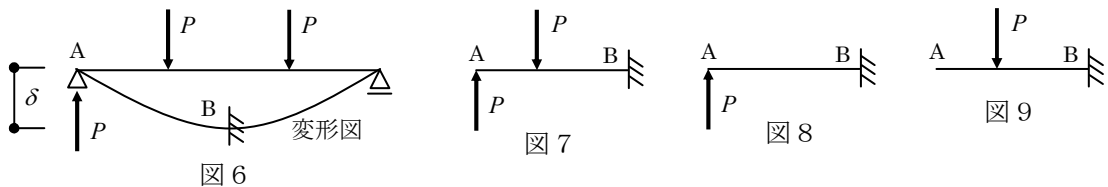
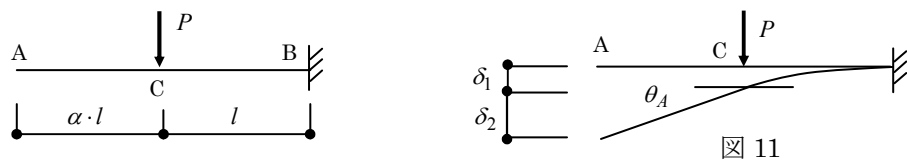


図6のB点の撓みは、B点から見れば、A点が撓んだと考えてもよい。よって、図7のA点の撓みを求めればよい。図7は図8と図9を重ねたものである。図8はモールの定理の基本であるから既に解は得られる。この問題は構造力学(15章 1-04b)から、図10のA点の撓みを求めることになる。A点の撓みはC点に作用する P による垂直撓み δ_1 とC点の回転角にA-C材の長さを乗じた撓み δ_2 を加えたものである。片持梁の先端に集中荷重 P が作用した場合の先端の撓みと、撓み角はモールの定理により、容易に導ける。 $\delta = Pl^3/3EI$ 、 $\theta = Pl^2/2EI$ よって、図11でC点の撓みと撓み角は



$\alpha l = 3\text{m}$ 、 $l = 2\text{m}$ から、 $\delta_1 = Pl^3/3EI = 8P/3EI$ 、 $\theta_C = Pl^2/2EI = 2P/EI$ 、 $\delta_2 = \alpha l \times \theta_C = 6P/EI$ が得られる。よって、 $\delta_A = \delta_1 + \delta_2 = 26P/3EI$ 。図8のA点の撓みを δ'_A とすると、 $\delta'_A = P(5)^3/3EI = 125P/3EI$ となる。これより、 $\delta = \delta'_A - \delta_A = 125P/3EI - 26P/3EI = 99P/3EI = 33P/EI$ が得られる。

問8 図1の梁でB点の撓みと回転角をせん断力による影響を仮想仕事法で計算せよ。

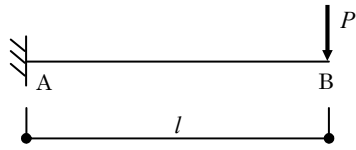


図1

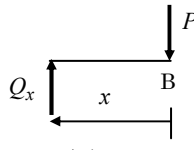


図2

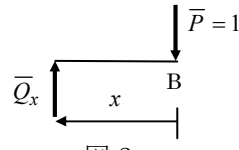


図3

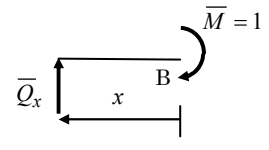


図4

(解) せん断力による変形は $\delta = \kappa P / GA$ で表される。

図2と図3による x 点のせん断力は $Q_x = P$ 、 $\bar{Q}_x = 1$ となる。よって

$$\delta_B = \int_0^l \kappa \frac{Q_x \bar{Q}_x}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \int_0^l P dx = \frac{\kappa}{GA} [Px]_0^l = \frac{\kappa Pl}{GA}$$

図2と図4による x 点のせん断力は $Q_x = P$ 、 $\bar{Q}_x = 0$ となる。よって

$$\theta_B = \int_0^l \kappa \frac{Q_x \bar{Q}_x}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \int_0^l (P \times 0) dx = 0$$

問9 図1の梁でB点の撓みと回転角をせん断力による影響を仮想仕事法で計算せよ。

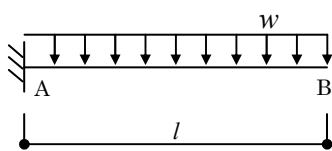


図1

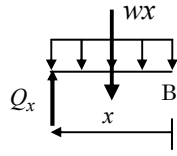


図2

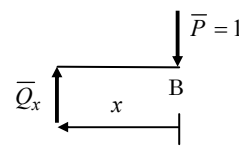


図3

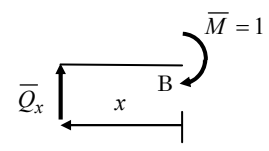


図4

(解) せん断力による変形は $\delta = \kappa P / GA$ で表される。

図2と図3による x 点のせん断力は $Q_x = wx$ 、 $\bar{Q}_x = 1$ となる。よって

$$\delta_B = \int_0^l \kappa \frac{Q_x \bar{Q}_x}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \int_0^l wx dx = \frac{\kappa w}{GA} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{\kappa w l^2}{2GA}$$

図2と図4による x 点のせん断力は $Q_x = wx$ 、 $\bar{Q}_x = 0$ となる。よって

$$\theta_B = \int_0^l \kappa \frac{Q_x \bar{Q}_x}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \int_0^l (wx \times 0) dx = 0$$

問 10 図 1 の梁の中央 C 点の撓みと回転角をせん断力による影響を仮想仕事法で計算せよ。

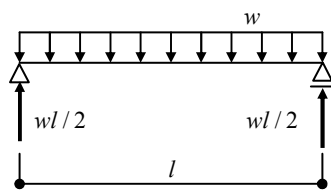


図 1

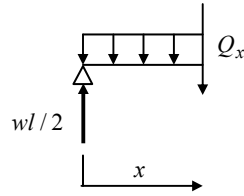


図 2

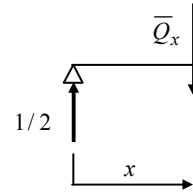


図 3

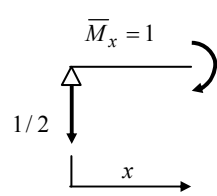


図 4

(解) 図 2 と図 3 による x 点のせん断力は $Q_x = wl/2 - wx$ 、 $\bar{Q}_x = 1/2$ となる。よって

$$\delta_C = 2 \int_0^{l/2} \kappa \frac{Q_x \bar{Q}_x}{GA} dx = \frac{2\kappa}{GA} \int_0^{l/2} (wl/2 - wx)(1/2) dx = \frac{2\kappa w}{GA} \left[\frac{lx}{4} - \frac{x^2}{4} \right]_0^{l/2} = \frac{2\kappa w}{GA} \left(\frac{l^2}{16} \right) = \frac{\kappa w l^2}{8GA}$$

図 2 と図 4 による x 点のせん断力は $Q_x = wl/2 - wx$ 、 $\bar{Q}_x = 0$ となる。よって

$$\theta_C = 2 \int_0^{l/2} \kappa \frac{Q_x \bar{Q}_x}{GA} dx = 0$$

問 11 ある架構をモールの定理で解いたら、図 1、図 2 に示すような仮架構と仮想荷重になった。どのような問題だったかを示せ。梁のヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。

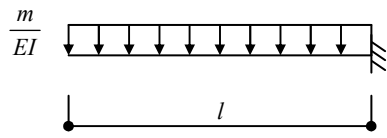


図 1

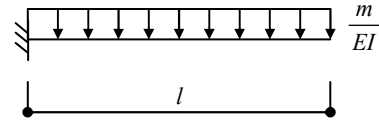


図 2

(解) 仮想荷重が作用する方向は、構造力学((4-36)、(4-40)、(4-41)式)で示すように本来は負の符号が付いている。よって、実際の外力の作用方向は逆向きになる。

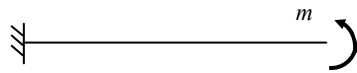


図 3

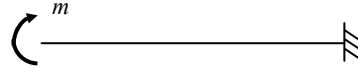


図 4

問 12 ある架構をモールの定理で解いたら、図 1、図 2 に示すような仮架構と仮想荷重になった。どのような問題だったかを示せ。梁のヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。

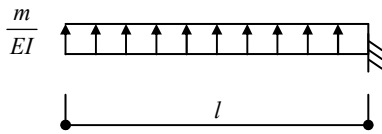


図 1

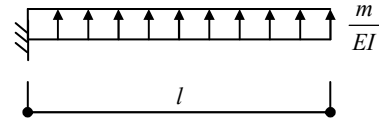


図 2

(解) 仮想荷重が作用する方向は、構造力学((4-36)、(4-40)、(4-41)式)で示すように本来は負の符号が付いている。よって、実際の外力の作用方向は逆向きになる。

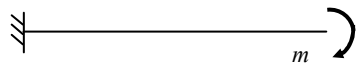


図 3

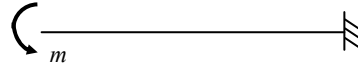


図 4

問 13 ある架構をモールの定理で解いたら、図 1、図 2 に示すような仮架構と仮想荷重になった。どのような問題だったかを示せ。梁のヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。

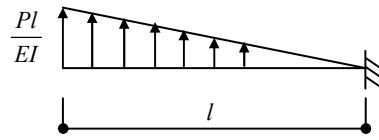


図 1

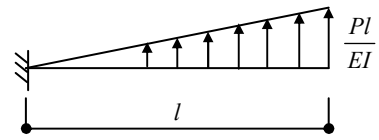


図 2

(解) 仮想荷重が作用する方向は、構造力学((4-36)、(4-40)、(4-41)式)で示すように本来は負の符号が付いている。よって、実際の外力の作用方向は逆向きになる。

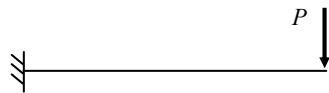


図 3

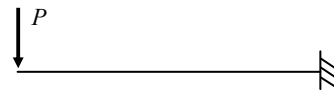


図 4

問 14 ある架構をモールの定理で解いたら、図 1、図 2 に示すような仮架構と仮想荷重になった。どのような問題だったかを示せ。梁のヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。

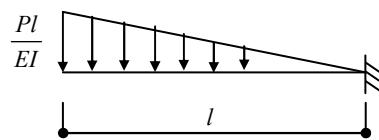


図 1

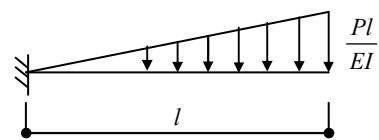


図 2

(解) 仮想荷重が作用する方向は、構造力学((4-36)、(4-40)、(4-41)式)で示すように本来は負の符号が付いている。よって、実際の外力の作用方向は逆向きになる。

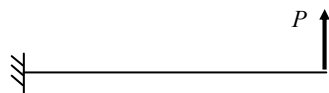


図 3

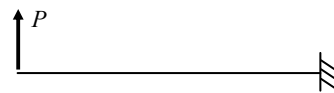


図 4

問 15 仮想仕事法により図 1 の A 点の垂直たわみ δ とたわみ角 α を求めよ。ヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。

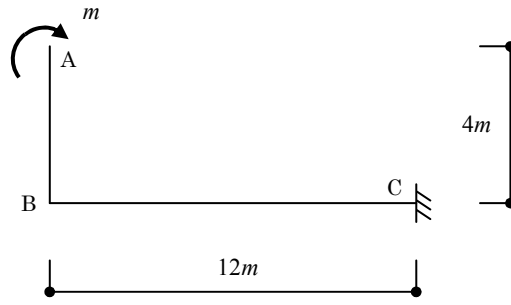


図 1

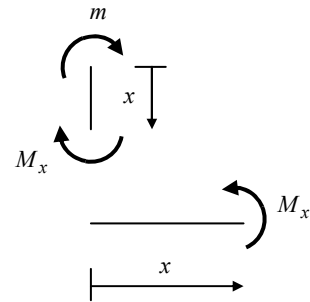


図 2

図 2 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ

$$\Sigma M_o = m + M_x = 0, \quad M_x = -m, \quad \Sigma M_o = m - M_x = 0, \quad M_x = +m \text{ となる。}$$

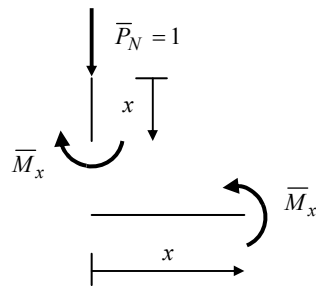


図 3

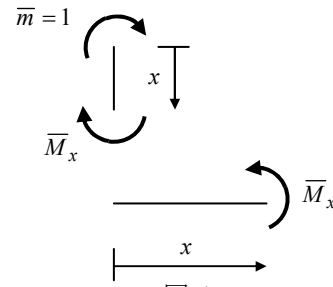


図 4

図 2 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ

$$\Sigma M_o = \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = 0, \quad \Sigma M_o = -x - \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = -x \text{ となる。ゆえに}$$

$$\delta = \int_0^4 \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} = \int_0^4 \frac{(-m)(0)}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{(m)(-x)}{EI} = -\frac{m}{EI} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{12} = -\frac{72m}{EI}$$

となる。図 3 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ

$$\Sigma M_o = 1 + \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = -1, \quad \Sigma M_o = 1 - \bar{M}_x = 0, \quad \bar{M}_x = +1 \text{ となる。ゆえに}$$

$$\alpha = \int_0^4 \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} = \int_0^4 \frac{(-m)(-1)}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{(m)(+1)}{EI} = \frac{m}{EI} [x]_0^4 + \frac{m}{EI} [x]_0^{12} = \frac{16m}{EI} \text{ となる。}$$

問 16 仮想仕事法により図 1 の A 点の水平たわみ δ とたわみ角 α を求めよ。ヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。

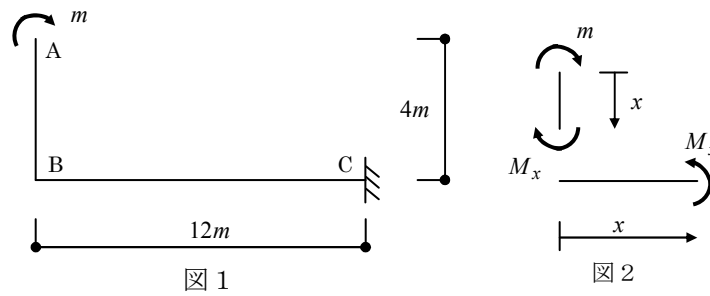


図 2 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ $\Sigma M_o = m + M_x = 0$ 、 $M_x = -m$ 、 $\Sigma M_o = m - M_x = 0$ 、 $M_x = +m$ となる。

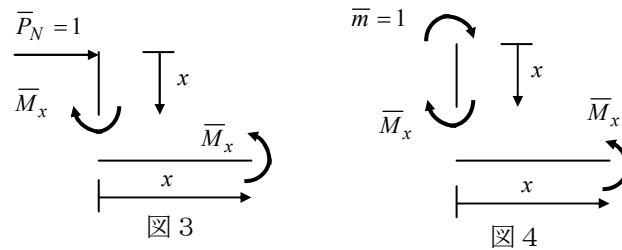


図 3 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ $\Sigma M_o = x + \bar{M}_x = 0$ 、 $\bar{M}_x = -x$ 、 $\Sigma M_o = 4 - \bar{M}_x = 0$ 、 $\bar{M}_x = +4$ となる。ゆえに

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^4 \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^4 \frac{(-m)(-x)}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{(m)(+4)}{EI} dx \\ &= \frac{m}{EI} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + \frac{m}{EI} [4x]_0^{12} = \frac{56m}{EI} \end{aligned} \quad \text{が得られる。}$$

図 4 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ $\Sigma M_o = 1 + \bar{M}_x = 0$ 、 $\bar{M}_x = -1$ 、 $\Sigma M_o = 1 - \bar{M}_x = 0$ 、 $\bar{M}_x = +1$ となる。ゆえに

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^4 \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^4 \frac{(-m)(-1)}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{(m)(+1)}{EI} dx \\ &= \frac{m}{EI} [x]_0^4 + \frac{m}{EI} [x]_0^{12} = \frac{16m}{EI} \end{aligned} \quad \text{が得られる。}$$

問 17 図 1 は静定ラーメンで図 2 は静定トラス（3 ピン構造）である。部材断面は 1 辺 D の正方形でヤング率は E である。以下の問いに答えよ。（横国院 19）

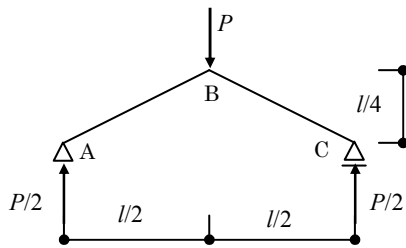


図 1

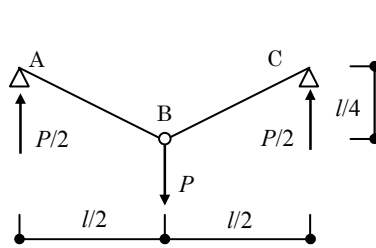


図 2

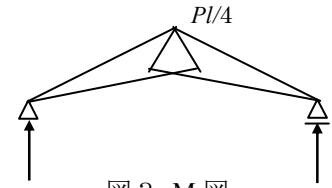


図 3 M 図

(1) 曲げモーメント図、軸力図とせん断力図を描け。

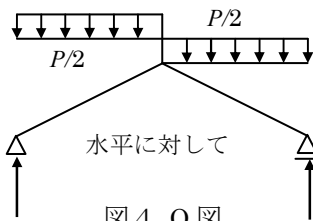


図 4 Q 図

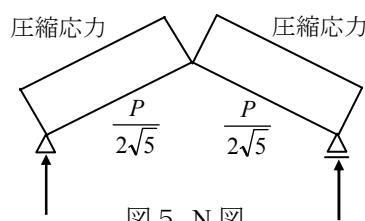


図 5 N 図

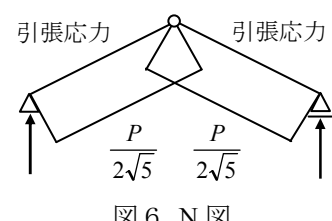


図 6 N 図

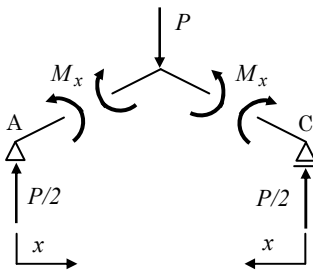


図 7 基本構

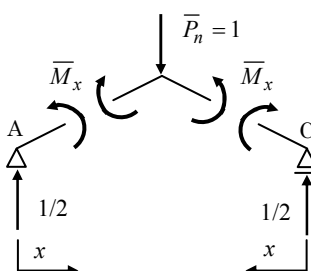


図 8 余力

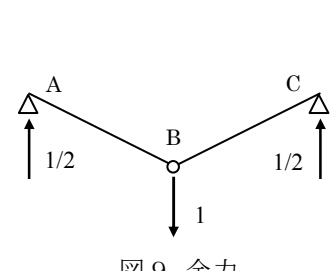


図 9 余力

図 3 から図 5 はラーメンの、図 6 はトラスの応力図である。トラスは曲げモーメントとせん断力は生じない。

(2) C 点の鉛直変位を求めよ。

図 7 の基本構で、A 点と C 点から水平に任意の距離 x にある曲げモーメントは $M_x = Px/2$ 、図 8 の余力の場合は $\bar{M}_x = x/2$

$$\delta_C = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{Px}{2} \right) \cdot \left(\frac{x}{2} \right) dx = \frac{P}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{l/2} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

$$\text{トラスの場合は、} \delta_C = \Sigma \frac{NNL}{EA} = 2 \times \frac{\frac{P}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} l}{EA} = \frac{\sqrt{5}}{20EA} Pl$$

問 18 図 1 と図 2 の片持梁で A 点の鉛直変位と回転角を求めよ。但し部材のヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。(横国院)

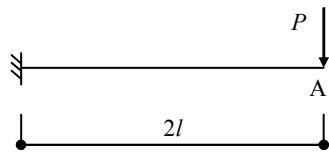


図 1

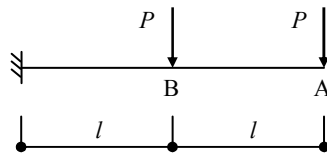


図 2

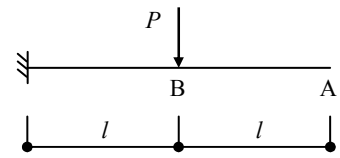


図 3

(解) 図 1 はモールの定理で容易に解ける。図 2 の場合は図 1 と図 3 の重ね合わせにより求めることができる。(問 7 の別解を参照)