

4. 2 部材力

問1 図1のようにZ-Z軸上に荷重 P を作用させたとき、断面A点、B点、C点及びD点上に生ずる応力度を求めよ。また引張りか圧縮かも区別せよ。

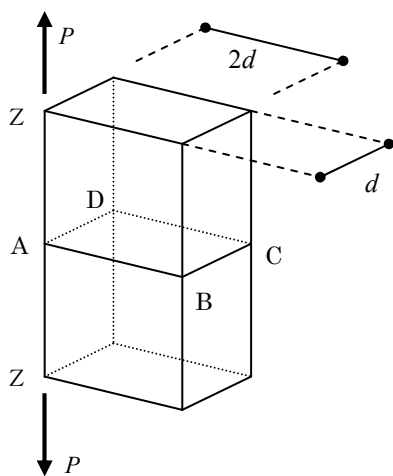


図1

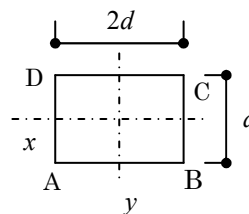


図2

(解) X軸についての曲げモーメントは $M_x = Pd/2$

Y軸についての曲げモーメントは $M_y = Pd$

X軸についての断面係数は $Z_x = 2d \times d^2/6 = d^3/3$

Y軸についての断面係数は $Z_y = d \times (2d)^2/6 = 2d^3/3$

$$\text{A点について、} \sigma_A = +\frac{P}{2d^2} + \frac{M_x}{Z_x} + \frac{M_y}{Z_y} = +\frac{P}{2d^2} + \frac{Pd}{2} \times \frac{3}{d^3} + Pd \times \frac{3}{2d^3} = \frac{7P}{2d^2}$$

$$\text{B点について、} \sigma_B = +\frac{P}{2d^2} + \frac{M_x}{Z_x} - \frac{M_y}{Z_y} = +\frac{P}{2d^2} + \frac{Pd}{2} \times \frac{3}{d^3} - Pd \times \frac{3}{2d^3} = \frac{P}{2d^2}$$

$$\text{C点について、} \sigma_C = +\frac{P}{2d^2} - \frac{M_x}{Z_x} - \frac{M_y}{Z_y} = +\frac{P}{2d^2} - \frac{Pd}{2} \times \frac{3}{d^3} - Pd \times \frac{3}{2d^3} = -\frac{5P}{2d^2}$$

$$\text{D点について、} \sigma_D = +\frac{P}{2d^2} - \frac{M_x}{Z_x} + \frac{M_y}{Z_y} = +\frac{P}{2d^2} - \frac{Pd}{2} \times \frac{3}{d^3} + Pd \times \frac{3}{2d^3} = \frac{P}{2d^2}$$

問2 図1のようにA点に荷重 P を作用させたとき、断面積 S のB点に生じる応力度を求めよ。

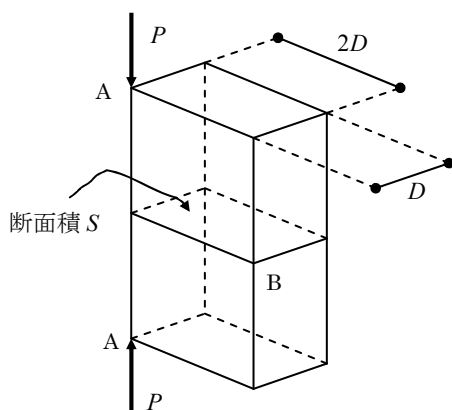


図1

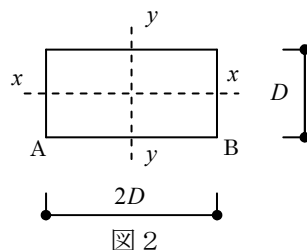


図2

(解答) 図2から x - x 、 y - y 軸に対する外力による曲げモーメントと断面係数は

$$M_x = PD/2, \quad M_y = PD, \quad Z_x = \frac{2D \times D^2}{6} = \frac{D^3}{3}, \quad Z_y = \frac{D \times (2D)^2}{6} = \frac{2D^3}{3}$$

断面 S に対する圧縮応力度は $\sigma_c = \frac{P}{2D^2}$ となる。 x - x 軸に対する曲げモーメントによるB点の応力度は

圧縮応力度で $\sigma_b = \frac{M_x}{Z_x} = \frac{PD}{2} \times \frac{3}{D^3} = \frac{3P}{2D^2}$ である。同様に y - y 軸に対する曲げモーメントによるB点の

応力度は引張り応力度で $\sigma_b = \frac{M_y}{Z_y} = PD \times \frac{3}{2D^3} = \frac{3P}{2D^2}$ である。

よってB点の応力度は引張りを(+)、圧縮を(-) 符号とすると

$$\sigma = -\frac{P}{2D^2} - \frac{3P}{2D^2} + \frac{3P}{2D^2} = -\frac{P}{2D^2}$$

のように圧縮応力度となる。

問3 図1のような偏心圧縮荷重 P を受ける短柱で、断面に引張り応力が生じない偏心距離 e の最大値を求めよ。 $P=300\text{kg}$ とする。

(解) 引張り応力が生じていないから、断面の圧縮応力は図2のようになる。そして、この応力状態で応力度の総和は P で、応力度の重心に作用していると考えられる。よって、 $e=24\text{cm}-16\text{cm}=8\text{cm}$ を得る。

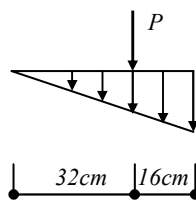


図2

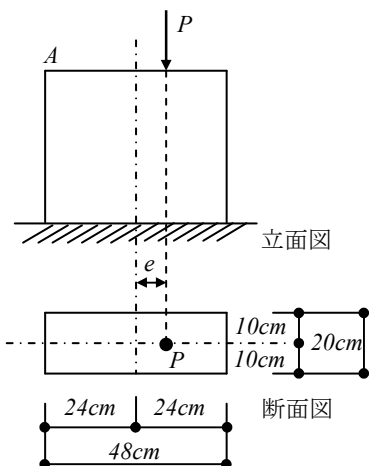


図1

別解として、圧縮応力度は、 $\sigma_c = \frac{300\text{kg}}{20\text{cm} \times 48\text{cm}}$ となる。断面に生じる

曲げモーメントは $M = Pe$ で断面係数は $Z = \frac{20\text{cm} \times (48\text{cm})^2}{6}$ となる。

引張り応力度は、 $\sigma_t = \frac{M}{Z}$ から、 $M = \sigma_t \cdot Z$ だから

$$300e = \frac{300}{20 \times 48} \cdot \frac{20 \times (48)^2}{6} \quad (1)$$

となり、 $e = 8\text{cm}$ を得る。ここで、両辺の荷重項（ 300kg ）に着目すると、加わる荷重の大きさに係わらず、偏心距離は $e = 8\text{cm}$ となることが分かる。

問4 図1のような長方形断面の柱に鉛直力 $P = 600\text{kN}$ 、水平力 $Q = 30\text{kN}$ が作用している。下端は固定支持されており、上端は自由端である。柱のヤング係数は $E = 20000\text{kN/mm}^2$ である。柱に生じる垂直応力度の許容値が $\sigma = 24\text{N/mm}^2$ であるとき柱の安全性を検討せよ。柱の自重は無視する。

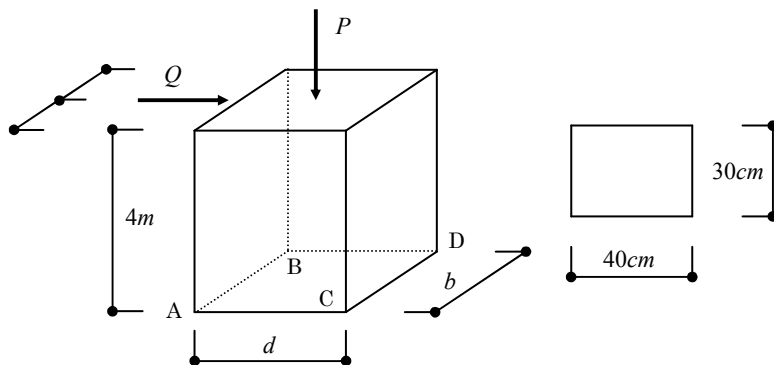


図1

(解) 外力 Q により、固定端のA-C部とC-D部に等価の最大引張応力度と最大圧縮応力度が生じる。また P により断面に一樣な圧縮応力度が生じている。とって、最大応力度はC-D部に生じて圧縮応力度となる。

$$\sigma_{\max} = M/Z + P/A$$

$$M = Ql = 4Q, \quad Z = bd^2/6, \quad A = 30\text{cm} \times 40\text{cm}$$

問5 図1で固定端に生じる垂直応力度の最大値と最小値を求めよ。

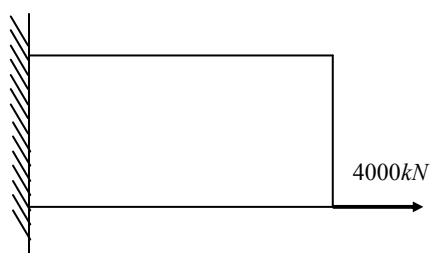


図1

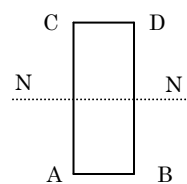
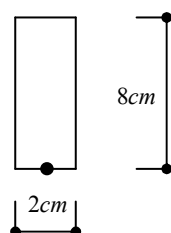


図2

(解) 部材断面には、断面一樣に生じる引張応力度と、図2の中立軸に関する曲げモーメントにより生じるA-B端の引張応力度とC-D端の圧縮応力度がある。引張応力度は $\sigma_t = P/A$ で、曲げモーメントによる圧縮応力度は $\sigma_c = M/Z$ 、引張応力度は $\sigma_t = M/Z$ である。よって、垂直応力度の最大値はA-B端に生じ引張応力度で、最小値はC-D端に生じ引張応力度か圧縮応力度かは計算する必要がある。

$$\sigma_t = P/A = 4000\text{kN}/16\text{cm}^2 = 250\text{kN/cm}^2, \quad Z = bh^2/6 = 2 \times 8^2/6 = 64/3\text{cm}^3,$$

$$M = P \times (h/2) = 4000 \times 4 = 16000\text{kNcm}, \quad \sigma_t = M/Z = \frac{16000}{64/3} = 750\text{kN/cm}^2, \quad \sigma_c = -750\text{kN/cm}^2$$

$$\sigma_{AB} = 250 + 750 = 1000\text{kN/cm}^2, \quad \sigma_{CD} = 250 - 750 = -500\text{kN/cm}^2 \quad (\text{圧縮})$$

問6 図1に示すベイマツの梁に $6kN/m$ の等分布荷重が作用している。

但しベイマツは、曲げ許容応力度 $F_b = 29.4N/mm^2$ 、

せん断許容応力度 $F_s = 3.6N/mm^2$ とする。

曲げとせん断の長期許容応力度を求めよ。

$$b = 10cm, \quad h = 35cm$$

(解) 最大曲げモーメントと最大せん断力は B 点で

$$M_B = 12kN \times 1m = 12kNm = 1200kNcm, \quad Q_B = 12kN$$

$$Z = bh^2/6 = 10 \times 35^2/6 = 6125/3cm^3$$

$$\sigma_B = \frac{M}{Z} = \frac{12000kNcm}{\frac{6125cm^3}{3}} = 0.5877kN/cm^2 = 587.7N/cm^2 = 5.877N/mm^2$$

$$\tau_B = \frac{1.5Q}{bh} = \frac{1.5 \times 12000N}{10 \times 35cm^2} = 51.43N/cm^2 = 0.5143N/mm^2$$

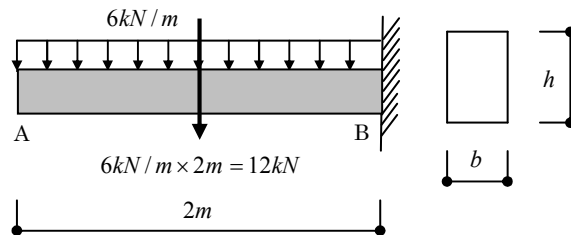


図1

問7 図1のような下端が固定された長方形断面の柱に鉛直力 $P = 4000kN$ が作用している。柱のヤング係数は $E = 2.4 \times 10^4 N/mm^2$ とする。固定端に生じる垂直応力度の最大値と最小値を求めよ。

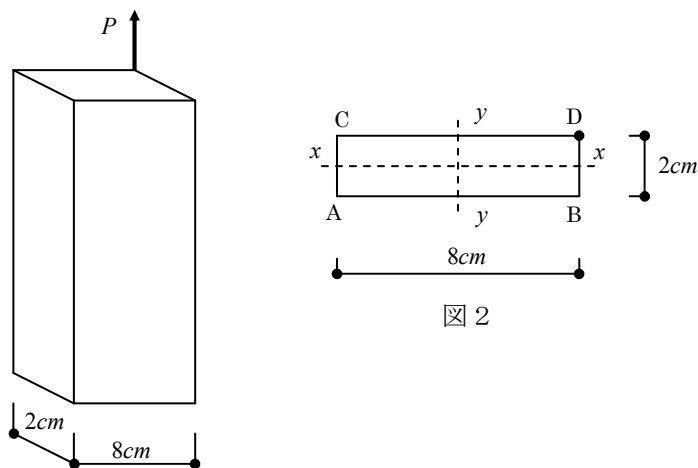


図2

図1

(解)

図2から、外力 P は xx 軸と yy 軸に関して、それぞれ次のような曲げモーメントを生じさせる。

$M_x = P \times 1cm$ と $M_y = P \times 4cm$ である。 M_x は A 点と B 点に圧縮応力、C 点と D 点に引張応力を、 M_y は A 点と C 点に圧縮応力、B 点と D 点に引張応力を生じさせる。

$Z_x = 8 \times 2^2/6 = 16/3cm^3$ 、 $Z_y = 2 \times 8^2/6 = 64/3cm^3$ で各点の応力度を求めると

$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{M_x}{Z_x} - \frac{M_y}{Z_y} = \frac{4000kN}{16cm^2} - \frac{4000kNcm}{16cm^3} \times 3 - \frac{16000kNcm}{64cm^3} \times 3 = -1250kN/cm^2$$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} - \frac{M_x}{Z_x} + \frac{M_y}{Z_y} = \frac{4000kN}{16cm^2} - \frac{4000kNcm}{16cm^3} \times 3 + \frac{16000kNcm}{64cm^3} \times 3 = 250kN/cm^2$$

$$\sigma_C = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{Z_x} - \frac{M_y}{Z_y} = \frac{4000kN}{16cm^2} + \frac{4000kNcm}{16cm^3} \times 3 - \frac{16000kNcm}{64cm^3} \times 3 = 250kN/cm^2$$

$$\sigma_D = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{Z_x} + \frac{M_y}{Z_y} = \frac{4000kN}{16cm^2} + \frac{4000kNcm}{16cm^3} \times 3 + \frac{16000kNcm}{64cm^3} \times 3 = 1750kN/cm^2$$

問8 図1に示すベイマツの梁について、次の設問に答えよ。但しベイマツは、曲げ許容応力度 $F_b = 29.4N/mm^2$ 、せん断許容応力度 $F_s = 3.6N/mm^2$ とする。

曲げとせん断の長期許容応力度を求めよ。

(解) 最大曲げモーメントは梁中央で

$$M_C = wl^2/8 = 10 \times 4^2/8 = 20kNm \text{ となる。}$$

$$= 2000kNcm = 20000kNmm$$

梁の断面を $b = 12cm$ 、 $h = 20cm$ と仮定すると、

断面係数は $Z = bh^2/6 = 12 \times 20^2/6 = 800cm^3$ となる。

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{2000kNcm}{800cm^3} = 2.5kN/cm^2 \text{ から、最大せん断応力は梁両端に生じ } Q_{\max} = 20kN \text{ である。}$$

$$\tau = 1.5Q/A = 1.5 \times 20kN/240cm^2 = 0.125kN/cm^2 = 125N/cm^2$$

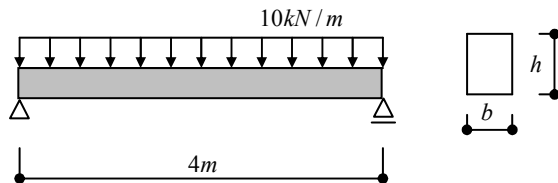


図1

問9 図1のような単純梁に等分布荷重が作用しているとき、部材の許容応力度と変形のチェックを行え。ヤング係数は $E = 20000N/mm^2$ 、許容応力度は $\sigma = 20N/mm^2$ である。変形の許容値は $1/300$ とし梁の自重は無視する。

(解) 部材の断面係数は、 $Z = 30 \times 40^2/6 = 8000cm^3$

最大曲げモーメントは梁中央に生じて

$$M_{\max} = wl^2/8 = 50 \times 6^2/8 = 225kNm$$

最大圧縮(引張)応力度は、 $\sigma_{\max} = M_{\max}/Z = 225kN \times 100cm/8000cm^3 = 2812.5N/cm^2 = 28.125M/mm^2$

撓みは仮想仕事法で計算する。

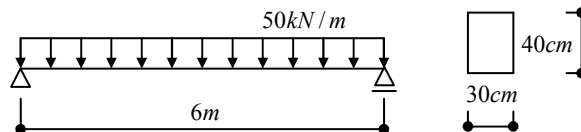


図1

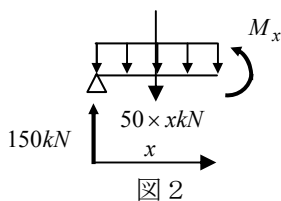


図2

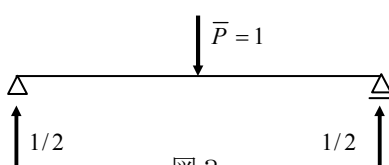


図3

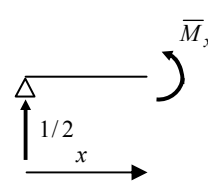


図4

図2から、 $\Sigma M = 150x - 50x(x/2) - M_x = 0$ から、 $M_x = 150x - 25x^2$

図3のような仮想荷重を作用させると、図4のように、 $\Sigma M = 1/2x - \bar{M}_x = 0$ から、 $\bar{M}_x = 1/2x$

左右対称だから左半分を解いて2倍すれば中央の撓みが得られる。

$$EI\delta = 2 \int_0^{l/2} \bar{M}_x M_x dx = 2 \int_0^{l/2} (150x - 25x^2)(x/2) dx = \left[50x^3 - 25x^4/4 \right]_0^{l/2} = 843.75m^3$$

$$\delta = \frac{843.75 \times 100 \times 100 \times 100cm^3}{\frac{20000N \times 10 \times 10}{cm^2} \times 160000cm^4} = 26.37 \times 10^{-4}cm$$

問 10 図 1 のような変断面を P で引張ときの伸びを求めよ。但し A 断面は直径 4cm の、B 断面は直径 1cm の円でヤング係数は $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ である。

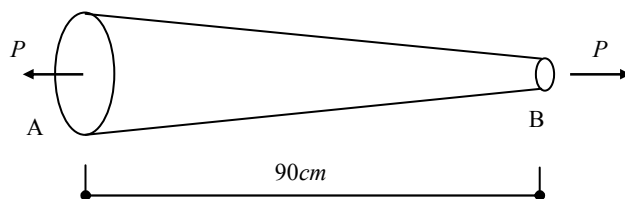


図 1

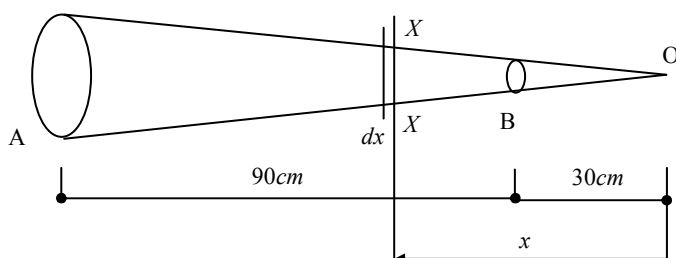


図 2

(解) 図 2 から、O 点より x の距離にある円断面の直径は $x/30$ だから、その面積は $S(x) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{30} \right)^2$ 。

任意の点 x の微小長さ dx の伸びを $d\delta$ とすると、 $d\delta = \frac{P}{S(x) \cdot E} dx = \frac{P}{E} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{900}{x^2} dx$ 。

全体の伸びは、

$$\delta = \int \frac{P}{S(x) \cdot E} dx = \int_{30}^{120} \frac{P}{E} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{900}{x^2} dx = \frac{3600P}{\pi E} \left[-\frac{1}{x} \right]_{30}^{120} = \frac{3600P}{\pi \times 2.1 \times 10^6} \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{120} \right) = 13.65P \times 10^{-6}$$

問 11 図 1 のような単純梁に曲げモーメントが作用している。A 点と部材中間の最大曲げ応力度が等しくなるように、部材 B の断面の高さ y を求めよ。但し、A 点の断面と B 点の断面は図 2、図 3 に示す。また断面は一様に変化するものとする。

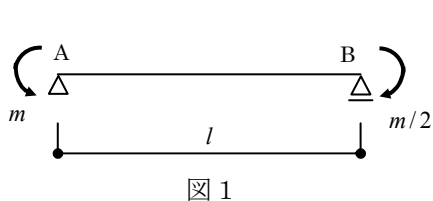


図 1

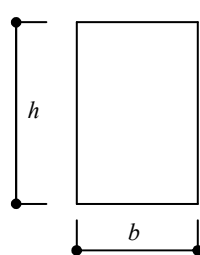


図 2 A 断面

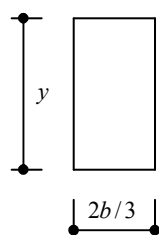


図 3 B 断面

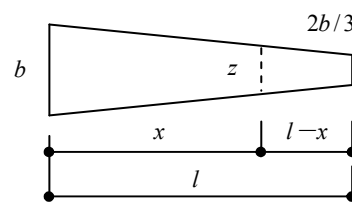


図 4

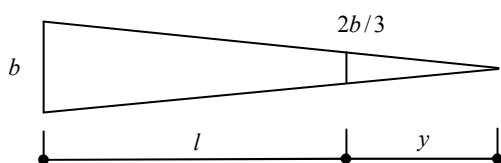


図 5

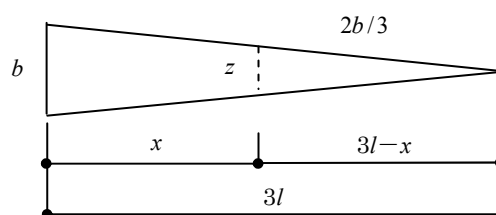


図 6

(解) A 点の反力は上向きに $R_A = m/2l$ である。よって A 点から任意の点 x の曲げモーメントは

$$M_x = -m + R_A x = -m + \frac{mx}{2l} \quad (1)$$

図5で三角形の相似から、 $\frac{2b/3}{y} = \frac{b}{l+y}$ より $y=2l$ 。図6から z を求めると(2)式である。

図4から x 点の断面の幅 z と断面係数は

$$z = b \cdot \left(1 - \frac{x}{3l}\right) \quad (2)$$

$$Z_x = \frac{b}{6} \cdot \left(1 - \frac{x}{3l}\right) \cdot y^2 \quad (3)$$

よって x 点の最大曲げ応力度は、 $\sigma_x = \frac{M_x}{Z_x} = \frac{6m}{b} \cdot \frac{3l(2l-x)}{2l(3l-x)y^2}$ で A 点は $\sigma_A = \frac{6m}{bh^2}$ である。題意より

$$\frac{6m}{b} \cdot \frac{3l(2l-x)}{2l(3l-x)y^2} = \frac{6m}{bh^2} \text{ から、 } y = \sqrt{\frac{3(2l-x)}{2(3l-x)}} \cdot h \quad (4)$$

を得る。 $x=l$ のときは $y = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot h \cong 0.866h$

問12 図1、図2のような断面と持つ梁の E 点に圧縮力 P を作用させたとき、A・D 端から $h/4$ の位置に中立軸が生じた。このとき、引張側と圧縮側のヤング係数の比と最大垂直応力度を求めよ。

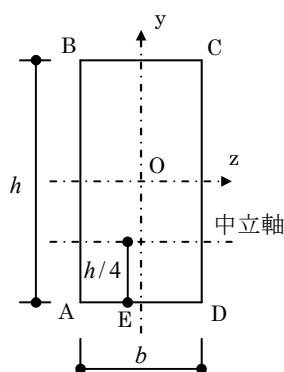


図1

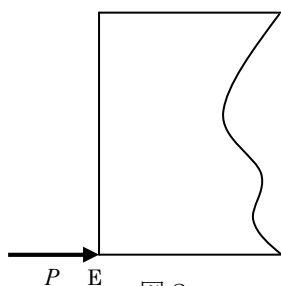


図2

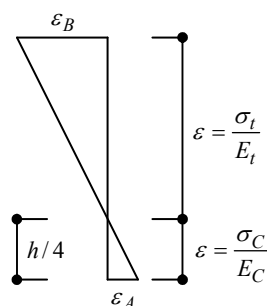


図3 変形

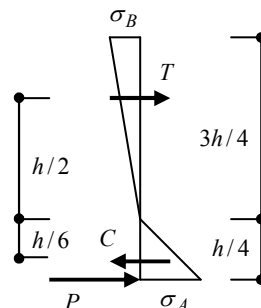


図4 応力

(解) 図3の変形図から、 $\frac{\varepsilon_B}{3} = \frac{\varepsilon_A}{1} \quad (1)$

ここで、 $E_t : E_c = 1 : k$ とすると、 $\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E_t}$ 、 $\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E_c} = \frac{\sigma_A}{kE_t}$ から、 $\frac{\sigma_B}{3E_t} = \frac{\sigma_A}{kE_t}$ となり

$$\sigma_A = k\sigma_B / 3 \quad (2)$$

図4の x 方向の釣り合いから $\Sigma x = P - C + T = P - \sigma_A \times b \times \frac{h}{4} \times \frac{1}{2} + \sigma_B \times b \times \frac{3h}{4} \times \frac{1}{2} = 0$ で(2)式を代入す

$$\text{ると、} \left(\frac{k}{24} - \frac{3}{8} \right) \cdot bh\sigma_B = P \quad (3)$$

中立軸に対する曲げモーメントの釣り合いから $\Sigma M = \frac{bh\sigma_A}{8} \times \frac{h}{6} + \frac{3bh\sigma_B}{8} \times \frac{h}{2} - \frac{Ph}{4} = 0$ となり

で $\frac{bh\sigma_A}{12} + \frac{3bh\sigma_B}{4} = P$ を得て(2)式を代入すると

$$\left(\frac{k}{36} + \frac{3}{4}\right) \times bh\sigma_B = P \quad (4)$$

(3)式(4)式を解くと $k = 72 \times 9/8 = 81$ 、 $E_C = 81E_t$ となり(4)式に代入して

$$\sigma_B = \frac{P}{3bh}, \quad \sigma_A = \frac{9P}{bh}$$

問 13 図1のような荷重を受ける鉄骨構造による門形ラーメンにおいて、曲げモーメント及び柱脚の反力が図2のように求められている。曲げと軸方向力との組み合わせにより、柱の断面 A-A に生じる圧縮応力度の最大値を求めよ。

(条件) イ 断面 A-A は、はりのフランジの下端であり、柱脚からの高さ $2.5m$ の位置にある。

ロ 柱は、断面積 $8.0 \times 10^3 mm^2$ 、断面係数は $6.0 \times 10^5 mm^3$ とする。

ハ 柱脚は、ベースプレート位置において、ピン支持とする。

ニ 柱及び梁の影響は、無視するものとする。

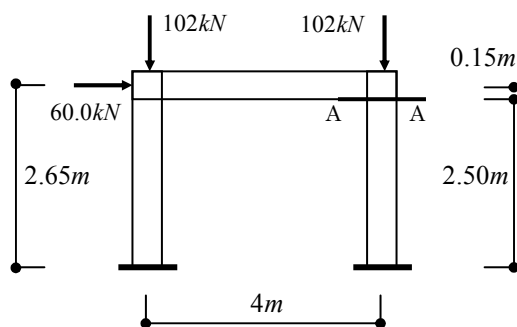


図 1

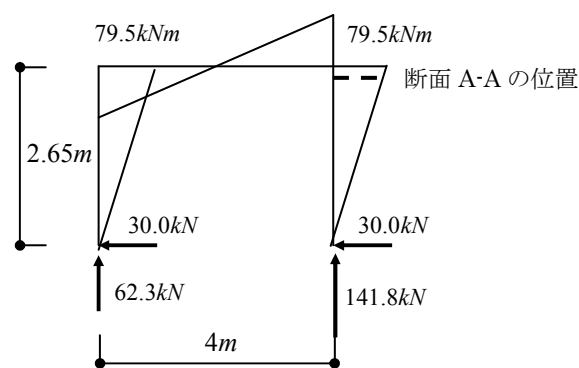


図 2

(解) 曲げと軸力を受ける鉄骨柱の応力度を求める式は $\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{Z}$ である。

ただし、 A : 部材の断面積、 Z : 部材の断面係数、 N : 部材の軸方向力、 M : 部材に生じる曲げモーメントとする。A-A 断面の軸方向力は柱に中間荷重がない場合は反力に等しいから

$\Sigma M = 60.0kN \times 2.65m + 102kN \times 4m - V_B \times 4m = 0$ より、 $V_B = 141.75kN$ となる。

$N = -141.75kN = -141.8 \times 10^3 N$ である。同様に A-A 断面に作用する曲げモーメントは、水平力 $60.0kN$ と距離 $2.50m$ との積 $M = 60 \times 10^3 N \times 2.5 \times 10^3 = 120 \times 10^6 Nmm$ である。

したがって、 $\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{Z} = -\frac{141.8 \times 10^3}{6 \times 10^3} \pm \frac{120 \times 10^6}{5 \times 10^5} = -23.6 \pm 240 = (+216.4) \text{ or } (-263.6)$ である。

よって $\sigma_C = -263.6 N/mm^2$ である。