

4. 3 境界・連続

問1 図1に示す棒のA点の垂直変位 δ_A を求めよ。但し、棒の断面積 A 、ヤング係数 E で自重は無視する。

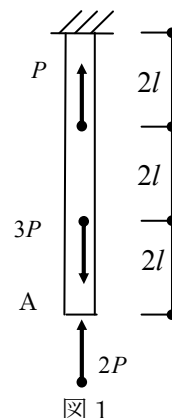
$$(\text{解}) \quad 2P \text{ による縮みは } \delta_1 = -\frac{2P \times 6l}{AE} = -\frac{12Pl}{AE}$$

$$3P \text{ による伸びは } \delta_2 = \frac{3P \times 4l}{AE} = \frac{12Pl}{AE}$$

$$P \text{ による縮みは } \delta_3 = \frac{P \times 2l}{AE} = -\frac{2Pl}{AE}$$

$$\text{よって } \delta_A = \frac{12Pl + 12Pl - 2Pl}{AE} = -\frac{2Pl}{AE}$$

A点は上方に縮む



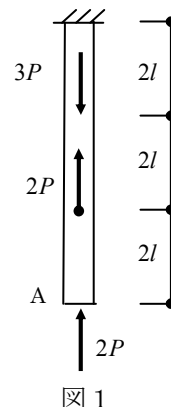
問2 図1に示す棒のA点の垂直変位 δ_A を求めよ。但し、棒の断面積 A 、ヤング係数 E で自重は無視する。

$$(\text{解}) \quad 2P \text{ による縮みは } \delta_1 = -\frac{2P \times 6l}{AE} = -\frac{12Pl}{AE}$$

$$2P \text{ による縮みは } \delta_2 = \frac{2P \times 4l}{AE} = -\frac{8Pl}{AE}$$

$$3P \text{ による伸びは } \delta_3 = \frac{3P \times 2l}{AE} = +\frac{6Pl}{AE}$$

$$\text{よって } \delta_A = \frac{-12Pl - 8Pl + 6Pl}{AE} = -\frac{14Pl}{AE} \text{ で A 点は上方に縮む}$$



問11 図1のような断面積が一定で長さが $6l$ である棒に、軸方向力 $2P$ 、 P 、 $2P$ が矢印の向きに作用している。このとき、棒の下端の軸方向変位の値を求めよ。ただし、棒の断面積を A 、ヤング係数を E とし自重は無視する。(20点)

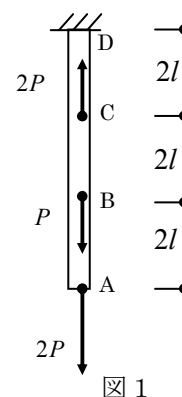
(解) A-B材に作用する応力は $2P$ の引っ張り応力、B-C材に作用する応力は $3P$ の引っ張り応力でC-D材には応力は P の引っ張り応力。よって、A-B材の伸びは $\delta_A = \frac{2P \times 2l}{AE}$ 、B-C材の伸びは

$$\delta_B = \frac{3P \times 2l}{AE}、C-D材の伸びは $\delta_C = \frac{P \times 2l}{AE}$ 、A点は下方に$$

$$\delta = \delta_A + \delta_B + \delta_C = \frac{4Pl}{AE} + \frac{6Pl}{AE} + \frac{2Pl}{AE} = \frac{12Pl}{AE}$$

$$\text{別解として } 2P \text{ による下方への伸びは } \delta_A = \frac{2P \times 6l}{AE} = \frac{12Pl}{AE}$$

$$\text{B 点の } P \text{ による下方への伸びは } \delta_B = -\frac{P \times 2l}{AE} = -\frac{2Pl}{AE}$$

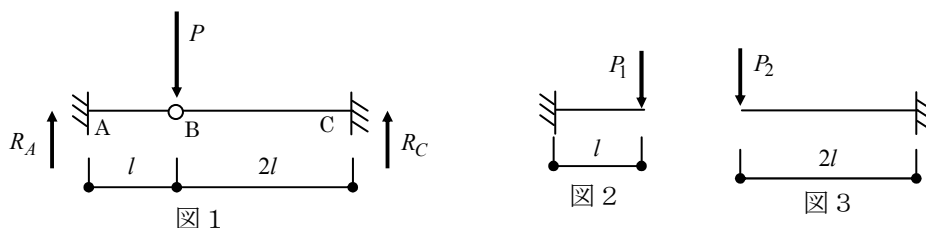


C 点の P による上方への縮みは $\delta_C = \frac{2P \times l}{AE} = \frac{2Pl}{AE}$

よって A 点の下方への伸びは $\delta = \delta_A + \delta_B + \delta_C = \frac{12Pl}{AE} + \frac{2Pl}{AE} - \frac{2Pl}{AE} = \frac{12Pl}{AE}$

問3 図1のような梁において、梁のヒンジである B 点に鉛直力 P が作用したとき、A 点と C 点の鉛直反力 R_A 、 R_C の絶対値の比を求めよ。ただし梁は等質等断面とする。

(解)



外力 P を図2と図3のように A・B 材が P_1 、B・C 材が P_2 負担するものとする。よって

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

両図のような、片持梁における自由端の鉛直変位は、 $\delta = Pl^3/3EI$ (E : ヤング係数、 I : 断面2次モーメント) である。

図2の B 点の鉛直変位は $\delta_{BA} = P_1 l^3/3EI$ 、図3の B 点の鉛直変位は $\delta_{BC} = P_2 (2l)^3/3EI = 8P_2 l^3/3EI$ となる。

ここで、梁の連続条件より、 $\delta_{BA} = \delta_{BC}$ であるから $\frac{P_1 l^3}{3EI} = \frac{8P_2 l^3}{3EI}$ で $P_1 = 8P_2$ となる。(1)式に代入すると $P_1 = R_A = 8P/9$ 、 $P_2 = R_C = P/9$ となる。

問4 図1のようにコンクリート充填鋼管柱に荷重 $P=2000kN$ が作用しているとき、柱の縮み量 δ を求めよ。鋼管の厚さは $t=1cm$ である。鋼管とコンクリートのヤング係数は $E_s = 200000N/mm^2$ 、 $E_c = 20000N/mm^2$ である。

(解)

鋼管の断面積: $A_s = 19cm \times 1cm \times 4 = 76cm^2$

鋼管のヤング係数

$$: E_s = 200000N/mm^2 = 2000N/cm^2$$

コンクリートの断面積: $A_c = 18 \times 18cm = 324cm^2$

コンクリートのヤング係数

$$: E_c = 20000N/mm^2 = 200N/mm^2$$

鋼管の負担する荷重を P_1 、コンクリートの負担する荷重を P_2 とする。

$$P_1 + P_2 = P \quad (1)$$

$$\text{鋼管とコンクリートの縮み量 } \delta \text{ は } \delta_s = \frac{P_1 l}{E_s A_s}, \quad \delta_c = \frac{P_2 l}{E_c A_c} \quad (2)$$

$\delta_s = \delta_c$ だから、 $\frac{P_1 l}{E_s A_s} = \frac{P_2 l}{E_c A_c}$ となり、 $P_1 = \frac{E_s A_s}{E_c A_c} P_2$ を(1)式に代入すると

$$P_1 = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P, \quad P_2 = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P \text{ となり、柱の縮み量は(2)式の何れかを採用して}$$

$$\delta_s = \frac{P_1 l}{E_s A_s} = \frac{Pl}{E_s A_s + E_c A_c}$$

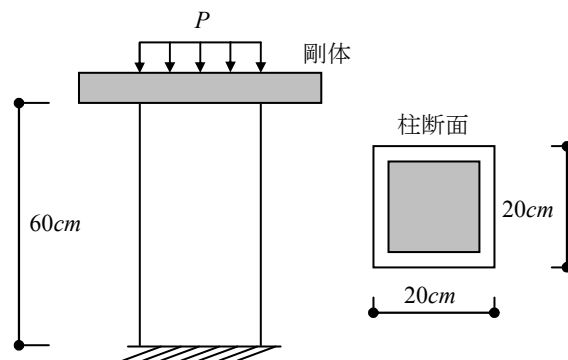


図1

問5 図1のように、上下の剛体に挟まれて圧縮力 P を受けている円柱がある。円柱はヤング係数が異なった部材で構成されている。このとき部材が縮む量 δ を求めよ。(難易度 B)

A : 断面積

E_A : A材のヤング係数

E_B : B材のヤング係数

(解) 部材のヤング係数の大小にかかわらず圧縮応力度はA、B材とも同じ値である。よって、A、B材の縮み量は

$$\delta_A = \frac{Ph}{E_A A}, \quad \delta_B = \frac{Ph}{E_B A} \quad (1)$$

部材全体の総縮み量は、 $\delta = \delta_A + \delta_B = \frac{Ph}{E_A A} + \frac{Ph}{E_B A}$ となる。

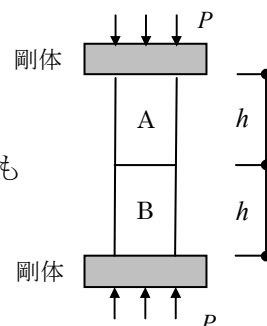


図1

問6 図1のように、上下の剛体に挟まれて圧縮力 P を受けている2本の円柱がある。円柱 A 、 B 、 C のヤング係数はそれぞれ E_A 、 E_B 、 E_C で断面積は全て A である。圧縮を受ける剛体は水平を保ったまま縮むものとする。このとき各部材が縮む量 δ_A 、 δ_B 、 δ_C を求めよ。(難易度A)

A : 断面積

E_A : A材のヤング係数

E_B : B材のヤング係数

E_C : C材のヤング係数

(解) 外力 P に対して、部材 A が負担する応力を P_1 、部材 B 、 C が負担する応力を P_2 とする。ヤング係数の大小にかかわらず圧縮応力度は B 、 C 材とも同じ値である。よって、 A 、 B 、 C 材の縮み量は

$$P_1 + P_2 = P \quad (1)$$

$$\delta_A = \frac{2P_1 h}{E_A A}, \quad \delta_B = \frac{P_2 h}{E_B A}, \quad \delta_C = \frac{P_2 h}{E_C A} \quad (2)$$

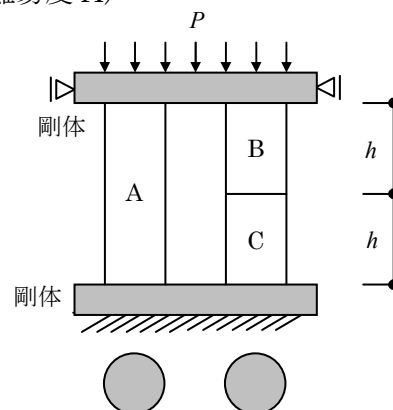


図1

部材全体の総縮み量 δ_A は、 $\delta_A = \delta_B + \delta_C$ となる。(2)式を代入すると、 $\frac{2P_1 h}{E_A A} = \frac{P_2 h}{E_B A} + \frac{P_2 h}{E_C A}$ となる。

整理すると、 $P_1 = \left(\frac{P_2}{E_B} + \frac{P_2}{E_C} \right) \times \frac{E_A}{2}$ で(1)式に代入して、

$$P_2 = \frac{2E_B E_C}{E_A E_B + 2E_B E_C + E_C E_A} P, \quad P_1 = \frac{E_A E_B + E_C E_A}{E_A E_B + 2E_B E_C + E_C E_A} P \text{ を得る。}$$

$$\text{よって、} \delta_A = \frac{P_1 (2h)}{E_A A} = \frac{2h}{E_A A} \cdot \frac{E_A E_B + E_C E_A}{E_A E_B + 2E_B E_C + E_C E_A},$$

$$\delta_B = \frac{P_2 h}{E_B A} = \frac{h}{E_B A} \cdot \frac{2E_B E_C}{E_A E_B + 2E_B E_C + E_C E_A}, \quad \delta_C = \frac{P_2 h}{E_C A} = \frac{h}{E_C A} \cdot \frac{2E_B E_C}{E_A E_B + 2E_B E_C + E_C E_A}$$

問7 図1のように、上下の剛体に挟まれて圧縮力 P を受けている2本の円柱がある。円柱 A 、 B 、 C のヤング係数はそれぞれ $2E$ 、 E 、 $3E$ で断面積は全て A である。圧縮を受ける剛体は水平を保ったまま縮むものとする。このとき各部材が縮む量 δ_A 、 δ_B 、 δ_C を求めよ。(難易度A)

A : 断面積

$2E$: A 材のヤング係数

E : B 材のヤング係数

$3E$: C 材のヤング係数

(解) 外力 P に対して、部材 A が負担する応力を P_1 、部材 B 、 C が負担する応力を P_2 とする。ヤング係数の大小にかかわらず圧縮応力度は B 、 C 材とも同じ値である。よって、 A 、 B 、 C 材の縮み量は

$$P_1 + P_2 = P \quad (1)$$

$$\delta_A = \frac{2P_1 h}{2EA}, \quad \delta_B = \frac{P_2 h}{EA}, \quad \delta_C = \frac{P_2 h}{3EA} \quad (2)$$

部材全体の総縮み量 δ_A は、 $\delta_A = \delta_B + \delta_C$ となる。(2)式を代入すると、 $\frac{2P_1 h}{2EA} = \frac{P_2 h}{EA} + \frac{P_2 h}{3EA}$ となる。

整理すると、 $P_1 = \frac{4}{3}P_2$ で(1)式に代入して、 $P_2 = \frac{3}{7}P$ 、 $P_1 = \frac{4}{7}P$ を得る。

よって、 $\delta_A = \frac{4Ph}{7EA}$ 、 $\delta_B = \frac{3Ph}{7EA}$ 、 $\delta_C = \frac{Ph}{7EA}$

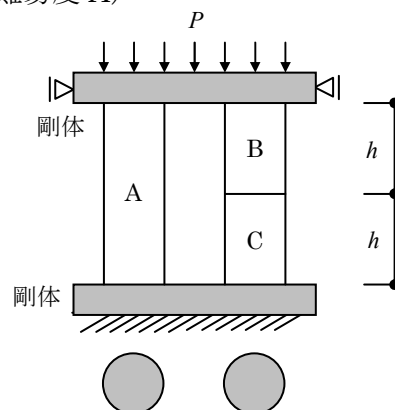


図1

問8 図1のような交差梁の交点Eに鉛直荷重 P が作用している。そのときA、B、C、D点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数は E 、断面2次モーメントを I とする。

(難易度 A)

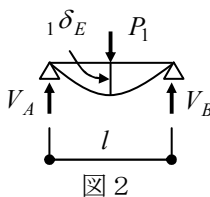
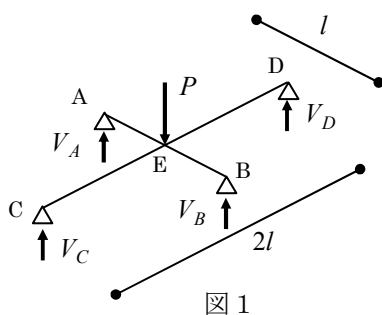


図2

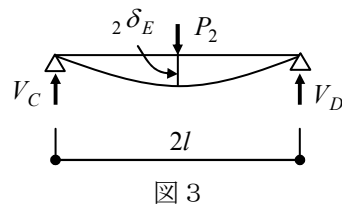


図3

(解) 梁A-B材とC-D材がE点で負担する外力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。図2の中央の撓みと図3の中央の撓みは、

$${}_1\delta_E = \frac{P_1 \cdot l^3}{48EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{P_2(2l)^3}{48EI} = \frac{8P_2 \cdot l^3}{48EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共E点での値であり、交差梁はE点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_1 = 8P_2 \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = 8P/9, \quad P_2 = P/9 \quad (5)$$

が得られ、反力は $V_A = V_B = P_1/2 = 4P/9$ 、 $V_C = V_D = P_2/2 = P/18$ となる。鉄筋コンクリート造のスラブの配筋を設計する場合、短辺方向(A-B材)の鉄筋がスラブに作用する積載荷重の大部分の応力(曲げモーメント)を負担していることに通じる。

問9 図1のような交差梁の交点 E に鉛直荷重 P が作用している。そのとき A 、 B 、 C 、 D 点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数は E 、断面2次モーメントを I とする。

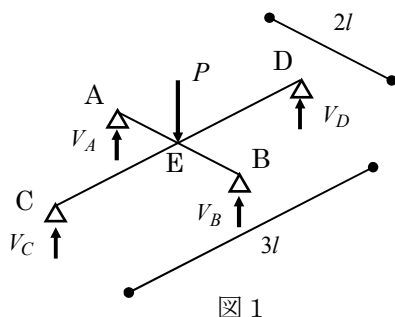


図1

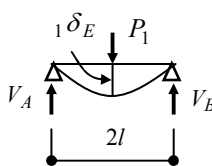


図2

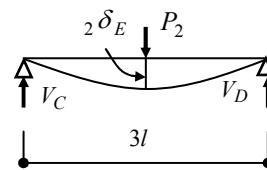


図3

(解) 梁 A - B 材と C - D 材が負担する外力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。図2の中央の撓みと図3の中央の撓みは、

$${}_1\delta_E = \frac{P_1 \cdot (2l)^3}{48EI} = \frac{8P_1 l^3}{48EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{P_2 (3l)^3}{48EI} = \frac{27P_2 \cdot l^3}{48EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共 E 点での値であり、交差梁は E 点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$8P_1 = 27P_2 \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = \frac{27P}{35}, \quad P_2 = \frac{8P}{35} \quad (5)$$

が得られ、反力は $V_A = V_B = \frac{P_1}{2} = \frac{27P}{70}$ 、 $V_C = V_D = \frac{P_2}{2} = \frac{8P}{70}$ となる。

問 10 図 1 のような交差梁の交点 E に鉛直荷重 P が作用している。そのとき A 、 B 、 C 、 D 点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数は E 、断面 2 次モーメントを I とする。

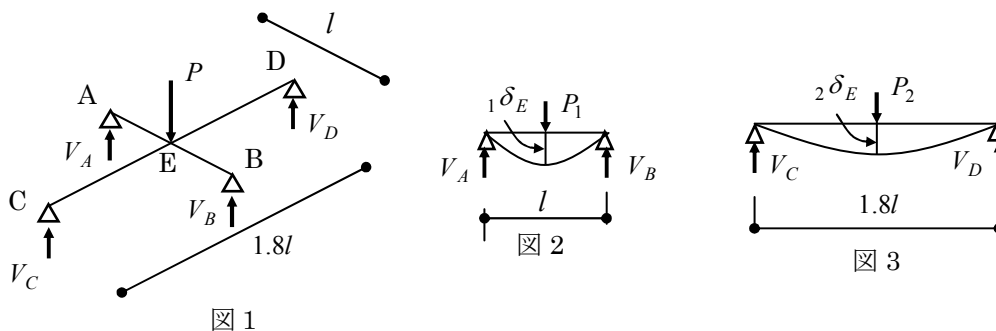


図 1

(解) 梁 A - B 材と C - D 材が負担する外力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。図 2 の中央の撓みと図 3 の中央の撓みは

$${}_1\delta_E = \frac{P_1 \cdot l^3}{48EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{P_2 (1.8l)^3}{48EI} = \frac{5.83 \cdot P_2 \cdot l^3}{48EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共 E 点での値であり、交差梁は E 点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_1 = 5.83P_2 \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = \frac{5.8P}{6.83}, \quad P_2 = \frac{P}{6.83} \quad (5)$$

が得られ、反力は $V_A = V_B = \frac{P_1}{2} = \frac{5.8P}{13.7}$ 、 $V_C = V_D = \frac{P_2}{2} = \frac{P}{13.7}$ となる。

問 11 図 1 のような交差梁の交点 E に鉛直荷重 P が作用している。そのとき A 、 B 、 C 、 D 点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数は E 、断面 2 次モーメントを I とする。

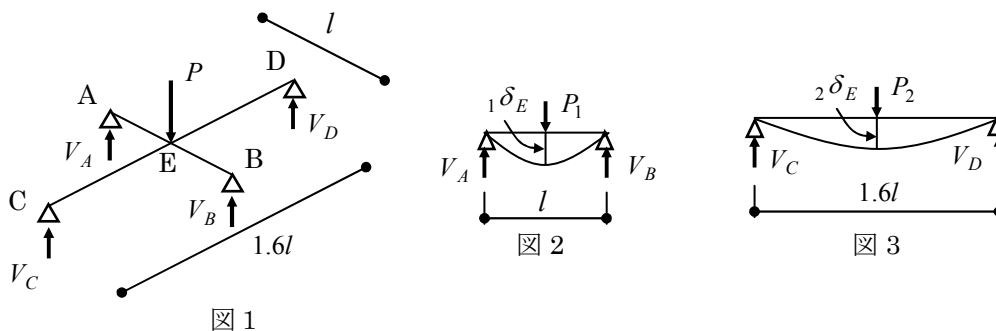


図 1

(解) 梁 A - B 材と C - D 材が負担する外力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。図 2 の中央の撓みと図 3 の中央の撓みは

$${}_1\delta_E = \frac{P_1 \cdot l^3}{48EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{P_2 (1.6l)^3}{48EI} = \frac{4.1P_2 \cdot l^3}{48EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共 E 点での値であり、交差梁は E 点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_1 = 4.1P_2 \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = \frac{4.1P}{5.1}, \quad P_2 = \frac{P}{5.1} \quad (5)$$

が得られ、反力は $V_A = V_B = \frac{P_1}{2} = \frac{4.1P}{10.2}$ 、 $V_C = V_D = \frac{P_2}{2} = \frac{P}{10.2}$ となる。

問 12 図 1 のような交差梁の交点 E に鉛直荷重 P が作用している。そのとき A 、 B 、 C 、 D 点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数は E 、断面 2 次モーメントを I とする。(15 点)

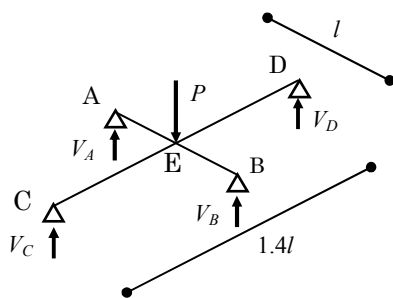


図 1

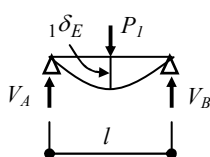


図 2

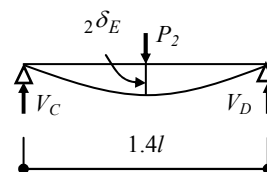


図 3

(解) 梁 A - B 材と C - D 材が負担する外力を P_1 、 P_2 とすると

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

となる。図 2 の中央の撓みと図 3 の中央の撓みは、

$${}_1\delta_E = \frac{P_1 l^3}{48EI} = \frac{P_1 l^3}{48EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{P_2 (1.4l)^3}{48EI} = \frac{2.74P_2 l^3}{48EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共 E 点での値であり、交差梁は E 点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_1 = 2.74P_2 \quad (4)$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると、 $P = 2.74P_2 + P_2$

$$P_1 = 0.73P, \quad P_2 = 0.27P \quad (5)$$

が得られ、反力は $V_A = V_B = P_1 / 2 = 0.37P$ 、 $V_C = V_D = P_2 / 2 = 0.14P$ となる。

問 13 図1のような交差梁の交点 E に鉛直荷重 P が作用している。そのとき A 、 B 、 C 、 D 点の反力を求めよ。但し部材断面は等質等断面で、ヤング係数は E 、断面2次モーメントを I とする。

(難易度 A)

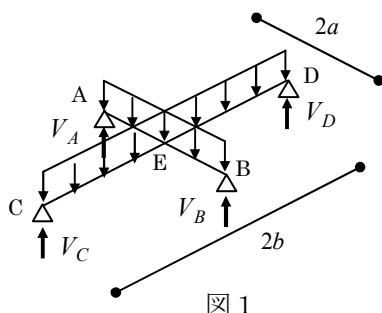


図 1

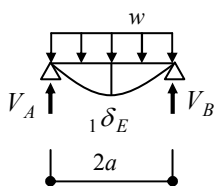


図 2

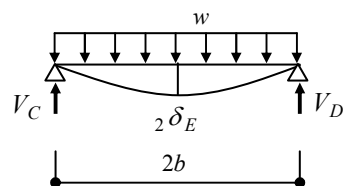


図 3

(解) 梁 A - B 材と C - D 材が負担する外力を P_1 、 P_2 とすると E 点に外力が作用していないから

$$P_1 + P_2 = 0 \quad (1)$$

となる。図2の中央の撓みと図3の中央の撓みは、

$${}_1\delta_E = \frac{5w(2a)^4}{384EI} + \frac{P_1(2a)^3}{48EI} = \frac{5wa^4}{24EI} + \frac{P_1a^3}{6EI}, \quad {}_2\delta_E = \frac{5w(2b)^4}{384EI} + \frac{P_2(2b)^3}{48EI} = \frac{5wb^4}{24EI} + \frac{P_2b^3}{6EI} \quad (2)$$

となる。両撓み共 E 点での値であり、交差梁は E 点で剛に接続していることから

$${}_1\delta_E = {}_2\delta_E \quad (3)$$

となる。(2)式を(3)式に代入すると

$$P_2 = \frac{a^3}{b^3} P_1 + \frac{5wa^4}{4b^3} - \frac{5wb^4}{4b^3}$$

となる。(4)式を(1)式に代入すると

$$P_1 = \frac{5w(b^4 - a^4)}{4(a^3 + b^3)}, \quad P_2 = \frac{5w(a^4 - b^4)}{4(a^3 + b^3)} \quad (5)$$

が得られる。反力は図4と図5から

$$V_A = V_B = \frac{P_1}{2} + \frac{2wa}{2} = \frac{w(3a^4 + 8ab^3 + 5b^4)}{8(a^3 + b^3)}, \quad V_C = V_D = \frac{P_2}{2} + \frac{2wb}{2} = \frac{w(5a^4 + 8a^3b + 3b^4)}{8(a^3 + b^3)}$$

となる。 $V_A + V_B + V_C + V_D = 2wa + 2wb$ が成立することを確認せよ。

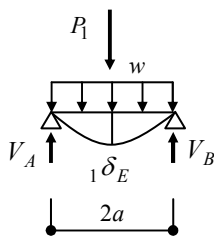


図 4

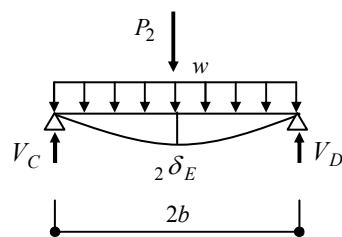


図 5

問 14 図 1 で B-D 材の軸方向力を求めよ。但し、B-D 材は剛体で両端はピンで接続されている。

ただし、部材 A-B、C-D-E の曲げ剛性を EI 、B-D 材は剛体とする。(横国院 19)

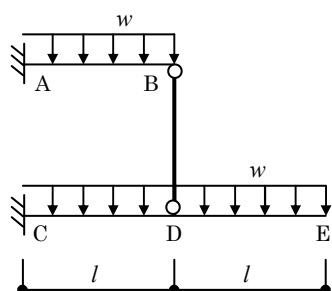


図 1

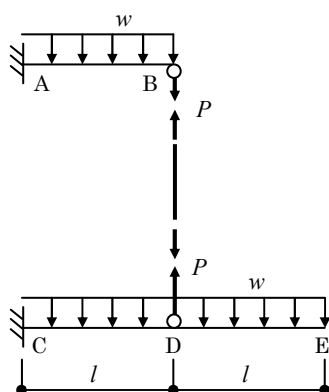


図 2

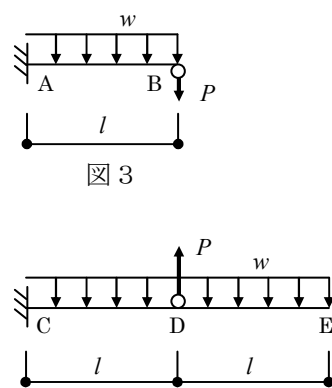


図 3

図 4

(解) この架構を図 2 のように 3 個の自由体に分ける。B-D 材の応力を引張としてその値を P とする。それらに相反する応力 P が上下架構に加わる。 P は上架構と下架構が相互に B-D 材に影響を及ぼすことから生じる。よって上架構の鉛直変位 δ_B と下架構の D 点の鉛直変位 δ_D を求め、B-D 材は剛体だから $\delta_B = \delta_D$ とすればよい。図 3 の等分布荷重と集中荷重の鉛直変位は結果だけ記す。

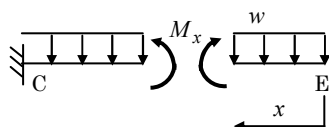


図 5

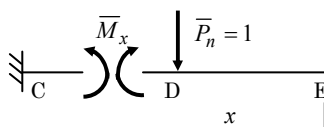


図 6

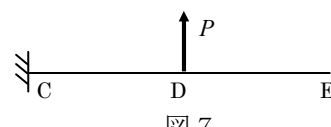


図 7

$${}_w\delta_B = \frac{wl^4}{8EI}, \quad {}_P\delta_B = \frac{Pl^3}{3EI} \text{ より } \delta_B = {}_w\delta_B + {}_P\delta_B = \frac{wl^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \text{ となる。図 6 の仮想荷重の位置から D-E}$$

間は $\bar{M}_x = 0$ である。図 5 と図 6 から等分布荷重による D 点の鉛直変位は

$$M_x = -wx^2/2, \quad \bar{M}_x = -(x-l)$$

$${}_w\delta_D = \frac{1}{EI} \int_l^{2l} M_x \bar{M}_x dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2l} \left(-\frac{wx^2}{2} \right) (l-x) dx = \frac{w}{2EI} \int_l^{2l} (x^3 - lx^2) dx = \frac{w}{2EI} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{lx^3}{3} \right]_l^{2l} = \frac{17wl^4}{24EI}$$

図 7 の D 点の鉛直変位は、図 3 の集中荷重 P だけの場合と方向は反対で値は等しい。

$${}_P\delta_D = -\frac{Pl^3}{3EI} \text{ となる。よって、} \delta_D = {}_w\delta_D + {}_P\delta_D = \frac{17wl^4}{24EI} - \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\delta_B = \delta_D \text{ だから、} \frac{wl^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{17wl^4}{24EI} - \frac{Pl^3}{3EI} \text{ で、} P \text{ について解くと } P = \frac{7wl}{8} \text{ の引張応力となる。}$$

問 15 図 1 で B-D 材の軸方向力を求めよ。但し、B-D 材は両端ピンで接続されている。部材 A-B と C-D-E の曲げ剛性を EI 、部材 B-D の断面積を A 、ヤング係数を E とする。

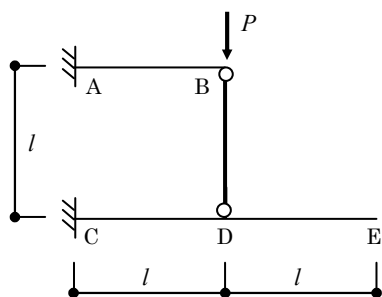


図 1

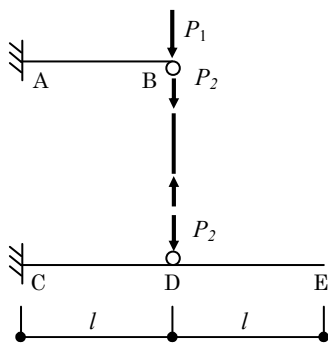


図 2

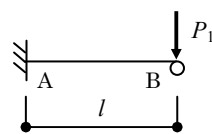


図 3

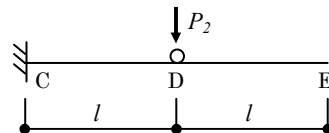


図 4

(解) この架構を図 2 のように 3 個の自由体に分ける。節点 B に作用する外力 P を梁 A-B が P_1 、B-D 材が P_2 を負担すると考える。また図 2 と図 3 から梁 A-B と B-D 材で B 点の鉛直変位は

$$P_1 + P_2 = P \quad (1)$$

また、 ${}_1\delta_B = \frac{P_1 l^3}{3EI}$ 、 $\delta_{BD} = \frac{P_2 l}{EA}$ だから、図 4 から、 P_2 により梁 C-D-E で D 点の鉛直変位 ${}_2\delta_D$ は

$${}_2\delta_D = \frac{P_2 l^3}{3EI} \text{ となる。連続条件から}$$

$$\delta_{BD} = {}_1\delta_B - {}_2\delta_D \quad (2)$$

$$(1)、(2) \text{ 式を解くと、 } \frac{P_2 l}{EA} = \frac{P_1 l^3}{3EI} - \frac{P_2 l^3}{3EI}、\frac{3I + Al^2}{3AI} P_2 = \frac{l^2}{3I} \cdot P_1、P_2 = \frac{Al^2}{3I + Al^2} \cdot P_1$$

$$P_1 = \frac{3I + Al^2}{3I + 2Al^2} \cdot P、P_2 = \frac{Al^2}{3I + 2Al^2} \cdot P \text{ (B-D 材は圧縮応力)}$$

問 16 図 1 で D 点の鉛直変位を求めよ。但し、B-D 材は両端ピンで接続されている。部材 A-B と C-D-E の曲げ剛性を EI 、部材 B-D 材は剛体とする。

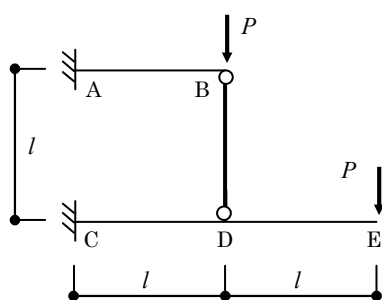


図 1

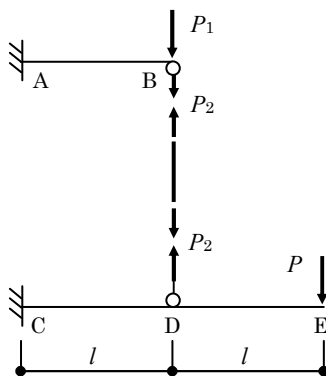


図 2

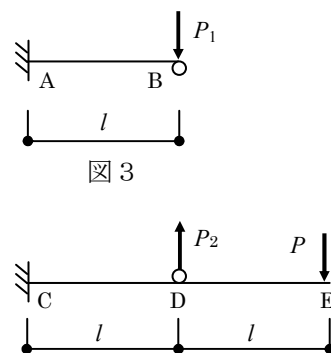


図 3

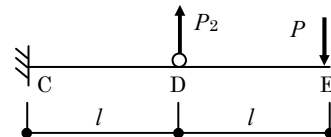


図 4

(解) この架構を図 2 のように 3 個の自由体に分けると、外力 P を梁が P_1 、B-D 材が P_2 負担する。

$$P_2 = P - P_1$$

(1)

図 3 から P_1 による梁 A-B の鉛直変位 ${}_1\delta_B = P_1 l^3 / 3EI$ が生じる。

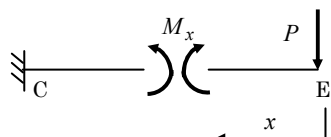


図 5

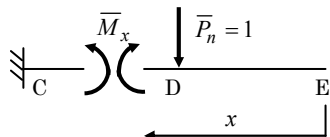


図 6

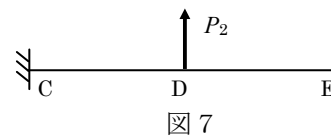


図 7

次に図 4 で P と P_2 による変位を別々に求める。図 7 の P_2 による D 点の鉛直変位は、図 3 の P_1 による場合と方向は反対で値は等しいから ${}_2\delta_D = -P_2 l^3 / 3EI$ となる。図 6 は図 5 と図 7 で D 点の鉛直変位を仮想仕事法で求めるときの余力であり、D-E 間は $\bar{M}_x = 0$ である。図 5 と図 6 から E 点から x の距離にある曲げモーメントは $M_x = -Px$ 、 $\bar{M}_x = -(x-l)$ となる。

$${}_P\delta_D = \frac{1}{EI} \int_l^{2l} M_x \bar{M}_x dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2l} (-Px)(l-x) dx = \frac{P}{EI} \int_l^{2l} (x^2 - lx) dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right]_l^{2l} = \frac{5Pl^3}{6EI}$$

よって、 $\delta_D = {}_P\delta_D + {}_2\delta_D = \frac{5Pl^3}{6EI} - \frac{P_2 l^3}{3EI}$ を得て ${}_1\delta_B = \delta_D$ だから、

$$\frac{P_1 l^3}{3EI} = \frac{5Pl^3}{6EI} - \frac{P_2 l^3}{3EI} \text{ で、(1)式を代入すると } P_1 = 4P、P_2 = -3P$$

問 17 図 1 で D 点の鉛直変位を求めよ。但し、B-D 材は両端ピンで接続されている。部材 A-B と C-D-E の曲げ剛性を EI 、部材 B-D 材は剛体とする。

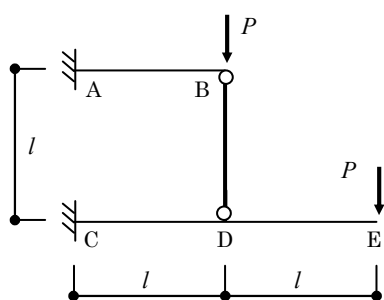


図 1

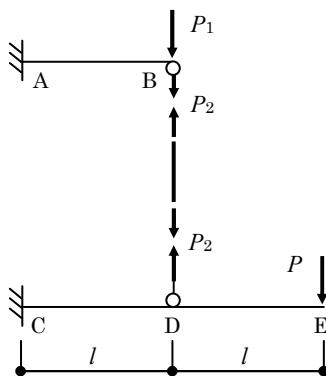


図 2

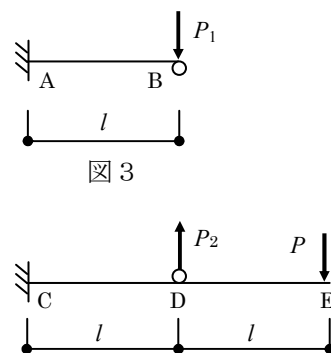


図 3

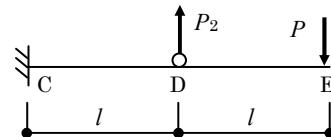


図 4

(解) この架構を図 2 のように 3 個の自由体として考える。よって、外力 P は梁が P_1 、B-D 材が P_2 負担する。

$$P = P_1 + P_2 \quad (1)$$

図 3 から P_1 による梁 A-B の B 点の鉛直変位は ${}_1\delta_B = P_1 l^3 / 3EI$ である。また、 P_2 による部材 B-D の伸縮は $\delta_{BD} = P_2 l / EA$ となる。

$$\delta_B = {}_1\delta_B + \delta_{BD} = \frac{P_1 l^3}{3EI} + \frac{P_2 l}{EA} \quad (2)$$

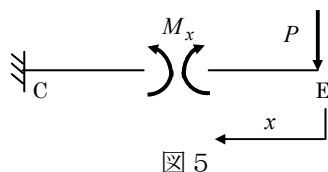


図 5

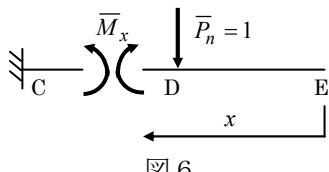


図 6

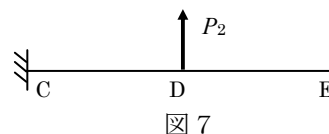


図 7

次に図 4 で P と P_2 による変位を別々に求める。図 7 の P_2 による D 点の鉛直変位は、図 3 の P_1 による場合と方向は反対で値は等しいから ${}_2\delta_D = -P_2 l^3 / 3EI$ となる。図 6 は図 5 と図 7 で D 点の鉛直変位を仮想仕事法で求めるときの余力であり、D-E 間は $\bar{M}_x = 0$ である。図 5 と図 6 から E 点から x の距離にある曲げモーメントは $M_x = -Px$ 、 $\bar{M}_x = -(x-l)$ となる。

$${}_P\delta_D = \frac{1}{EI} \int_l^{2l} M_x \bar{M}_x dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2l} (-Px)(l-x) dx = \frac{P}{EI} \int_l^{2l} (x^2 - lx) dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right]_l^{2l} = \frac{5Pl^3}{6EI}$$

$$\delta_D = {}_P\delta_D + {}_2\delta_D = \frac{5Pl^3}{6EI} - \frac{P_2 l^3}{3EI} \quad (3)$$

である。よって、 $\delta_B = \delta_D$ だから、(1)式、(2)式と(3)式から $P_2 = \frac{3PAI^2}{2(3I - 2Al^2)}$ を得る。