

5. 2 ラーメン

問1 図1のラーメンでC点の水平変位を応力法で求めよ。

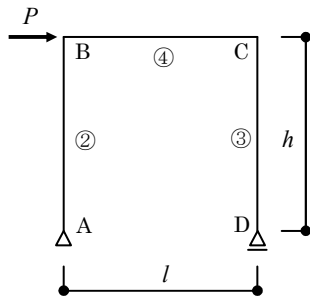


図1

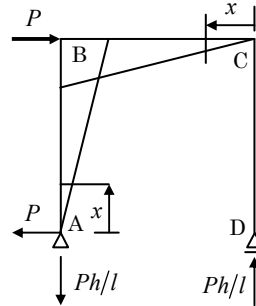


図2 基本構

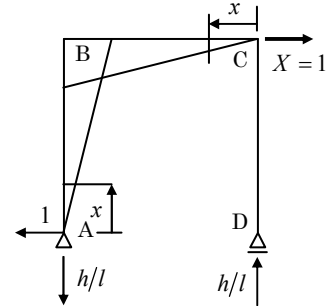


図3 余力

(解) 図2、図3のように基本構を定め、余力 $X_1=1$ をC点に作用させる。A点、C点から任意の距離 x にある曲げモーメントは、 $M_x = Px$ 、 $M_x = \frac{Ph}{l}x$ と $\bar{M}_x = x$ 、 $\bar{M}_x = \frac{h}{l}x$ となる。よってC点の水平

$$\text{変位は } \delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^h (Px) \cdot (x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Ph}{l} x \right) \cdot \left(\frac{h}{l} x \right) dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h + \frac{P}{EI} \cdot \frac{h^2}{l^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{Ph^3}{3EI} + \frac{Ph^2l}{3EI}$$

問2 図1のラーメンでD点の水平変位を応力法で求めよ。

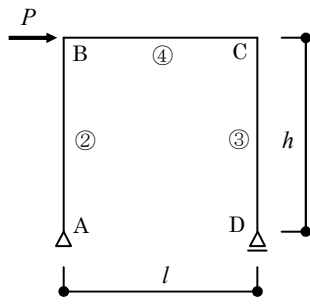


図1

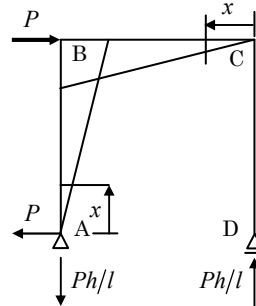


図2 基本構

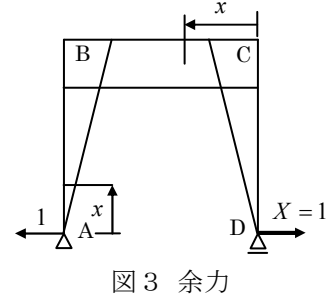


図3 余力

(解) 図2、図3のように基本構を定め、余力 $X_1=1$ をD点に作用させる。A点、C点から任意の距離 x にある曲げモーメントは、 $M_x = Px$ 、 $M_x = \frac{Ph}{l}x$ と $\bar{M}_x = x$ 、 $\bar{M}_x = h$ となる。よってD点の水平

$$\text{変位は } \delta_D = \frac{1}{EI} \int_0^h (Px) \cdot (x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Ph}{l} x \right) \cdot h dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h + \frac{P}{EI} \cdot \frac{h^2}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{Ph^3}{3EI} + \frac{Ph^2l}{2EI}$$

問3 図1のラーメンでA点の回転角を応力法で求めよ。

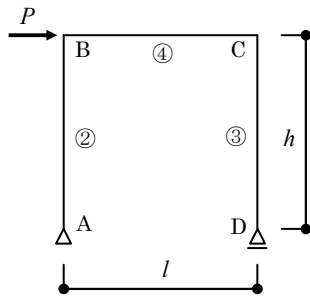


図1

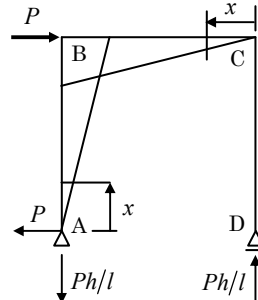


図2 基本構

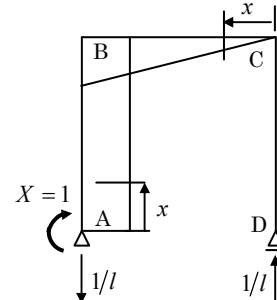


図3 余力

(解) 図2、図3のように基本構を定め、余力 $X_1=1$ をA点に作用させる。A点、C点から任意の距離 x にある曲げモーメントは、 $M_x = Px$ 、 $M_x = \frac{Ph}{l}x$ と $\bar{M}_x = 1$ 、 $\bar{M}_x = \frac{1}{l}x$ となる。よってA点の回転

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^h (Px) \cdot (1) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Ph}{l}x \right) \cdot \left(\frac{1}{l}x \right) dx = \frac{P}{EI} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h + \frac{P}{EI} \cdot \frac{h}{l^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{Ph^2}{2EI} + \frac{Phl}{3EI}$$

問4 図1のラーメンでB点の回転角を応力法で求めよ。

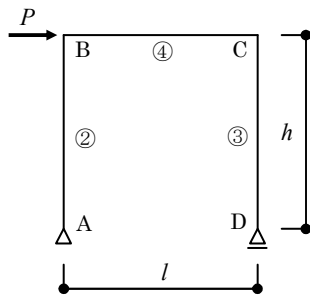


図1

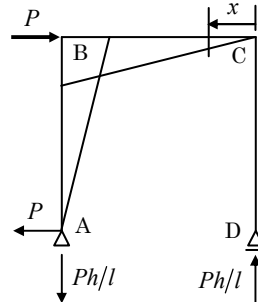


図2 基本構

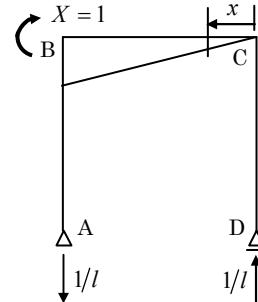


図3 余力

(解) 図2、図3のように基本構を定め、余力 $X_1=1$ をB点に作用させる。C点から任意の距離 x にある曲げモーメントは、 $M_x = \frac{Ph}{l}x$ と $\bar{M}_x = \frac{1}{l}x$ となる。よってB点の回転角は

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Ph}{l}x \right) \cdot \left(\frac{1}{l}x \right) dx = \frac{P}{EI} \cdot \frac{h}{l^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{Phl}{3EI}$$

問5 図1のラーメンでC点の回転角を応力法で求めよ。

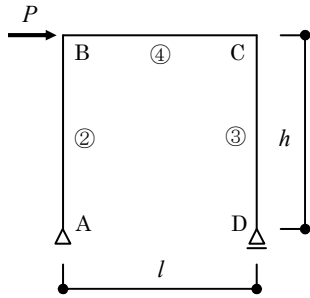


図1

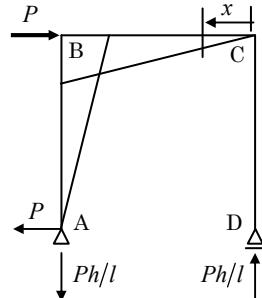


図2 基本構

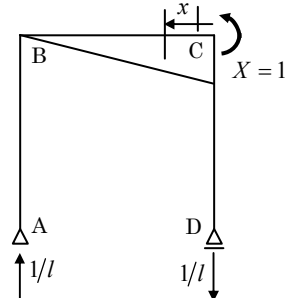


図3 余力

(解) 図2、図3のように基本構を定め、余力 $X_1=1$ をC点に作用させる。C点から任意の距離 x にある曲げモーメントは、 $M_x = \frac{Ph}{l}x$ と $\bar{M}_x = 1 - \frac{1}{l}x$ となる。よってC点の回転角は

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Ph}{l}x \right) \times \left(1 - \frac{1}{l}x \right) dx = \frac{P}{EI} \cdot \frac{h}{l} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} \right]_0^l = \frac{Phl}{6EI}$$

問6 図1のラーメンでD点の回転角を応力法で求めよ。

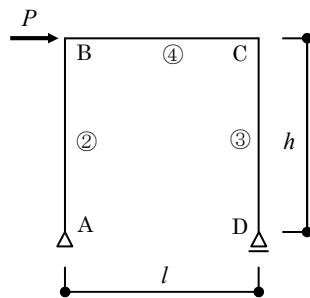


図1

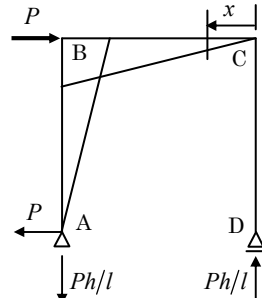


図2 基本構

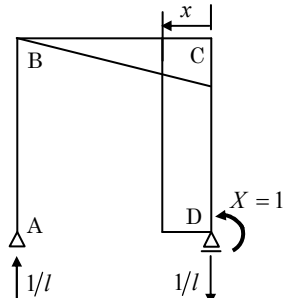


図3 余力

(解) 図2、図3のように基本構を定め、余力 $X_1=1$ をC点に作用させる。C点から任意の距離 x にある曲げモーメントは、 $M_x = \frac{Ph}{l}x$ と $\bar{M}_x = 1 - \frac{1}{l}x$ となる。よってD点の回転角は

$$\theta_D = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Ph}{l}x \right) \times \left(1 - \frac{1}{l}x \right) dx = \frac{P}{EI} \cdot \frac{h}{l} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} \right]_0^l = \frac{Phl}{6EI}$$

問7 図1の3ピンラーメンのC点の鉛直変位を仮想仕事法で求めよ。部材は全て一様とする。

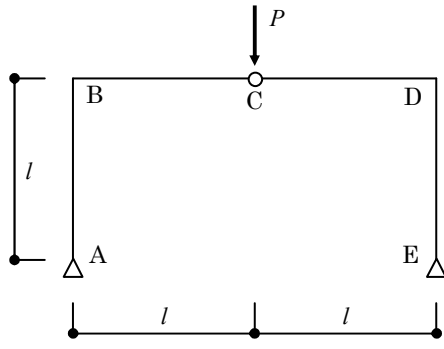


図1

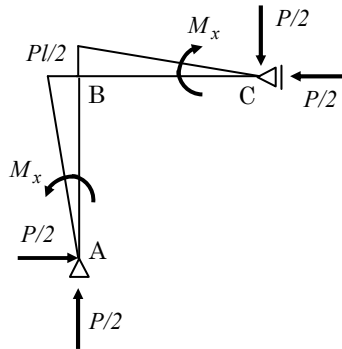


図2

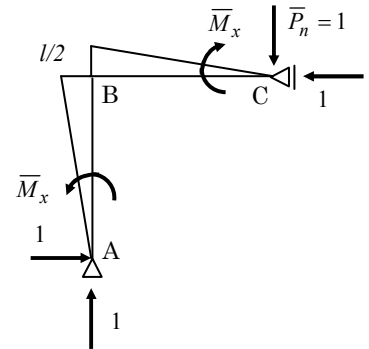


図3

(解) 図1は正対称形であるから図2を解けばよい。図2より、A点とC点から x の距離にある曲げ

モーメントは、 $\Sigma M_o = -M_x - \frac{Px}{2} = 0$ 、 $M_x = -\frac{Px}{2}$ と $\Sigma M_o = M_x + \frac{Px}{2} = 0$ 、 $M_x = -\frac{Px}{2}$

図3は仮想荷重を作用させた場合で、A点とC点から x の距離にある曲げモーメントは、

$\Sigma M_o = -M_x - x = 0$ 、 $M_x = -x$ と $\Sigma M_o = M_x + x = 0$ 、 $M_x = -x$ となる。

よってC点の鉛直変位は、
$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{Px}{2} \right) \times (-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{Px}{2} \right) (-x) dx = \frac{Pl^3}{3EI}$$

問8 図1の3ピンラーメンのD点の水平変位を仮想仕事法で求めよ。部材は全て一様とする。

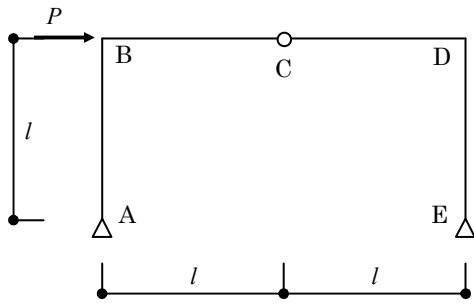


図1

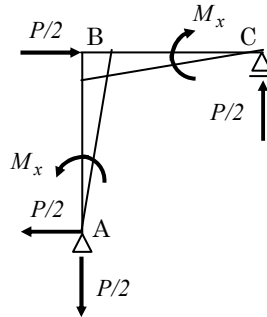


図2

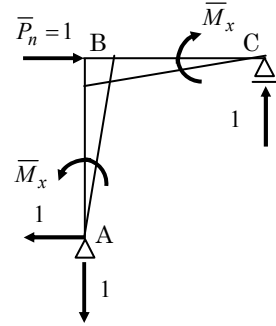


図3

(解) 図1は逆対称形であるから図2を解けばよい。図2より、A点とC点から x の距離にある曲げ

モーメントは、 $\Sigma M_o = -M_x + \frac{Px}{2} = 0$ 、 $M_x = \frac{Px}{2}$ と $\Sigma M_o = M_x - \frac{Px}{2} = 0$ 、 $M_x = \frac{Px}{2}$

図3は仮想荷重を作用させた場合で、A点とC点から x の距離にある曲げモーメントは、 $\Sigma M_o = -M_x + x = 0$ 、 $M_x = x$ と $\Sigma M_o = M_x - x = 0$ 、 $M_x = x$ となる。

よってD点の水平変位は、
$$\delta_D = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Px}{2} \right) (x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{Px}{2} \right) (x) dx = \frac{Pl^3}{3EI}$$

問9 図1の3ピンラーメンのC点の鉛直変位を仮想仕事法で求めよ。部材は全て一様とする。

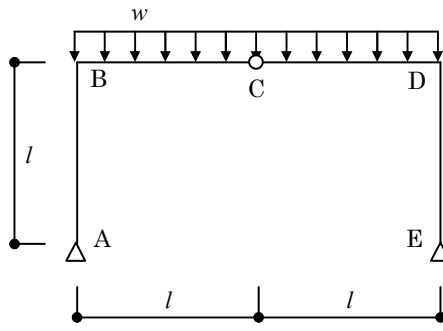


図1

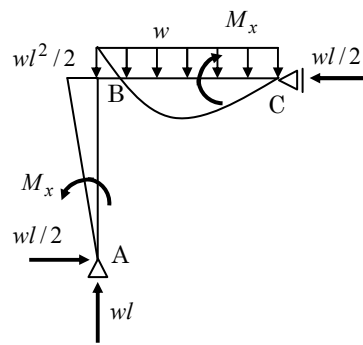


図2

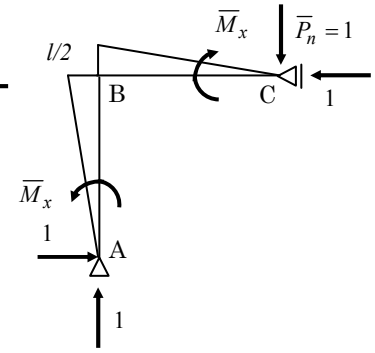


図3

(解) 図1は正対称形であるから図2を解けばよい。図2より、A点とC点から x の距離にある曲げ

モーメントは、 $\Sigma M_o = -M_x - \frac{wlx}{2} = 0$ 、 $M_x = -\frac{wlx}{2}$ と $\Sigma M_o = M_x + (wx) \times \frac{x}{2} = 0$ 、 $M_x = -\frac{wx^2}{2}$

図3は仮想荷重を作用させた場合で、A点とC点から x の距離にある曲げモーメントは、

$\Sigma M_o = -M_x - x = 0$ 、 $M_x = -x$ と $\Sigma M_o = M_x + x = 0$ 、 $M_x = -x$ となる。

よってC点の鉛直変位は、
$$\delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{wlx}{2} \right) (-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{wx^2}{2} \right) (-x) dx = \frac{7wl^4}{24EI}$$

問 10 図 1 のラーメンを応力法で解け。

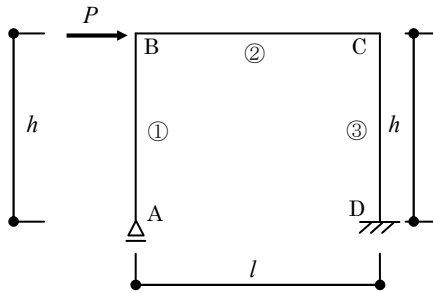


図 1

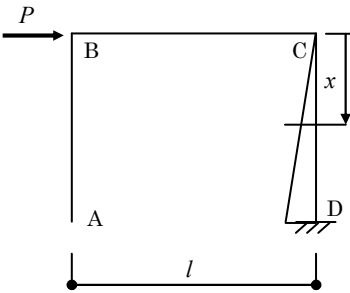


図 2

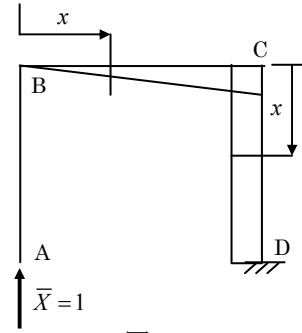


図 3

(解) 剛度 K 、標準剛度 K_0 、剛比 k 、断面 2 次モーメント I の関係を求める。まず $K=kK_0$ であるから、 $K=I_{BC}/l=2K_0$ 、 $K=I_{CD}/h=3K_0$ となり、 $I_{BC}=2lK_0$ 、 $I_{CD}=3hK_0$ を得る。図 2 の基本構で、C 点から x の距離にある曲げモーメントは $M_x = Px$ で、図 3 のように余力 $X_1 = 1$ を A 点に作用させたときの B 点と C 点から任意の距離 x にある曲げモーメントは、 $\bar{M}_x = x$ 、 $\bar{M}_x = l$ となる。

図 2 の基本構による A 点の鉛直変位は

$$\delta_{10} = \frac{1}{3hEK_0} \int_0^h Px \times l dx = \frac{Pl}{3hEK_0} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{Phl}{6EK_0}$$

図 3 の余力による A 点の鉛直変位は

$$\delta_{11} = \frac{1}{2lEK_0} \int_0^l x \times x dx + \frac{1}{3hEK_0} \int_0^h l \times l dx = \frac{1}{2lEK_0} \frac{l^3}{3} + \frac{1}{3hEK_0} l^2 = \frac{l^2}{2EK_0}$$

変形の連続条件式は $\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$ に上式を代入すると

$X_1 \sim -Ph/3l$ となる。

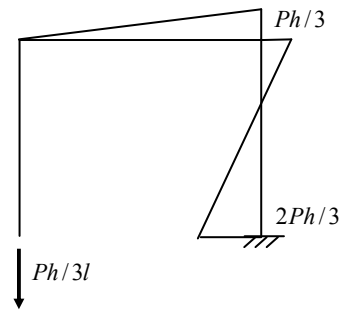
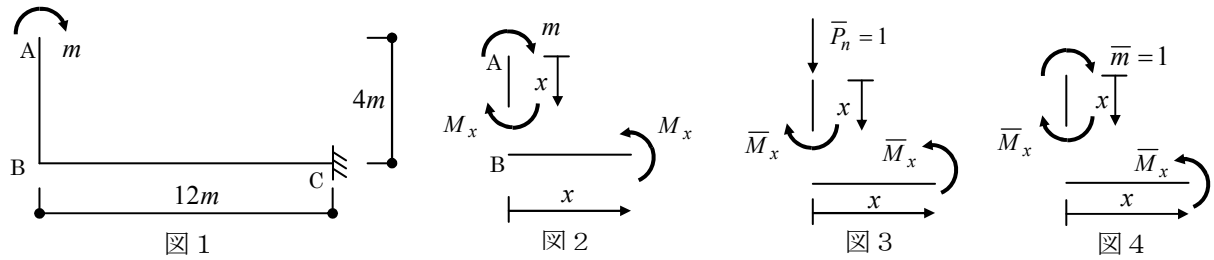


図 4

問 11 仮想仕事法により A 点の水平撓み δ と回転角 θ を求めよ。ヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。



(解) 図 2 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは次のようになる。

$$\Sigma M_o = m + M_x = 0, \quad M_x = -m, \quad \Sigma M_o = m - M_x = 0, \quad M_x = +m$$

図 3 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ $\Sigma M_o = x + \bar{M}_x = 0$ から $\bar{M}_x = -x$ 、 $\Sigma M_o = 4 - \bar{M}_x = 0$ から $\bar{M}_x = +4$ となる。ゆえに撓み δ は

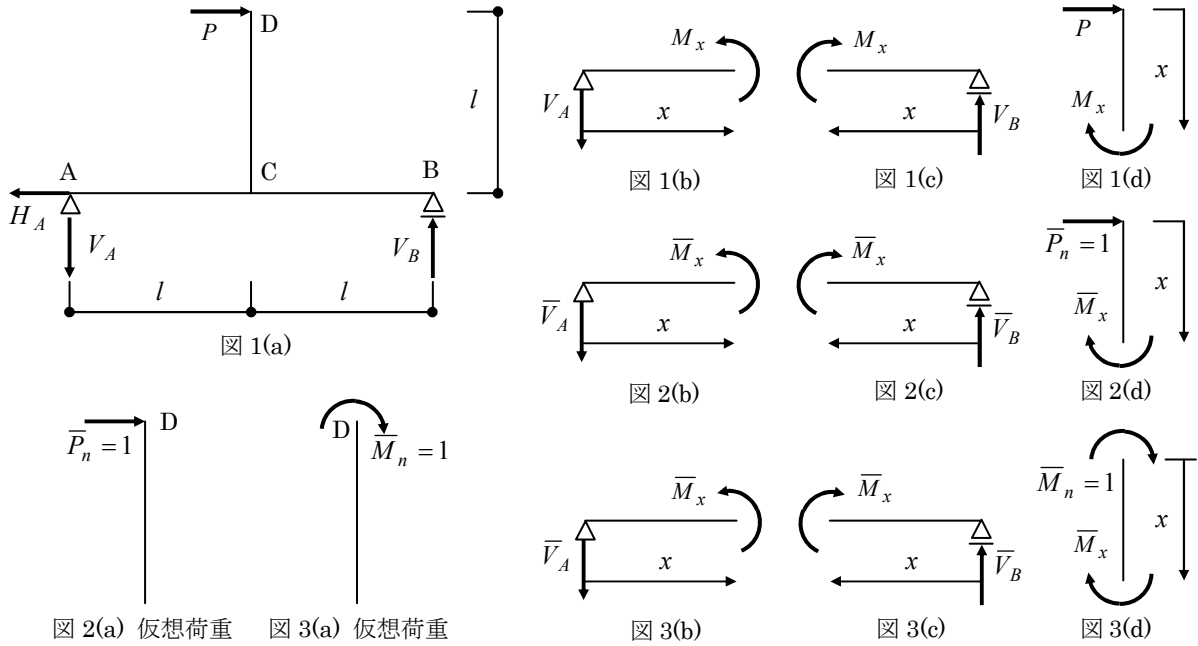
$$\delta = \int_0^4 \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^4 \frac{(-m)(-x)}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{(m)(+4)}{EI} dx = \frac{m}{EI} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + \frac{m}{EI} [4x]_0^{12} = \frac{56m}{EI}$$

である。図 4 から A 点、B 点から任意の点 x の距離にある曲げモーメントは、それぞれ

$\Sigma M_o = 1 + \bar{M}_x = 0$ から $\bar{M}_x = -1$ 、 $\Sigma M_o = 1 - \bar{M}_x = 0$ から $\bar{M}_x = +1$ となり回転角 θ は次式のようにになる。

$$\theta = \int_0^4 \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dx = \int_0^4 \frac{(-m)(-1)}{EI} dx + \int_0^{12} \frac{(m)(+1)}{EI} dx = \frac{m}{EI} [x]_0^4 + \frac{m}{EI} [x]_0^{12} = \frac{16m}{EI}$$

問 12 D 点に水平力 P が作用している。このとき D 点の水平変位 δ_D と回転角 θ_D を仮想仕事法で求めよ。但し部材の性状はヤング係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。



(解) (水平変位 δ_D) 図 1(a) の反力は $V_A = V_B = P/2$ 、図 2(a) の仮想荷重の場合の反力は $\bar{V}_A = \bar{V}_B = 1/2$ である。図 1(b)、(c)、(d) と図 2(b)、(c)、(d) の任意の距離 x の曲げモーメントはそれぞれ $M_x = -Px/2$ 、 $M_x = +Px/2$ 、 $M_x = -Px$ と $\bar{M}_x = -x/2$ 、 $\bar{M}_x = +x/2$ 、 $\bar{M}_x = -x$ となる。よって、D 点の水平変位 δ_D は次のようになる。

$$\delta_D = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^l \left(-\frac{Px}{2} \right) \left(-\frac{x}{2} \right) dx + \int_0^l \left(\frac{Px}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right) dx + \int_0^l (-Px)(-x) dx \right\} = \frac{Pl^3}{2EI}$$

(回転角 θ_D) 図 3(a) の仮想荷重の場合、反力は $\bar{V}_A = \bar{V}_B = 1/2l$ である。図 3(b)、(c)、(d) の任意の距離 x の曲げモーメントはそれぞれ $\bar{M}_x = -x/2l$ 、 $\bar{M}_x = +x/2l$ 、 $\bar{M}_x = -1$ となる。よって、D 点の回転角は θ_D は次のようになる。

$$\theta_D = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^l \left(-\frac{Px}{2} \right) \left(-\frac{x}{2l} \right) dx + \int_0^l \left(\frac{Px}{2} \right) \left(\frac{x}{2l} \right) dx + \int_0^l (-Px)(-1) dx \right\} = \frac{2Pl^2}{3EI}$$

問 13 図 1 のようなラーメンの曲げモーメントを仮想仕事法で求めよ。

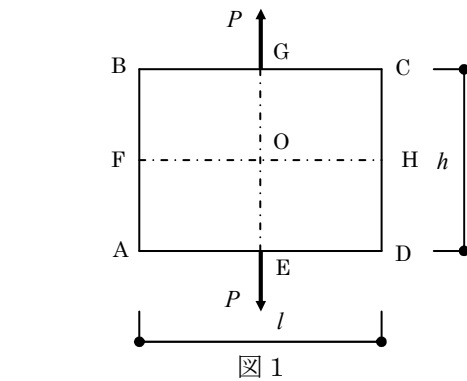


図 1

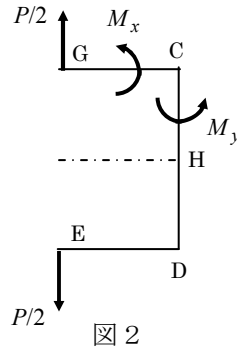


図 2

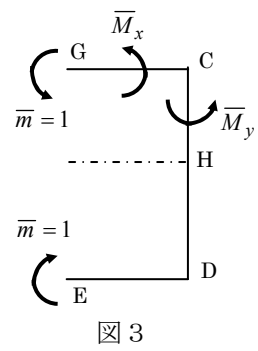


図 3

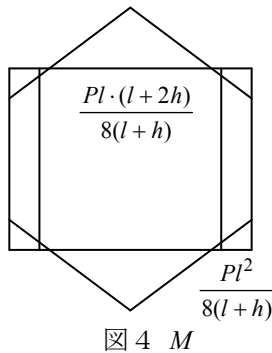


図 4 M

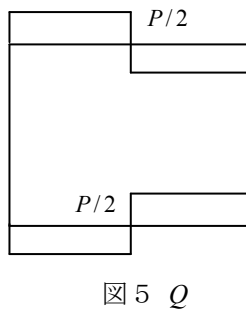


図 5 Q

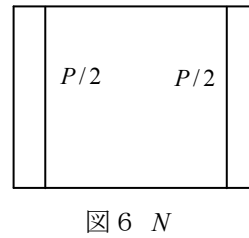


図 6 N

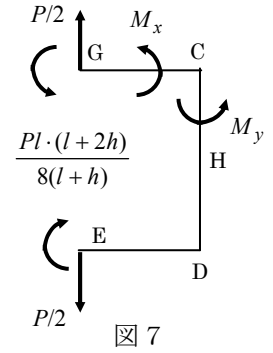


図 7

(解) G-E 線で切断すると、左右、上下の対称性を利用して図 2 のように G-C-H の仕事量を考えればよい。よって E 点と G 点に生じる鉛直応力は $P/2$ である。そして、図 2 から、G 点、C 点を原点とすると、G-C 間と C-H 間の曲げモーメントは次式となる。

$$M_x = Px/2 \quad (1)$$

$$M_y = Pl/4 \quad (2)$$

G 点の曲げモーメントを求めるため、図 3 のように余力を $\bar{m}=1$ とした場合、G-C 間と C-H 間は $\bar{M}_x = -1$ 、 $\bar{M}_y = -1$ となる。G 点の回転角を求めるにあたり題意から図 2 の G-C-H の仕事量を 4 倍すればよい。

$$\delta_{10} \frac{EI}{4} = \int_0^{l/2} \left(\frac{Px}{2} \right) \times (-1) dx + \int_0^{h/2} \left(\frac{Pl}{4} \right) \times (-1) dy = \left[-\frac{Px^2}{4} \right]_0^{l/2} + \left[-\frac{Ply}{4} \right]_0^{h/2} = -\frac{Pl^2}{16} - \frac{Phl}{8} = -\frac{Pl}{16}(l+2h)$$

$$\delta_{11} \frac{EI}{4} = \int_0^{l/2} (-1) \times (-1) dx + \int_0^{h/2} (-1) \times (-1) dy = \frac{l+h}{2} \text{ となる。}$$

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \text{ に代入して、 } X_1 = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{l+2h}{l+h} \text{ となる。これは、C 点に生じる曲げモーメントである。}$$

せん断力は(1)式と(2)式を微分して、 $Q_x = P/2$ と $Q_y = 0$ で、軸力はせん断力から推察して $N_x = P/2$ となる。曲げモーメント、せん断力、軸方向力は図 4、図 5、図 6 に示す。

E 点と G 点の回転角を求める。図 7 で G 点と C 点から任意の距離 x, y にある曲げモーメントは

$$M_x = -\frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} + \frac{Px}{2}, M_y = -\frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} + \frac{Pl}{4} \text{ で G 点の回転角を求めるため、余力は図 3 を使って、}$$

それぞれは $\bar{M}_x = -1$ 、 $\bar{M}_y = -1$ となる。

$$\begin{aligned}
\delta_{10} \frac{EI}{4} &= \int_0^{l/2} \left(-\frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} + \frac{Px}{2} \right) \times (-1) dx + \int_0^{h/2} \left(-\frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} + \frac{Pl}{4} \right) \times (-1) dy \\
&= \left[\frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} x - \frac{Px^2}{4} \right]_0^{l/2} + \left[\frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} y - \frac{Pl}{4} y \right]_0^{h/2} = \frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16} + \frac{Pl(l+2h)}{8(l+h)} \frac{h}{2} - \frac{Plh}{8} = 0
\end{aligned}$$

となり、

A、B、C、D 点の回転角はゼロである。

問 14 図 1 のようなラーメンの曲げモーメントを仮想仕事法で求めよ。

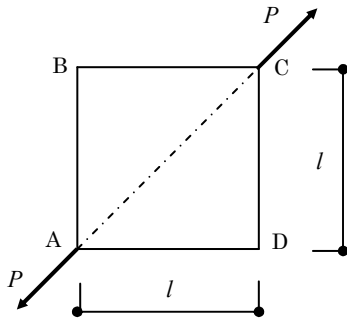


図 1

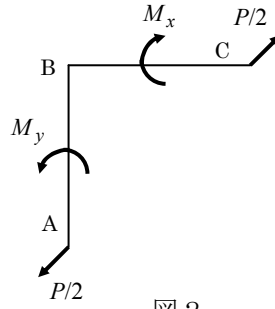


図 2

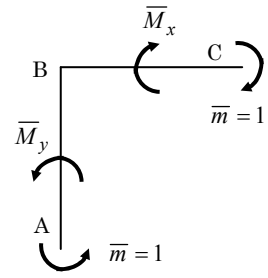


図 3

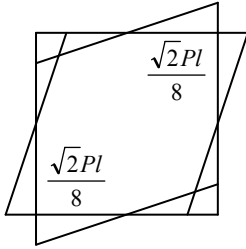


図 4 M

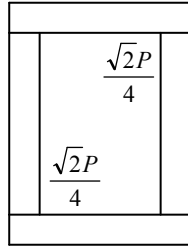


図 5 Q

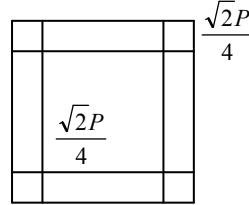


図 6 N

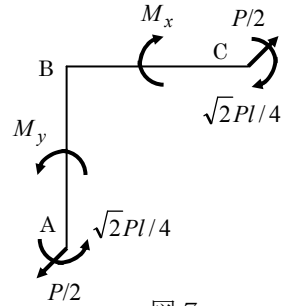


図 7

(解) A-C 線で切断すると、対称性を利用して図 2 のように C 点に生じる応力は $P/2$ である。このときの C 点に生ずる曲げモーメント m を求める。図 2 から、A 点と C 点を原点とすると、A-B 間の曲げモーメントはそれぞれ

$$M_x = \sqrt{2}Px/4 \quad (1)$$

$$M_y = \sqrt{2}Py/4 \quad (2)$$

となる。A 点と C 点の曲げモーメントを求めるため、図 3 のように余力を $\bar{m}=1$ とした場合、A-B 間の曲げモーメントは $\bar{M}_x = -1$ 、 $\bar{M}_y = -1$ となる。よって、

$$\delta_{10} \frac{EI}{2} = \int_0^l \left(\frac{\sqrt{2}Px}{4} \right) \times (-1) dx = \left[-\frac{\sqrt{2}Px^2}{8} \right]_0^l = -\frac{\sqrt{2}Pl^2}{8}, \quad \delta_{11} \frac{EI}{2} = \int_0^l (-1) \times (-1) dx = [x]_0^l = l$$

$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$ に代入して、 $X_1 = \sqrt{2}Pl/8$ となる。C 点に生じる曲げモーメントである。

せん断力は(1)式を微分して、 $Q_x = \sqrt{2}P/4$ で、軸力はせん断力から、 $N_x = \sqrt{2}P/4$ となる。曲げモーメント、せん断力、軸方向力は図 4、図 5、図 6 に示す。A 点の回転角は、図 7 で A 点から任意の距離 y にある曲げモーメントを求めると $M_x = -\frac{\sqrt{2}Pl}{8} + \frac{\sqrt{2}Py}{4}$ で余力は図 3 を使って、 $\bar{M}_y = -1$ となる。

$$\delta_{10} \frac{EI}{2} = \int_0^l \left(-\frac{\sqrt{2}Pl}{8} + \frac{\sqrt{2}Py}{4} \right) \times (-1) dy = \left[\frac{\sqrt{2}Pl y}{8} - \frac{\sqrt{2}Py^2}{8} \right]_0^l = \frac{\sqrt{2}Pl^2}{8} - \frac{\sqrt{2}Pl^2}{8} = 0 \text{ となり、}$$

A、B、C、D 点の回転角はゼロである。

問 15 図 1 の山型ラーメンで D 点の水平変位を応力法で解け。ただし、変位に影響する応力は曲げモーメントだけとし、部材断面は等質等断面でヤング係数は E 、断面 2 次モーメントは I とする。

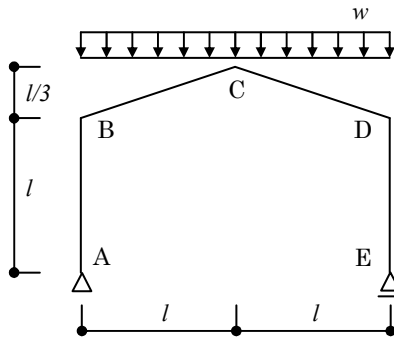


図 1

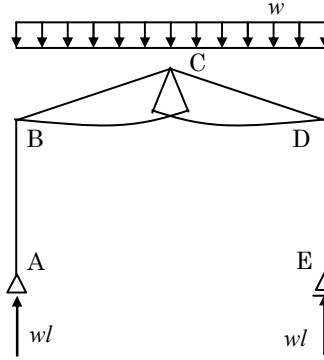


図 2 基本構と M 図

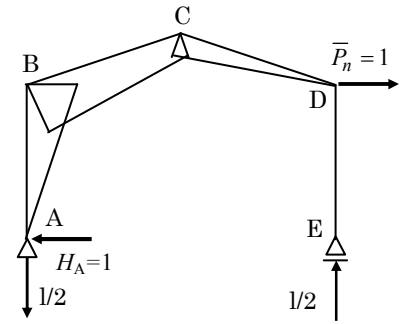


図 3 仮想荷重と M 図

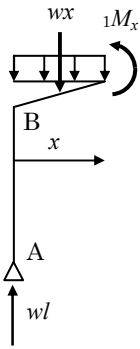


図 4

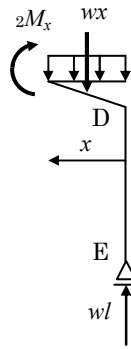


図 5

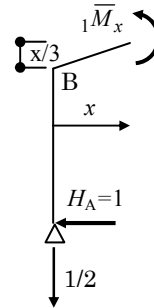


図 6

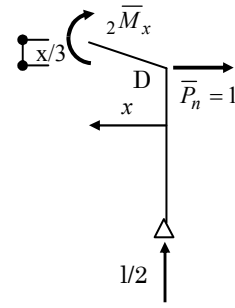


図 7

(解) 図 2 の基本構の曲げモーメント図から、梁の性状係数は B-C 材と C-D 材だけ求めればよい。よって、図 4、図 5 に示すように B 点と D 点からの任意の距離 x の曲げモーメント ${}_1M_x$ 、 ${}_2M_x$ は

$${}_1M_x = wlx - wx^2/2, \quad {}_2M_x = wlx - wx^2/2 \quad (1)$$

である。同様に図 6、図 7 に示すように仮想荷重 $\bar{P}_n = 1$ に対する B 点と D 点からの任意の距離 x の曲げモーメント ${}_1\bar{M}_x$ 、 ${}_2\bar{M}_x$ は

$${}_1\bar{M}_x = H_A \times (l + x/3) - x/2 = l - x/6, \quad {}_2\bar{M}_x = \bar{P}_n \times x/3 + x/2 = 5x/6 \quad (2)$$

よって、D 点の水平変位は

$$\begin{aligned} \delta_D &= \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l ({}_1M_x \times {}_1\bar{M}_x) dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l ({}_2M_x \times {}_2\bar{M}_x) dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \int_0^l \left(wlx - \frac{wx^2}{2} \right) \cdot \left(l - \frac{x}{6} \right) dx + \int_0^l \left(wlx - \frac{wx^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{5x}{6} \right) dx \right\} \\ &= \frac{w}{EI} \cdot \left\{ \int_0^l \left(l^2x - \frac{2lx^2}{3} + \frac{x^3}{12} \right) dx + \int_0^l \left(\frac{5lx^2}{6} - \frac{5x^3}{12} \right) dx \right\} \\ &= \frac{w}{EI} \cdot \left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{2lx^3}{9} + \frac{x^4}{48} \right]_0^l + \frac{w}{EI} \cdot \left[\frac{5lx^3}{18} - \frac{5x^4}{48} \right]_0^l = \frac{17wl^4}{36EI} \end{aligned}$$

問 16 図 1 の山型ラーメンで D 点の水平変位を応力法で解け。ただし、変位に影響する応力は曲げモーメントだけとし、部材断面は等質等断面でヤング係数は E 、断面 2 次モーメントは I とする。

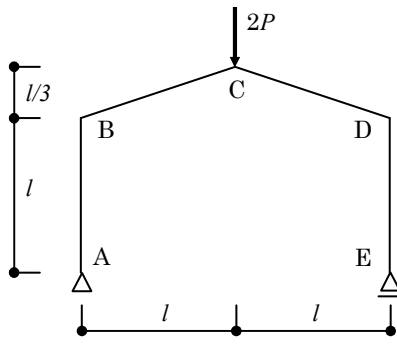


図 1

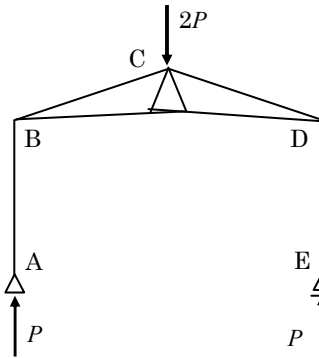


図 2 基本構と M 図

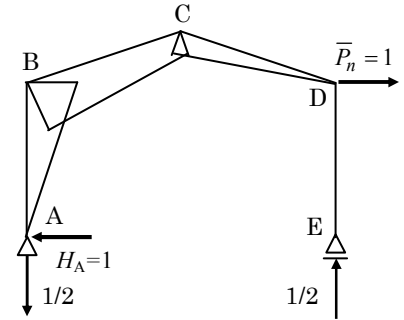


図 3 仮想荷重と M 図

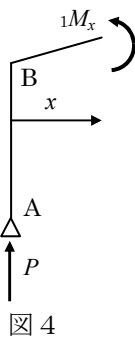


図 4

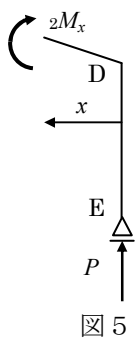


図 5

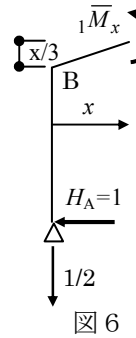


図 6

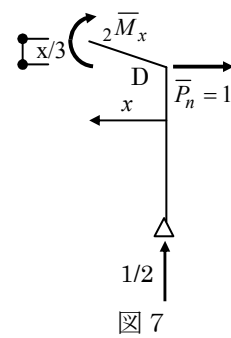


図 7

(解) 図 2 の基本構と図 3 の仮想荷重の曲げモーメント図から梁だけ解けばよいことが分かる。図 4 と図 5 の梁で B 点と D 点から任意の距離 x の曲げモーメント ${}_1M_x$ と ${}_2M_x$ は

$${}_1M_x = Px, \quad {}_2M_x = Px \quad (1)$$

である。図 2 の仮想荷重の場合で、図 6 と図 7 に示すように仮想荷重 $\bar{P}_n = 1$ に対する B 点と D 点からの任意の距離 x の曲げモーメント ${}_1\bar{M}_x$ と ${}_2\bar{M}_x$ は次式となる。

$${}_1\bar{M}_x = H_A \times (l + x/3) - x/2 = l - x/6, \quad {}_2\bar{M}_x = \bar{P}_n \times x/3 + x/2 = 5x/6 \quad (2)$$

よって、D 点の水平変位は

$$\begin{aligned} \delta_D &= \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l ({}_1M_x \times {}_1\bar{M}_x) dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l ({}_2M_x \times {}_2\bar{M}_x) dx = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \int_0^l (Px) \cdot \left(l - \frac{x}{6} \right) dx + \int_0^l (Px) \cdot \left(\frac{5x}{6} \right) dx \right\} \\ &= \frac{P}{EI} \cdot \left\{ \int_0^l \left(lx - \frac{x^2}{6} \right) dx + \int_0^l \left(\frac{5x^2}{6} \right) dx \right\} = \frac{P}{EI} \cdot \left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{18} \right]_0^l + \frac{P}{EI} \cdot \left[\frac{5x^3}{18} \right]_0^l = \frac{13Pl^3}{18EI} \end{aligned}$$

問 17 図 1 の片持梁のラーメンで C 点の鉛直変位を求めよ。ただし、梁、柱とも、等質等断面でヤング係数 E 、断面 2 次モーメントを I とする。

(解) 図 2 のように、柱に曲げモーメント $M=Pl$ が作用したとき、柱、梁とも θ だけ回転して A 点の鉛直変位 δ_1 を得る。また、図 3 のように片持ち梁に荷重 P が作用したときの鉛直変位 δ_2 を得る。

図 2 と図 3 の回転角は図 4 と図 5 でモールの定理より簡単に解ける。〔構造力学の 4 章、15 章〕

$$\text{図 4 から } \delta_A = M_A = \frac{2Pl^2}{EI} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{EI}, \quad \text{図 5 から } \delta_A = M_A = \frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

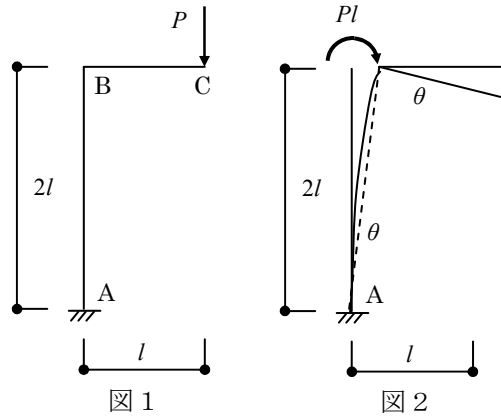


図 1

図 2

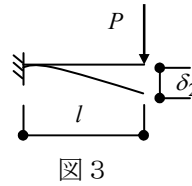


図 3

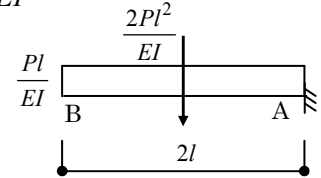


図 4

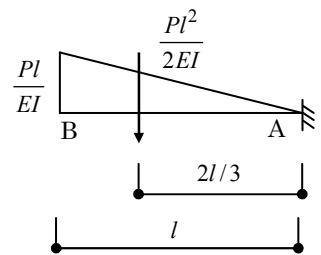


図 5

問 19 前問を応力法で解く。

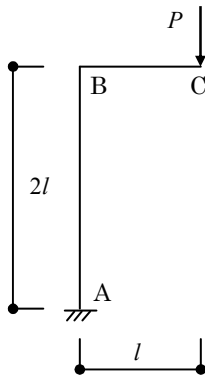


図 1

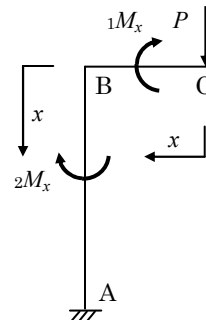


図 2 基本構

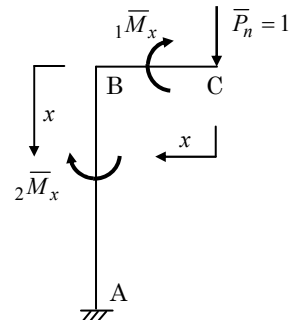


図 3 仮想荷重

(解) 図 2 の基本構の仮想荷重の曲げモーメント図から梁と左柱の性状係数を解けばよい。C 点と B 点から任意の距離 x の曲げモーメント ${}_1M_x$ と ${}_2M_x$ は

$${}_1M_x = -Px, \quad {}_2M_x = -Px \quad (1)$$

である。図 3 の仮想荷重の場合で、仮想荷重 $\bar{P}_n = 1$ に対する C 点と B 点からの任意の距離 x の曲げモーメント ${}_1\bar{M}_x$ と ${}_2\bar{M}_x$ は次式となる。

$${}_1\bar{M}_x = -x, \quad {}_2\bar{M}_x = -l, \quad (2)$$

よって、D 点の水平変位は

$$\begin{aligned} \delta_C &= \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l ({}_1M_x \times {}_1\bar{M}_x) dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{2l} ({}_2M_x \times {}_2\bar{M}_x) dx = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \int_0^l (-Px) \cdot (-x) dx + \int_0^{2l} (-Pl) \cdot (-l) dx \right\} \\ &= \frac{P}{EI} \cdot \left\{ \int_0^l (x^2) dx + \int_0^{2l} (l^2) dx \right\} = \frac{P}{EI} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l + \frac{P}{EI} \cdot [l^2 x]_0^{2l} = \frac{7Pl^3}{3EI} \end{aligned}$$