

4. 1 断面

問1 図1のH鋼のX-X軸から図心x-xまでの距離 y_0 を求めて、図心に関する断面2次モーメントを求めよ。

(解) フランジの面積は $A_1 = 5b \times 2h = 10bh$ 、 $A_2 = 7b \times 2h = 14bh$ でウェブは $A_3 = b \times 4h = 4bh$ となる。X-X軸に関する断面1次モーメントは

$$S = A_1 \times 7h + A_2 \times h + A_3 \times 4h \\ = 10bh \times 7h + 14bh \times h + 4bh \times 4h = 100bh^2 \quad \text{となる。}$$

よって図心は $y_0 = S / \Sigma A = 100bh^2 / 28bh = 25h / 7 = 3.57h$ である。

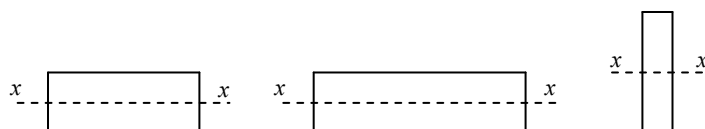
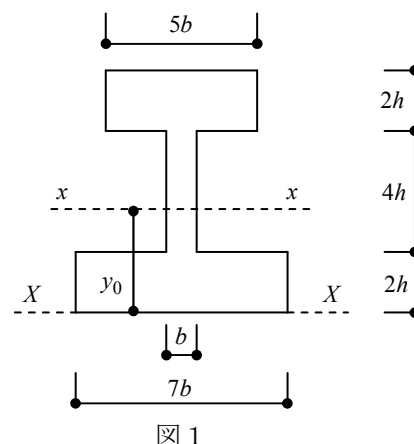


図2

図2のように、フランジ、とウェブのx-x軸に関する断面2次モーメントは

$I_1 = 5b \times (2h)^3 / 12 = 10bh^3 / 3$ 、 $I_2 = 7b \times (2h)^3 / 12 = 14bh^3 / 3$ 、 $I_3 = b \times (4h)^3 / 12 = 16bh^3 / 3$ で、それぞれの、X-X軸に関する断面2次モーメントは、 $I_X = I_x + y_0^2 A$ を利用すると

$${}_1I_1 = I_1 + {}_1y_0^2 A_1 = 10bh^3 / 3 + (7h)^2 \times 10bh = 1480bh^3 / 3$$

$${}_2I_2 = I_2 + {}_2y_0^2 A_2 = 14bh^3 / 3 + (h)^2 \times 14bh = 56bh^3 / 3$$

$${}_3I_3 = I_3 + {}_3y_0^2 A_3 = 16bh^3 / 3 + (4h)^2 \times 4bh = 208bh^3 / 3$$

よって、 $I_X = 1744bh^3 / 3$ が得られる。図心に関する断面2次モーメントは

$$I_x = I_X - y_0^2 A = 1744bh^3 / 3 - (25h / 7)^2 \times 28bh = 32956bh^3 / 147$$

(別解) 図3からハッチの部分の断面2次モーメントを除すれば

よいから、大外枠は $I_1 = \frac{7b \times (16h)^3}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{3584bh^3}{3}$ で中断のハッチ

1個は $I_2 = \frac{3b \times (12h)^3}{12} \times \frac{1}{2} - \frac{3b \times (4h)^3}{12} \times \frac{1}{2} = 208bh^3$ で、上のハッチ

1個は $I_3 = \frac{b \times (16h)^3}{12} \times \frac{1}{2} - \frac{b \times (12h)^3}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{296}{3}bh^3$

よって、 $I_x = \left(\frac{3584}{3} - 2 \times 208 - 2 \times \frac{296}{3} \right) \cdot bh^3 = \frac{1744}{3}bh^3$ となり上記と一致する。

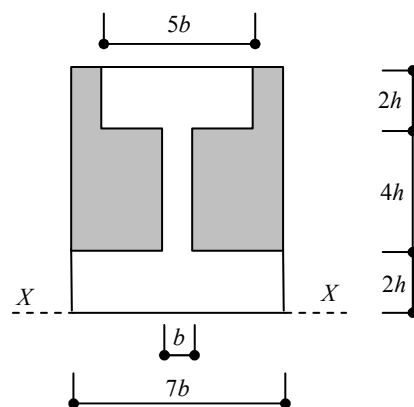


図3

問 2 図 1 の T 形梁の断面係数を求めよ。

(解) T 形梁の N-N 軸から図心 n-n 軸までの距離を y_0 とすると、 $\Sigma A \times y_0 = (6 \times 16) \times 8 + (18 \times 8) \times 20$ から $y_0 = 3468 / 240 = 15.2 \text{ cm}$ となる。

フランジ自身の図心に関する断面 2 次モーメントは

$$I_x = 18 \times 8^3 / 12 = 768 \text{ cm}^4$$

で N-N 軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I_N = I_x + y_1^2 A = 768 + 20^2 \times 144 = 58368 \text{ cm}^4$$

同様に、ウェブ自身の図心に関する断面 2 次モーメントは

$$I_x = 6 \times 16^3 / 12 = 2048 \text{ cm}^4$$

で N-N 軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I_N = I_x + y_2^2 A = 2048 + 8^2 \times 96 = 8192 \text{ cm}^4$$

よって T 形梁の N-N 軸に関する曲げモーメントは、 $I = 58368 + 8192 = 66560 \text{ cm}^4$ となり、断面係数は

$$Z_{\text{上}} = I / (24 - 15.2) = 7563.64 \text{ cm}^3, \quad Z_{\text{下}} = I / (15.2) = 4378.95 \text{ cm}^3$$

(別解)

外枠の N-N 軸に関する上半分の断面 2 次モーメントは

$$I_N = 18 \times 48^3 / 12 / 2 = 82944 \text{ cm}^4$$

ハッチの部分の N-N 軸に関する上半分の断面 2 次モーメントは

$$I_N = 12 \times 32^3 / 12 / 2 = 16384 \text{ cm}^4$$

よって T 形梁の N-N 軸に関する曲げモーメントは、

$$I = 82944 - 16384 = 66560 \text{ cm}^4 \text{ となる。}$$

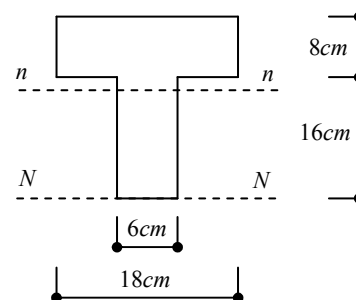


図 1

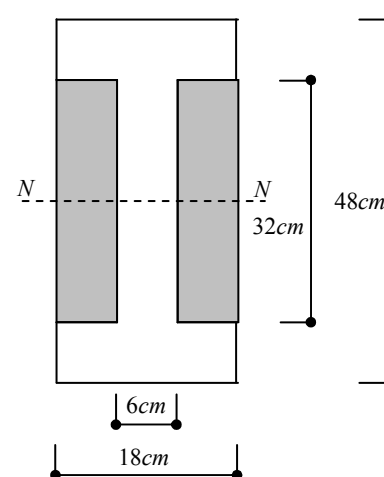


図 2

問3 図1と図2は梁に作用する荷重、せん断力と曲げモーメントの関係が示されている。

$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx}$ 式と $\frac{d^2M}{dx^2} = -w$ が成り立つことを説明せよ。

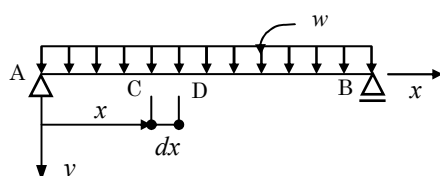


図1

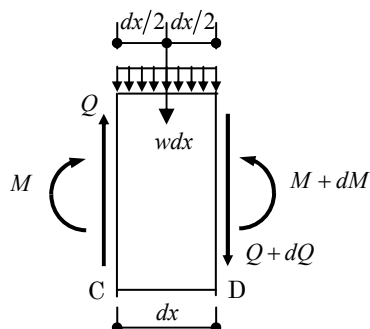


図2

(解) 図1のC断面に作用する曲げモーメント M とせん断力 Q の方向を図2のように仮定すると、D断面に作用する曲げモーメントとせん断力は $M + dM$ 、 $Q + dQ$ となる。 dM と dQ の微小増は等分布荷重による影響である。ここで図2を自由体として釣り合いを考える。そのとき微小幅に作用する等分布荷重の合力は $w dx$ である。 y 方向の釣り合いは $\Sigma Y = -Q + w dx + (Q + dQ) = 0$ から

$$\frac{dQ}{dx} = -w \quad (1)$$

D点についての曲げモーメントの釣り合いは

$$\Sigma M_D = M + Q dx - w dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \text{ から } Q dx - \frac{w}{2} (dx)^2 - dM = 0$$

となり $(dx)^2$ は微少量 dx の二乗であるから、他の項に比べて非常に小さな値である。ゆえにこの項を省略すると

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (2)$$

となる。ここで曲げモーメントを微分するとせん断力 Q が得られることが分かる。(2) 式をさらに微分すると

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} \quad (3)$$

上式に(1)を代入すると

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w \quad (4)$$

(1)式から $w = 0$ の区間ではせん断力は一定であり、このとき(2)式から曲げモーメントは一次の直線に変化することが分かる。言い換えると曲げモーメントを一回微分するとせん断力が得られることが分かる。つまり曲げモーメントが2次曲線の場合ではせん断力は一次の直線、それが一次の直線の場合ではせん断力は一定(変化しない)、曲げが一定の場合ではせん断力はゼロということになる。

問4 図1、図2と図3を参考にして断面の核について、 $\frac{6}{h}l + \frac{6}{b} = -1$ 式を導け。

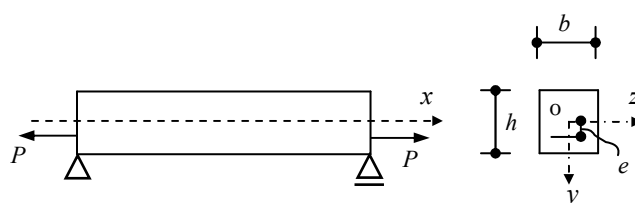


図1

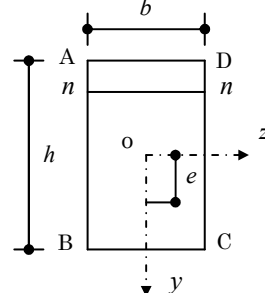


図2

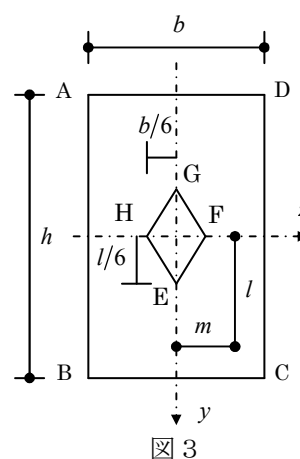


図3

(解) 図1のように断面の主軸のうち y 軸上に図心から偏心距離 e 上に、荷重 P の引っ張り力を作用させる。このとき P による純粋の引張り応力度 $\sigma = P/A$ と、偏心距離 e と荷重 P によるモーメントによる引張（圧縮）応力度が生じている。ゆえに荷重 P は梁断面に2個の応力度を合成した次式のようなになる。

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{I_x} y \quad (1)$$

I_x は z 軸に関する断面2次モーメントである。偏心荷重が図心から e の距離に作用しているとき σ がゼロとなる点、即ち中立軸を求めてみる。これは(1)式で $\sigma = 0$ とおけば、図2で

$$0 = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{I_x} y \quad (2)$$

$$y = -\frac{h^2}{12e} \quad (3)$$

$n \cdot n$ が中立軸となる。断面の $A \cdot D$ 上に中立軸がくるには(3)式で $y = -h/2$ として e の値を求めると

$$e = +h/6 \quad (4)$$

となる。このことから荷重の作用点がゼロから $e = +h/6$ の範囲内であれば、全断面で引張（圧縮）応力度となる。次に図3のように引張力が a 点に作用している時の中立軸を求めると、荷重 P による

引張応力度は $\sigma_t = \frac{P}{A}$ 、 y 軸に関する曲げモーメント $M = P \cdot m$ による曲げ応力度は

$${}_y\sigma_b = \frac{Pm}{I_y} y$$

z 軸に関する曲げモーメント $P \cdot n$ による曲げ応力度は、 ${}_z\sigma_b = \frac{Pl}{I_z} z$ である。

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pl}{I_z} z + \frac{Pm}{I_y} y \quad (5)$$

となる。ここで C 点の応力度がゼロとなるような荷重の作用点 a を求めるため、(5)式で $\sigma = 0$ とし $y = h/2$ 、 $z = b/2$ とすれば

$$\frac{6}{h}l + \frac{6}{b} = -1 \quad (6)$$

ここで、 $m = -h/6$ となるから図 3 の直線 GH が得られる。すなわち GH 線上に荷重が作用すれば C 点の応力度はゼロとなる。同様に B 点の応力度がゼロとなるには GF 線上に、A 点の応力度がゼロとなるには EF 線上に、D 点の応力度がゼロとなるには H 線上に作用すればよい。これらの線上に囲まれた EFGH を断面の核という。

つまり、引張荷重が核の中に作用したなら全断面が引張応力度になり、圧縮荷重なら全断面が圧縮応力度になる。

問 5 図 1 のような断面の X 軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ。寸法の単位は *cm* とする。

(平成 19) (難易度 D)

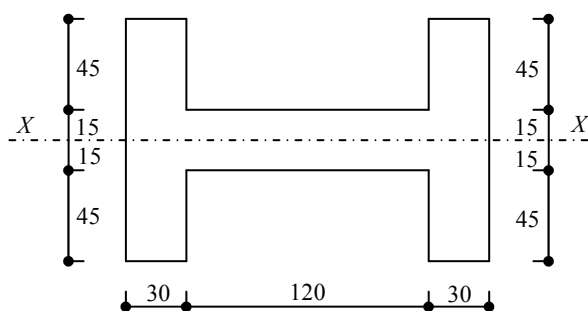


図 1

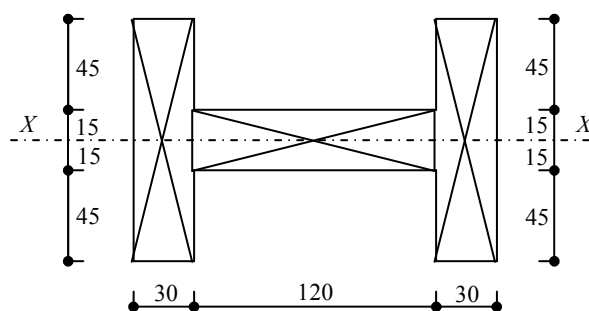


図 2

(解)

図 2 のように 3 個に分けて計算すれば簡単にできる。 $I_X = (4.32 + 0.27 + 4.32) \times 10^6 \text{ mm}^4$

問6 図1の断面Aで最大、最小断面2次モーメント I_1 、 I_2 を求めよ。すなわちO点に関する主断面2次モーメントを求めよ。

(解) 原点Oを通る直角座標 x - y と X - Y 座標の関係は

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

断面Aの X 、 Y 軸及び x 、 y 軸に関する断面2次モーメントと断面相乗モーメントは

$$I_X = \int Y^2 dA, \quad I_Y = \int X^2 dA, \quad I_{XY} = \int XY dA \quad (2)$$

$$I_x = \int y^2 dA, \quad I_y = \int x^2 dA, \quad I_{xy} = \int xy dA \quad (3)$$

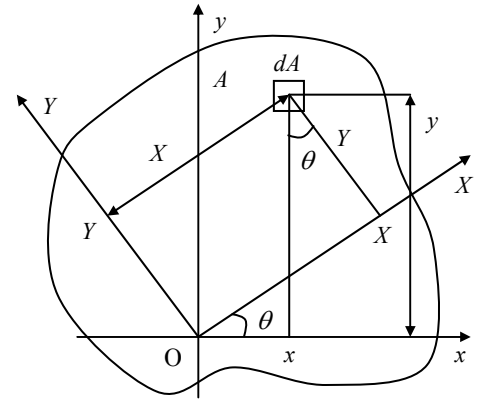


図1

(1)式を(2)式に代入すると、

$$\begin{aligned} I_X &= \int Y^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - \sin 2\theta \int xy dA = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4)$$

$\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ 、 $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ を(4)式に代入すると

$$I_X = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (5)$$

$$\text{同様に、} I_Y = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (6)$$

$$I_{XY} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (7)$$

これらの最大値と最小値を求めるには、次式を満たす必要がある。

$$\frac{dI_X}{d\theta} = -(I_x - I_y) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0 \quad (8)$$

$$\text{から、} \tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (9)$$

$$\text{したがって、} \theta_{n1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \quad \theta_{n2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} + \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

$$(9) \text{式から、} \sin 2\theta = \pm \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}}, \quad \cos 2\theta = \pm \frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \quad (11)$$

(5)、(6)、(7)式に(11)式(負号)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} I_{\max} &= I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}}{2} \\ I_{\min} &= I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}}{2} \\ I_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

備考 直交する二軸のいずれかが極大、極小になるのは(8)式から、 $d^2I_X/d\theta$ の符号を調べる。

$$\frac{d^2I_X}{d\theta^2} = -2(I_x - I_y) \left\{ \pm \frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \right\} + 4I_{xy} \left\{ \pm \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \right\}$$

(11)式の負号をとれば $\frac{d^2I_X}{d\theta^2} = -\frac{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}}{2}$ となり $\frac{d^2I_X}{d\theta^2} < 0$ となるから、(12)式の I_{\max} が最大値となる。

問7 図1の断面AのX、Y軸に関する断面2次モーメント I_X 、 I_Y を求めよ。

ただし $\sin \theta = 3/5$ 、 $\cos \theta = 4/5$ 。

$$\begin{aligned} I_X &= \int Y^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta = \frac{16I_x + 9I_y - 24I_{xy}}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Y &= \int X^2 dA = \int (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA \\ &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta = \frac{16I_x + 9I_y + 24I_{xy}}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{XY} &= \int XY dA = \int (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA \\ &= \int (-x^2 \sin \theta \cos \theta + y^2 \sin \theta \cos \theta + xy \cos^2 \theta - xy \sin^2 \theta) dA \\ &= -I_x \sin \theta \cos \theta + I_y \sin \theta \cos \theta + I_{xy} \cos^2 \theta - I_{xy} \sin^2 \theta = \frac{-12I_x + 12I_y + 7I_{xy}}{25} \end{aligned}$$

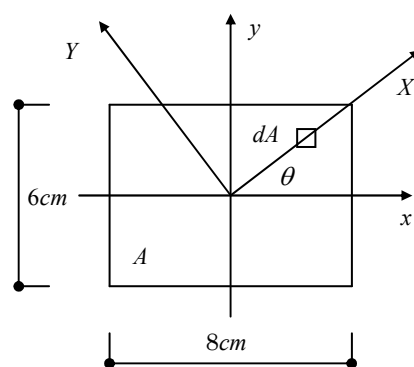


図1

$$\text{これに、} I_x = \int y^2 dA = \int_{-4}^4 \int_{-3}^3 y^2 dx dy = 8 \int_{-3}^3 y^2 dy = 8 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-3}^3 = 144 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int_{-4}^4 \int_{-3}^3 x^2 dx dy = 6 \int_{-4}^4 x^2 dy = 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 = 256 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \int xy dA = \int_{-4}^4 \int_{-3}^3 xy dx dy = 0$$

を代入すればよい。