

周波数推定法に関する研究

A Study of the Method of Estimating Frequency

電子システム工学専攻 石山 亮
(指導教官：久保 和良)

1. はじめに

正弦波の標本値から周波数を推定する Prony 法と Binary 法による周波数推定器実現のため、現在までに標本値への雑音混入による周波数推定誤差についてシミュレーションと検討を行ってきた。¹⁾

今回は Prony 法周波数推定器を製作し、周波数推定誤差の検討を行った。また、Binary 法で雑音耐性の向上が図れるアルゴリズムを考案し、シミュレーションにより検討を行った。

2. 原理

2-1 周波数推定法

正弦波の標本値は、周波数を f 、標本化周波数を f_s 、標本化番号を n 、振幅を A 、位相を ϕ 、直流成分を d とすると次式で表される。

$$x(n) = A \cos(2\pi f n / f_s + \phi) + d \quad (1)$$

Prony 法では、 $n = 0, 1, 2, 3$ の 4 点の標本値から定数 a 、 Z_r を計算し周波数推定値 f_e を求めることができる。

$$a = \frac{x(0) - x(3)}{x(1) - x(2)} \quad (2)$$

$$Z_r = (a - 1) / 2 \quad (3)$$

$$f_e = f_s \left\{ \arg \left(Z_r + j \sqrt{1 - Z_r^2} \right) \right\} / 2 \quad (4)$$

Binary 法は、 f_s を変えながら逐次的に標本化を行い、最終的に $f_s = 4f$ に近づけながら周波数を推定する。まず標本化密度 k を次式で定義する。特に推定開始時の標本化密度を k_c とする。

$$k = f_s / (2f) \quad (5)$$

(2)(3)式を変形すると、

$$Z_r = \frac{x(3) - x(2) + x(1) - x(0)}{2\{x(2) - x(1)\}} = \cos(\pi / k) \quad (6)$$

となり、 Z_r は $k=2$ の時に正負が反転する。標本化、 Z_r の正負判定を繰り返し、2進数のビット列 $B = (0.b_1b_2b_3\dots b_p)$ を逐次決定する。最終的に $k=2$ に漸近した標本化周波数 f_s' 、初回標本化周波数 f_c 、と次式から周波数推定値 f_e を求める。

$$f_s' = f_c \cdot B \quad (7)$$

$$f_e = f_s' / 4 = f_c \cdot B / 4 \quad (8)$$

シミュレーション時は、雑音として一様乱数を標本値に重畳し、正弦波と雑音の振幅比を雑音比率 n_r とした。これを一定にし周波数推定を 100 回行った。また、実際の周波数推定も同条件で周波数推定を 100 回行い、その推定値の平均と真値の相対誤差を誤差率とした。

2-2 Prony 法による周波数推定器

Prony 法を用いた周波数推定器は T I 社製 D S P スターターキット (以下、D S K とする) を用いて製作した。6桁の表示器での周波数推定値の表示、プログラムを格納した R O M でのスタンドアロン化、外部メモリと D S K のデバッグによる周波数推定値と推定に用いたパラメータの記録などが行えるように回路を拡張した。

3. 結果と考察

3-1 Prony 法による周波数推定器

製作した周波数推定器の概観を Fig.1 に示す。これを用いて、振幅 A と標本化密度 k を変えた正弦波の周波数推定、ならびにその誤差率の検討を行った。

$A = 1.0$ [V]、 $k = 1 \sim 5$ で正弦波の周波数を推定した結果を Fig.2 に示す。 $k = 2.5$ の場合に誤差率が小さくなり、最小で約 0.005 となった。 k が小さいと標本値同士の値が大きく開くため精度よい推定ができ、この様な結果になったと考えられる。しかし、 k の値をそれ以上小さくしても、誤差率の改善が見られなかった。これは、標本化を行った位相によって、相対的に標本値同士の値の差が小さくなり、大きい周波数推定誤差が発生したためである。標本化を行う位相は選ぶことができないため、この大きな誤差率により誤差率の減少が進まなかったと考えられる。

また、誤差率の原因として A / D 変換器の量子化誤差も考えられる。そこで、振幅の増大により、含まれる量子化誤差や雑音成分が相対的に小さくなれば、誤差率が減少すると考え、 $A = 0.5 \sim 3.0$ [V]、 $k = 5$ に固定して周波数推定を行った。

その結果を Fig.3 に示すが、結果として振幅による大きな誤差率の変化は見られなかったため、使用する A / D 変換器の量子化ビット数は十分であり、

誤差の原因は量子化誤差や標本値に重畳した雑音によるものではなかったと考えられる。理論上、周波数を推定する場合は振幅の影響を受けないため、理論に沿った周波数推定を行っていることを確認できた。

従って、誤差率の発生は入力した正弦波のひずみによって発生していると考えられる。

3 - 2 Binary法の雑音耐性の向上

Binary法ではFig.4に示すように、周波数推定時の雑音比率の増加と k_c の値により、2段階の誤差率の上昇が生じ、その時の B がFig.5のように変化することを確認している¹⁾。よって、 B の変動が小さくなるよう k_c を変えて周波数推定を繰り返せば、雑音耐性のある推定が可能と考えられる。

そこで $k_c = 50$ とし、8点の標本値から2つの B を求め、その差が ± 0.0001 になるまで f_s を $1/20$ ずつ下げながら B を繰り返し求める操作を加えた周波数推定方法をシミュレーションした。

その結果をFig.6に示す。これにより2回目の誤差率上昇の抑制と、一桁の誤差率改善ができた。部分的に誤差率の上昇が生じるのは、2つの B が真値と異なっても、差が 0.0001 以下となり上記の操作が効かなかったためと考えられる。

また、標本化周波数を下げる割合を変え、 $1/10$ にとると、誤差率の変動は抑えられたが、全体的な誤差率は大きくなってしまった。これは、標本化周波数を減らす割合が大きいため、最適な標本化周波数を逃してしまうためと考えられる。逆に $1/20$ の場合では、標本化周波数を減らす割合が小さいため最適な標本化周波数になる可能性は大きい、その値になるまでに2つの B の差が 0.0001 になり、結果的に真の B から外れ、誤差率の原因になったと考えられる。

4. まとめ

4 - 1 Prony法による周波数推定器

Prony法では、最良で誤差率約 0.005 で周波数推定を行うことができた。また、その誤差率は量子化誤差や標本値に重畳した雑音が原因でないこともわかった。残る原因として、入力した正弦波そのものの歪と標本化を行った位相が挙げられる。Prony法は、そのアルゴリズムから標本化を行った初期位相を求められるため、これを用いて標本化を行う位相を選択することで、誤差率の改善ができると思われる。

4 - 2 Binary法の雑音耐性の向上

Binary法は、周波数推定に用いる標本値の量から、Prony法より多くの情報をえることができる。それにより、Prony法より雑音耐性がある周波数推定ができるが、今回はBinary法の欠点であった、雑音による誤差率の2段階上昇を抑えることができた。

参考文献

- 1) 石山 亮, 久保和良: 周波数推定法に関する研究, 平成12年度小山工業高等専門学校電子制御工学科卒業研究中間発表会抄録集, S1(2000,10)
- 2) 井 研治, 野呂雄一, 服部昭三: Prony法の周波数推定アルゴリズムに及ぼす雑音の影響, 日本音響学会誌, 42, 11, 853 / 859(1986)

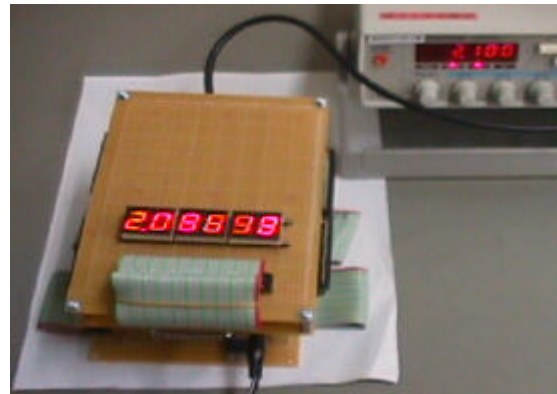


Fig.1 Developed frequency-estimator.

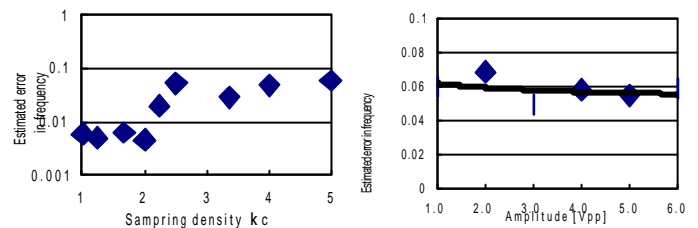


Fig.2 Errors in estimated frequency against Sampling density.

Fig.3 Errors in estimated frequency against Amplitude.

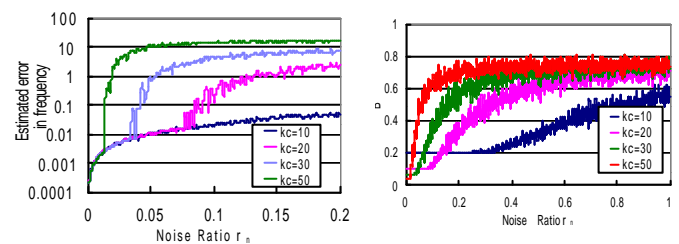


Fig.4 Errors in estimated frequency against Noise ratio by Binary Method

Fig.5 Final values of B against Noise ratio by Binary Method

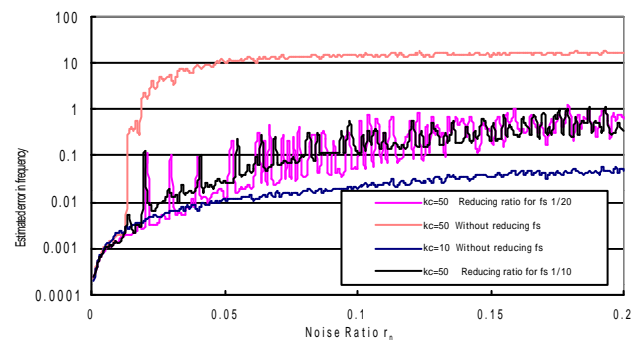


Fig.6 Errors in estimated frequency against Noise ratio by Binary Method with reducing fs.