小山工業高等専門学校研究紀要
第 36 号 (2004)，　35 － 44

微分方程式と差分方程式〔II〕(山辺の方法を中心として)

Differential Equations and Difference Equations〔II〕(with a special focus on Yamabe's method)

河　島　　博

Hiroshi KAWASHIMA

11．不定積分への応用

次の不定積分を山辺の方法を使って求める。

$G(x) \equiv \int x^3 e^{ax}dx$(但し a は 0 でない定数)　(イ)

$\Longleftrightarrow G'(x) = x^3 e^{ax}$　(ロ)

ここで，$G(x) \equiv e^{ax}g(x)$　(ハ)

として，(ロ) $\Longleftrightarrow$

$ae^{ax}g(x)+e^{ax}g'(x) = x^3e^{ax} \Longleftrightarrow$

$(a+D)g(x) = x^3$　(ニ)

つまり，(ニ)の非同次の特解を求めれば良いことになる。これは1階の微分方程式で，次のようにして山辺の方法で解ける。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{a}x^3-\frac{3}{a^2}x^2+\frac{6}{a^3}x-\frac{6}{a^4} \\
\hline
a+D & x^3 \\
 & x^3+\frac{3}{a}x^2 \\
\cline{2-2}
 & -\frac{3}{a}x^2 \\
 & -\frac{3}{a}x^2-\frac{6}{a^2}x \\
\cline{2-2}
 & \frac{6}{a^2}x \\
 & \frac{6}{a^2}x+\frac{6}{a^3} \\
\cline{2-2}
 & -\frac{6}{a^3} \\
 & -\frac{6}{a^3} \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
\qquad (ホ)
$$

(ホ)より，$g(x)$ が求まり，不定積分 $G(x)$ は

$$G(x) = e^{ax}\left(\frac{1}{a}x^3-\frac{3}{a^2}x^2+\frac{6}{a^3}x-\frac{6}{a^4}\right) \qquad (ヘ)$$

となる。〈注：積分定数は略す。〉

これをもう少し見易い計算で行うと，

$$\frac{1}{a+D} = \frac{1}{a}\times\frac{1}{1-\left(\frac{-D}{a}\right)} = \frac{1}{a}\times\left\{1+\left(\frac{-D}{a}\right)+\left(\frac{-D}{a}\right)^2+\left(\frac{-D}{a}\right)^3+\cdots\right\}$$

より

$$g(x) = \frac{x^3}{a+D} = \frac{1}{a}\left\{x^3+\left(\frac{-1}{a}\right)Dx^3+\frac{1}{a^2}D^2x^3+\left(\frac{-1}{a^3}\right)D^3x^3\right\} = \frac{1}{a}\left(x^3-\frac{3}{a}x^2+\frac{6}{a^2}x-\frac{6}{a^3}\right)$$

〈注：$D^nx^3 \equiv 0 (n \geqq 4)$〉

で，同じ結論に達する。

これを，次の〔定理1〕にまとめる。

〔定理1〕$G(x) \equiv \int x^ne^{ax}dx (a \fallingdotseq 0, n$ は正整数)

は，次の式で与えられる。

$$G(x) = e^{ax}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_nP_r}{a^{r+1}}x^{n-r} (但し\ {}_nP_0 \equiv 1)$$

〔証〕まず，与式より $G'(x) = x^ne^{ax}$ であるから，$G(x) \equiv e^{ax}g(x)$ とすれば，$G'(x) = (e^{ax})'g(x)+e^{ax}g'(x)$ より

$(ae^{ax})g(x)+e^{ax}g'(x) = x^ne^{ax} \Longleftrightarrow$

$(a+D)g(x) = x^n$

となる。

$$\frac{1}{a+D} = \frac{1}{a}\times\frac{1}{1-\left(\frac{-D}{a}\right)} = \frac{1}{a}\times\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{-D}{a}\right)^r$$ であるから

$$g(x) = \frac{1}{a+D}x^n = \frac{1}{a}\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{a^r}D^rx^n$$ 〈所で $D^rx^n = n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r}$ であるから〉

$$\therefore g(x) = \frac{1}{a}\times\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{a^r}{}_nP_rx^{n-r}$$ で，これから

$$G(x) = e^{ax}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{a^{r+1}}{}_nP_rx^{n-r}$$ が言えた。〔了〕

〔定理1の系〕

$I_n=\int x^m(\log x)^n dx$ ($m\neq-1$, n は正の整数)

は次の式で与えられる。

$$I_n=\frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_nP_r}{(m+1)^r}(\log x)^{n-r}$$

〔証明〕 $t\equiv\log x\Longleftrightarrow x=e^t$, $\therefore dx=e^t dt$ より

$I_n=\int(e^t)^m t^n\times e^t dt=\int e^{(m+1)t}t^n dt$ であるから，

〔定理1〕により

$a=m+1$, n はそのままであるから，

$$I_n=e^{(m+1)t}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{(m+1)^{r+1}}{}_nP_r t^{n-r}=x^{m+1}\times$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r{}_nP_r}{(m+1)^{r+1}}(\log x)^{n-r}$$ で良い。 〔了〕

〈注：$m=-1$ のとき $I_n=\dfrac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}$ 〉

12. 定数係数の2階線形微分方程式の解法

(i) 線形微分方程式(*L. D. E.*)

$$L(y)\equiv y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \qquad (1)$$

において，$R(x)\equiv 0$ のとき，つまり

$$L(y)=y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (2)$$

を同次 *L. D. E.* といい，$R(x)\neq 0$ のとき，(1)を非同次 *L. D. E.* という。

次の定理は良く知られているが，証明を与えておく。〈注：〔定理3〕は他の成書を見られたい。〉

〔定理2〕 u_1, u_2 が $L(y)=0$ の解である $\Longrightarrow$ 任意の定数 C_1, C_2 について，$C_1u_1+C_2u_2$ も $L(y)=0$ の解である。

〔証〕 $L(u_1)=0, L(u_2)=0$ であるから

$L(C_1u_1+C_2u_2)=C_1L(u_1)+C_2L(u_2)=0$ 〔了〕

〈注：$L(C_1u_1+C_2u_2)=(C_1u_1+C_2u_2)''+P\times(C_1u_1+C_2u_2)'+Q(C_1u_1+C_2u_2)=(C_1u_1''+C_2u_2'')+P(C_1u_1'+C_2u_2')+Q(C_1u_1+C_2u_2)$

$=C_1(u_1''+Pu_1'+Qu_1)+C_2(u_2''+Pu_2'+u_2)$

$=C_1L(u_1)+C_2L(u_2)$ より

$L(C_1u_1+C_2u_2)=C_1L(u_1)+C_2L(u_2)$ 〉

〔定理3〕(同次 *L. D. E.* の一般解)

u_1, u_2 が $L(y)=0$ の線形独立な解である $\Longrightarrow$ $L(y)=0$ の一般解は，次の式で表わされる。

$C_1u_1+C_2u_2$ (但し C_1, C_2 は任意定数)

〈注1：かかる u_1, u_2 の存在は知られている〉

〈注2：2つの関数 $u(x), v(x)$ があるとき，定数 C_1, C_2 について

$$C_1u(x)+C_2v(x)\equiv 0\Longrightarrow C_1=C_2=0$$

が常に成り立つとき，$u(x), v(x)$ は一次(線形)独立であるという。また，そうでないとき，$u(x)$, $v(x)$ は一次(線形)従属であるという。〉

〔定理4〕(非同次 *L. D. E.* の一般解)

$L(y)=R(x)$ (但し $R(x)\neq 0$)の一般解 y は，その1つの解 y_1 と $L(y)=0$ の一般解 u との和 $u+y_1$ で与えられる。

〔証〕 仮定により

$L(y_1)=R(x), L(u)=0$ であるから

$u\equiv y-y_1\Longleftrightarrow y=u+y_1$ とすれば

$L(u) = L(y)-L(y_1) = R(x)-R(x) = 0$

となる。

つまり $u = C_1u_1+C_2u_2$ とかける。(∴ 上の〔定理3〕より)

逆に $y = C_1u_1+C_2u_2+y_1$ は $L(y) = R(x)$ を満たすことは明らかである。〔了〕

〈注：y_1 のことを特解という。〉

(ii) 定数係数同次 L. D. E.

次の定理は良く知られている。〈注：大日本図書の微分積分IIの p. 124 の枠を参照せよ。〉

〔定理5〕(定数係数同次 L. D. E. の一般解)

$L(y) \equiv y''+ay'+by = 0$ (但し a, b は実の定数) (1)

の一般解 y は，特性方程式

$K(\lambda) \equiv \lambda^2+a\lambda+b = 0$ (2)

の根に対応して，次の式で与えられる。

(1) 異なる2実根 α, β を持つとき

$y = C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

(2) 2重根 α を持つとき

$y = C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$

(3) 共役な虚根 $p\pm qi$ (p, q は実で，$q \neq 0$) を持つとき

$y = C_1e^{px}\cos qx+C_2e^{px}\sin qx$

(但し C_1, C_2 は任意定数)

(iii) 定数係数非同次 L. D. E. の特解

a, b を実の定数とする非同次 L. D. E.

$L(y) \equiv y''+ay'+by = e^{kx}P_n(x)$ (1)

の特解 $y_1(x)$ を求める方法を示す。(但し，k は0でない定数(虚数も許す)，$P_n(x)$ は x の n 次の整式とする。)

$y \equiv e^{kx}Z$ とおくと，$y' = (e^{kx})'Z+e^{kx}Z'$ $= e^{kx}(Z'+kZ)$，$y'' = (e^{kx})''Z+2(e^{kx})'Z'+e^{kx}$ $\times Z'' = e^{kx}(Z''+2kZ'+k^2Z)$ であるから

$$L(y) = e^{kx}\{(Z''+2kZ'+k^2Z)+a(Z'+kZ)+bZ\}$$
$$= e^{kx}\{Z''+(2k+a)Z'+(k^2+ak+b)Z\}$$

〈所で，$k^2+ak+b = K(k)$，$2k+a = K'(k)$ であるから，(1)を考慮して〉

$\therefore Z''+K'(k)Z'+K(k)Z = P_n(x)$ (2)

つまり，(1)の特解 y_1 は(2)の特解 Z_1 を求めて

$y_1 = e^{kx}Z_1$ (3)

で求まる。

これを使って，具体的な問題を解いてみよう。

【例題1】次の L. D. E. の特解 y_1 と，その一般解 y を求めよ。

① $y''-3y'+y = x^2$ ② $y''+5y'+4y = 3e^{-2x}$

〔解〕① $K(\lambda) \equiv \lambda^2-3\lambda+1$ であるから

$$K(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

より

$L(y) \equiv y''-3y'+y = 0$ の一般解 u は

$u = C_1e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}+C_2e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$

となる。

次に，$K(D) = 1-3D+D^2$ となるから

与式 $\Longleftrightarrow (1-3D+D^2)y = x^2$

に注目すると，次の計算が出来る。

$$\begin{array}{l} \ \ x^2+6x+16 \\ 1-3D-D^2\ \overline{)\ x^2} \qquad\qquad 2x \qquad \overset{2}{\overset{|||}{D(2x)}} \\ \qquad\qquad \underline{x^2-3\times 2x+2(1\times x^2-3Dx^2+D^2x^2)} \\ \qquad\qquad\quad 6x-2 \\ \qquad\qquad\quad \underline{6x-18(1\times 6x-3\times \overset{6}{D(6x)})} \\ \qquad\qquad\qquad 16 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{16} \\ \qquad\qquad\qquad\ 0 \end{array}$$

これより $y_1=x^2+6x+16$ であるから

〔答〕 $y=C_1e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}+C_2e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}+(x^2+6x+16)$

②$K(\lambda)=\lambda^2+5\lambda+4=0\Longleftrightarrow(\lambda+1)(\lambda+4)=0$ $\Longleftrightarrow\lambda=-1,-4$ より同次形の一般解 u は

$$u=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$$

となる。

次に, $K(-2)=(-2)^2+5(-2)+4=-2, K'(-2)=2\times(-2)+5=1$ ($\because K'(\lambda)=2\lambda+5$ より) となるから, (2)は次の式で与えられる。

$$Z''+Z'+(-2)Z=3$$

これは $Z_1=\dfrac{3}{-2}=-\dfrac{3}{2}$ を解とするから

$y_1=-\dfrac{3}{2}e^{-2x}$ が出る。

〔答〕 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\dfrac{3}{2}e^{-2x}$

//

【例題2】次の $L.\ D.\ E.$ の特解を求めて，解け。

①$u''+u'-2u=10\cos x$ 　　(イ)

②$v''+v'-2v=10\sin x$ 　　(ロ)

〔解〕 $1\times$ (イ) $+i\times$ (ロ):

$(u+iv)''+(u+iv)'-2(u+iv)$

$=10(\cos x+i\sin x)$

ここで

$w\equiv u+iv, L(y)\equiv y''+y'-2y$ として

$L(w)=w''+w'-2w=10e^{ix}$ 　　(ハ)

$K(\lambda)\equiv\lambda^2+\lambda-2, K'(\lambda)=2\lambda+1$ より

$K(i)=i^2+i-2=-3+i, K'(i)=1+2i$ であるから $w\equiv Ze^{ix}$ として, (2)は次のようになる。

$Z''+(1+2i)Z'+(-3+i)Z=10$ 　　(ニ)

よって, $Z_1=\dfrac{10}{-3+i}$ と取れるから

$w_1=\dfrac{10}{-3+i}e^{ix}=10\times\dfrac{1}{-3+i}\times(\cos x+i\sin x)$

$=(-3-i)(\cos x+i\sin x)=\{(-3\cos x+\sin x)+i(-\cos x-3\sin x)\}$ より

$u_1=-3\cos x+\sin x, v_1=-\cos x-3\sin x$

また, $L(y)=0$ の一般解 y は

$K(\lambda)\equiv\lambda^2+\lambda-2=(\lambda+2)(\lambda-1)=0\Longleftrightarrow\lambda=-2,1$

より $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$ であるから

〔①の答〕

$$u=C_1e^{-2x}+C_2e^x+(-3\cos x+\sin x)$$

〔②の答〕

$$v=C_1e^{-2x}+C_2e^x+(-\cos x-3\sin x)$$

//

〔定理6〕 $L(y)\equiv y''+ay'+by=ce^{kx}$ 　　(1)′

$K(\lambda)\equiv\lambda^2+a\lambda+b$ としたとき, (1)′ の特解 y_1 は次のように与えられる。

① $K(k)\neq0$ のとき $\Longleftrightarrow k$ が $K(\lambda)=0$ の根でないとき 　$y_1=\dfrac{c}{K(k)}e^{kx}$

② $K(k)=0, K'(k)\neq0$ のとき $\Longleftrightarrow k$ が $K(\lambda)=0$ の単根のとき $y_1=\dfrac{c}{K'(k)}xe^{kx}$

③ $K(k)=0, K'(k)=0$ のとき $\Longleftrightarrow k$ が $K(\lambda)=0$ の重根のとき $y_1=\dfrac{c}{K''(k)}x^2e^{kx}\left(=\dfrac{c}{2}x^2e^{kx}\right)$

〔証〕 (iii)の(1), (2), (3)を使って解くと,

①のとき, (2)は

$Z''+K'(k)Z'+K(k)Z=c$ より

$Z_1=\dfrac{c}{K(k)}$ と取れるから, (3)よりよい。

②のとき, (2)は

$Z''+K'(k)Z'=c$ より

$$Z_1' = \frac{c}{K'(k)} \Longleftrightarrow Z_1 = \int \frac{c}{K'(k)}dx = \frac{c}{K'(k)}x$$

でよい。

③のとき，(2)は

$Z_1'' = c$ より $Z_1' = \int cdx = cx$，よってまた

$Z_1 = \int cxdx = \frac{c}{2}x^2$ と取れるからよい。〔了〕

この〔定理6〕の応用として，次の〔例題3〕を解く。

【例題3】次の$L.\ D.\ E.$の特解を求めて解け。

① $u''+u = 2\cos x$ (イ)

② $v''+v = 2\sin x$ (ロ)

〔解〕$w \equiv u+iv$, $L(y) \equiv y''+y$として

$1\times$ (イ) $+i\times$ (ロ)を辺々計算して

$L(w) = w''+w = 2e^{ix}$ (ハ)

$K(\lambda) \equiv \lambda^2+1$, $K'(\lambda) = 2\lambda$ より

$K(i) = i^2+1 = 0$, $K'(i) = 2i \neq 0$ より〔定理6〕の②のときであるから，

$$w_1 = \frac{2}{K'(i)}xe^{ix} = x\times\frac{1}{i}(\cos x+i\sin x)$$

$= x(\sin x-i\cos x)$ となり，

$u_1 = x\sin x$, $v_1 = -x\cos x$

また，$L(y) = 0$ の一般解 y は $K(\lambda) = \lambda^2+1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm i$ より $y = C_1\cos x+C_2\sin x$ であるから($\because p = 0, q = 1$ より)

〔①の答〕$u = (C_1\cos x+C_2\sin x)+x\sin x$

〔②の答〕$v = (C_1\cos x+C_2\sin x)-x\cos x$ //

13. 定数係数の2階線形差分方程式の解法

(ⅰ)(定数係数)線形差分方程式($l.\ d.\ e.$)

〈注：d の意味は *difference* から来ている。〉

$$L(y) \equiv y(x+2)-ay(x+1)+by(x) = r(x) \quad (1)$$

(但し a, b は実の定数で $b \neq 0$ とする。)〈注：$b = 0$ だと(1)は1階の $l.\ d.\ e.$ となるから〉

$r(x) \equiv 0$ のとき，つまり

$$L(y) = y(x+2)-ay(x+1)+by(x) = 0 \quad (2)$$

を同次 $l.\ d.\ e.$ といい，$r(x) \neq 0$ のとき，(1)を非同次 $l.\ d.\ e.$ という。

〔定理7〕u_1, u_2 が $L(y) = 0$ の解である $\Longrightarrow$ 任意の定数 C_1, C_2 について，$C_1u_1+C_2u_2$ も $L(y) = 0$ の解である。

〔証〕仮定より $L(u_1) = 0$, $L(u_2) = 0$ であるから

$L(C_1u_1+C_2u_2) = C_1L(u_1)+C_2L(u_2) = 0$ 〔了〕

〈注：$L(C_1u_1+C_2u_2) = (C_1u_1+C_2u_2)(x+2) -a\times(C_1u_1+C_2u_2)(x+1)+b\times(C_1u_1+C_2u_2)(x) = \{C_1u_1(x+2)+C_2u_2(x+2)\}-a\times \{C_1u_1(x+1)+C_2u_2(x+1)\}+b\times\{C_1u_1(x) +C_2u_2(x)\} = C_1\{u_1(x+2)-a\times u_1(x+1)+b\times u_1(x)\}+C_2\{u_2(x+2)-a\times u_2(x+1)+b\times u_2(x)\} = C_1L(u_1)+C_2L(u_2)$

$\therefore L(C_1u_1+C_2u_2) = C_1L(u_1)+C_2L(u_2)$ 〉

〔定理8〕u_1, u_2 が $L(y) = 0$ の一次独立な解である $\Longrightarrow L(y) = 0$ の一般解 y は，次の形で表わされる。

$y = C_1u_1+C_2u_2$(但し C_1, C_2 は任意定数)

〈注1：この u_1, u_2 は〔定理10〕で具体的に与えられる。〉

〈注2：2つの関数 $u(x), v(x)$ があるとき，定数 C_1, C_2 について

$C_1u(x)+C_2v(x) \equiv 0 \Longrightarrow C_1 = C_2 = 0$

が常に成り立つとき，$u(x), v(x)$ は一次独立であるという。また，そうでないとき，$u(x), v(x)$ は

一次従属であるという。〉

〈注3：成書を見て貰うと判るが，独立変数を整数だけでなく，連続量も許すと，この定理は成立しない。丸山のｐ．124～ｐ．125を参照せよ。〉

〈注4：離散量に x を絞ると，$u_1(x), u_2(x)$ が一次独立 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} u_1(0), u_2(0) \\ u_1(1), u_2(1) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (イ)$$

となることが分かる。

〔証〕(イ)の前提のもとに

$$\begin{cases} C_1u_1(0)+C_2u_2(0)=0 \\ C_1u_1(1)+C_2u_2(1)=0 \end{cases} \qquad (ロ)$$

だと $C_1=C_2=0$ が出る(クラメルの公式より)からである。(注：(イ)の前提のもとに $u_1(x), u_2(x)$ の一次独立が出る。対偶を取って，$u_1(x), u_2(x)$ が一次従属ならば(イ)が成り立たない。つまり，(イ)の左辺 $=0$ になる。)

次に，(イ)の左辺 $=0 \Longrightarrow u_1(x), u_2(x)$ が一次従属をいう。

$$u_1(x+2)=au_1(x+1)-bu_1(x) \qquad (ハ)$$

$$u_2(x+2)=au_2(x+1)-bu_2(x) \qquad (ニ)$$

$C_1\times$ (ハ) $+C_2\times$ (ニ)を辺々計算すれば，

$$C_1u(x+2)+C_2u_2(x+2)=a\{C_1u_1(x+1)+C_2u_2(x+1)\}-b\{C_1u_1(x)+C_2u_2(x)\} \qquad (ホ)$$

(ホ)で $x=0,1,2,3,\cdots\cdots$ と動かせば，

$C_1u_1(y)+C_2u_2(y)=0(y=2,3,4,\cdots\cdots\cdots)$

が出る〈注：(イ)の左辺 $=0$ のもとに，(ロ)を満たす $(C_1, C_2)\neq 0$ なる C_1, C_2 が存在する)からよい。

つまり，$u_1(x), u_2(x)$ は一次従属が言えた。〉

〔証〕$y(x)\equiv C_1u_1(x)+C_2u_2(x)$

として $C_1u_1(0)+C_2u_2(0)=y(0)$

$C_1u_1(1)+C_2u_2(1)=y(1)$

とおけば

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} u_1(0), u_2(0) \\ u_1(1), u_2(1) \end{vmatrix}, \Delta_1\equiv\begin{vmatrix} y(0), u_2(0) \\ y(1), u_2(1) \end{vmatrix}, \Delta_2\equiv\begin{vmatrix} u_1(0), y(0) \\ u_1(1), y(1) \end{vmatrix}$$

として，$C_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, C_2\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ が出て，また，$y(x)$ は $L(y)=0$ を満足するからよい。〔了〕

〔定理9〕(非同次 *l. d. e.* の一般解)

$L(y)=r(x)$(但し $r(x)\neq 0$)の一般解 $y(x)$ は，その一つの解 $y^*(x)$ と $L(y)=0$ の一般解 $u(x)$ との和 $(y=)u+y^*$ で与えられる。

〔証〕仮定により

$L(y^*)=r(x)$ であるから

$u\equiv y-y^*\Longleftrightarrow y=u+y^*$ とすれば

$L(u)=L(y)-L(y^*)=r(x)-r(x)=0$

となる。

つまり $u=C_1u_1+C_2u_2$ とかける。(∵〔定理8〕によって)

逆に $y=C_1u_1+C_2u_2+y^*$ は $L(y)=r(x)$ を満足する。〔了〕

〈注：y^* のことを特解という。〉

(ii)定数係数同次 *l. d. e.* の解法

$$L(y)\equiv y(x+2)-ay(x+1)+by(x)=0 \qquad (1)$$

(但し a, b は実の定数で，$b\neq 0$)を考えよう。

〔定理10〕(1)の一般解 $y(x)$ は，特性方程式

$$K(t)\equiv t^2-at+b=0(b\neq 0) \qquad (2)$$

の根に対応して，次のように与えられる。

①異なる2実根 α, β を持つとき

$y=C_1\alpha^x+C_2\beta^x$

②2重根 α を持つとき

$y=C_1\alpha^x+C_2x\alpha^x$

③共役な虚根 $p\pm qi$ (p, q は実数で，$q\neq 0$)を持つとき，$p+qi=re^{i\theta}$ となるように r, θ を定めれば(但し $r=\sqrt{p^2+q^2}, p=r\cos\theta, q=r\sin\theta$)

$y=C_1r^x\cos\theta x+C_2r^x\sin\theta x$

(但し C_1, C_2 は任意定数)

〔証〕

$$L(y) \equiv y(x+2)-ay(x+1)+by(x)=0 \quad (1)$$

$$K(t) \equiv t^2-at+b=0 (\text{但し } b \neq 0) \quad (2)$$

(1)は $L(y)=E^2y(x)-aEy(x)+by(x)$
$=(E^2-a\times E+b)y(x)=K(E)y(x)=0 \quad (1')$
となることに注目すれば〈注：$b \neq 0$ より(2)の特性根は0にならない。〉

①のとき

$K(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$ より $K(E)=(E-\alpha)(E-\beta)$ であるから，$(E-\beta)\beta^x=E\beta^x-\beta\cdot\beta^x=\beta^{x+1}-\beta^{x+1}=0$ に注意して $L(\beta^x)=K(E)\beta^x=(E-\alpha)\{(E-\beta)\beta^x\}=0$ となる。同様にして $L(\alpha^x)=(E-\beta)\{(E-\alpha)\alpha^x\}=0$ だから

$$y(x)=C_1\alpha^x+C_2\beta^x \quad (3)$$

は(1)の一般解である。

〈注：(3)より $y(0)=C_1\alpha^0+C_2\beta^0=C_1+C_2$, $y(1)=C_1\alpha+C_2\beta$ となるから，次のように見て

$$\begin{cases} C_1+C_2=y(0) \\ \alpha C_1+\beta C_2=y(1) \end{cases} \text{より} \ \Delta \equiv \begin{vmatrix} 1, 1 \\ \alpha, \beta \end{vmatrix} = \beta-\alpha \neq 0, \Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} y(0), 1 \\ y(1), \beta \end{vmatrix} = \beta y(0)-y(1), \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} 1, y(0) \\ \alpha, y(1) \end{vmatrix}$$

$=y(1)-\alpha y(0)$ としてクラメルの公式より，C_1, C_2 は次のようになる。

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\beta y(0)-y(1)}{\beta-\alpha}, C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{y(1)-\alpha y(0)}{\beta-\alpha} \rangle$$

②のとき

$K(t)=(t-\alpha)^2, K(E)=(E-\alpha)^2$
$=E^2-2\alpha E+\alpha^2$ となる。

まず①より $L(\alpha^x)=(E-\alpha)^2\alpha^x=0$ は良い。

$L(x\alpha^x)=E^2(x\alpha^x)-2\alpha E(x\alpha^x)+\alpha^2(x\alpha^x)$
$=(x+2)\alpha^{x+2}-2\alpha(x+1)\alpha^{x+1}+\alpha^2(x\alpha^x)$
$=\alpha^x\{(x+2)\alpha^2-2\alpha^2(x+1)+\alpha^2x\}=$〈所で $\{\}=(x\alpha^2+2\alpha^2)-(2x\alpha^2+2\alpha^2)+\alpha^2x$
$=x(\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2)+(2\alpha^2-2\alpha^2)=0$ より〉
$=\alpha^x\times 0=0 \Longleftrightarrow L(x\alpha^x)=0$ であるから

$$y(x)=C_1\alpha^x+C_2x\alpha^x \quad (4)$$

は(1)の一般解である。

〈注：(4)より $y(0)=C_1\times 1+C_2\times 0=C_1$, $y(1)$

$$=C_1\alpha+C_2\alpha=\alpha(C_1+C_2) \Longleftrightarrow C_1+C_2=\frac{1}{\alpha}y(1)$$

$$\Longleftrightarrow C_2=\frac{1}{\alpha}y(1)-C_1=\frac{1}{\alpha}y(1)-y(0)$$

つまり $C_1=y(0)$, $C_2=\dfrac{1}{\alpha}y(1)-y(0)$ 〉

③のとき

$K(t)=\{t-(p+qi)\}\{t-(p-qi)\}$
$=t^2-2pt+(p^2+q^2), K(E)=E^2-2pE+(p^2+q^2)$ であるから
$\{E-(p+qi)\}(p+qi)^x=E(p+qi)^x-(p+qi)(p+qi)^x=(p+qi)^{x+1}-(p+qi)^{x+1}=0$ となり
$\therefore L\{(p+qi)^x\}=\{(E-(p-qi)\}[\{(E-(p+qi)\}(p+qi)^x]=\{(E-(p-qi)\}\cdot 0=0$, 同様にして $L\{(p-qi)^x\}=0$

つまり

$y(x) \equiv c_1(p+qi)^x+c_2(p-qi)^x$ について
$L(y)=c_1L\{(p+qi)^x\}+c_2L\{(p-qi)^x\}=0$
が言えた。

この $y(x)$ は $p+qi=re^{i\theta}, p-qi=re^{-i\theta}$ より
$y(x)=c_1r^xe^{i\theta x}+c_2r^xe^{-i\theta x}$ とかけるから
$y(x)=c_1r^x(\cos\theta x+i\sin\theta x)+c_2r^x(\cos\theta x-i\sin\theta x)$
$=(c_1+c_2)r^x\cos\theta x+i(c_1-c_2)r^x\sin\theta x$

これが $y(x)=C_1r^x\cos\theta x+C_2r^x\sin\theta x$ になるには

$$\begin{cases} c_1+c_2=C_1 \\ i(c_1-c_2)=C_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=C_1 \\ c_1-c_2=-iC_2 \end{cases} \text{より}$$

$$c_1=\frac{1}{2}(C_1-iC_2), c_2=\frac{1}{2}(C_1+iC_2)$$

と取ればよい。

つまり

$$y(x)=C_1r^x\cos\theta x+C_2r^x\sin\theta x \quad (5)$$

が(1)の一般解である。

〈注：(5)より
$y(0)=C_1r^0\cos 0+C_2r^0\sin 0=C_1 \Longleftrightarrow C_1=y(0)$,
$y(1)=C_1r\cos\theta+C_2r\sin\theta=r\{y(0)\cos\theta+C_2\sin\theta\}$

$$\Longleftrightarrow C_2\sin\theta=\frac{1}{r}y(1)-y(0)\cos\theta \Longleftrightarrow C_2$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{1}{r}y(1)-y(0)\cos\theta\right\}$$ (注意：$\sin\theta=\dfrac{q}{r}\neq 0$ より良い。)〉

【例題1】次の $l.d.e.$ の一般解を求めよ。

①$y(x+2)-5y(x+1)+6y(x)=0$
②$y(x+2)-4y(x+1)+4y(x)=0$
③$y(x+2)-6y(x+1)+25y(x)=0$

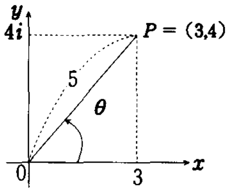
〔解〕①$K(t)\equiv t^2-5t+6=0 \Longleftrightarrow (t-2)(t-3)=0$
$\Longleftrightarrow t=2,3$(異なる2実根)より

(答) $y=C_1 2^x+C_2 3^x$(C_1, C_2 は任意定数)

②$K(t)\equiv t^2+4t+4=0 \Longleftrightarrow (t+2)^2=0$
$\Longleftrightarrow t=-2$(2重根)より

(答) $y=C_1(-2)^x+C_2 x(-2)^x$

③$K(t)\equiv t^2-6t+25=0 \Longleftrightarrow (t-3)^2+16=0$
$\Longleftrightarrow (t-3)^2=-16 \Longleftrightarrow t-3=\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}\,i$
$=\pm 4i \Longleftrightarrow t=3\pm 4i$ より $p=3, q=4$ であるから，共役な虚根を持つ。



よって，図より
$r=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5,$
$\theta\equiv Tan^{-1}\dfrac{4}{3}$ であるから
$y=C_1 5^x\cos\theta x+C_2 5^x\sin\theta x$(答)

//

〈注：$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ とした方が正確。〉

(iii)定数係数非同次 $l.d.e.$ の特解

a, b を実の定数とする非同次 $l.d.e.$(但し $b\neq 0$)

$$L(y)\equiv y(x+2)-ay(x+1)+by(x)=\gamma^x P_n(x) \qquad (1)$$

の特解 y^* を求める方法を示す。(但し，γ は0でない定数(虚数も許す)，$P_n(x)$ は n 次の整式とする)

$y(x)\equiv\gamma^x Z(x)$ とすると，$y(x+1)=\gamma^{x+1}Z(x+1)$，$y(x+2)=\gamma^{x+2}Z(x+2)$ であるから
$L(y)=\gamma^{x+2}Z(x+2)-a\times\gamma^{x+1}Z(x+1)$
$+b\times\gamma^x Z(x)=\gamma^x P_n(x) \Longleftrightarrow \gamma^2 Z(x+2)-a\gamma Z(x+1)$

$$+bZ(x)=P_n(x) \qquad (2)$$

つまり，(1)の特解 y^* は(2)の特解 Z^* を求めて

$$y^*(x)=\gamma^x Z^*(x) \qquad (3)$$

で求まる。

これを使って，具体的な問題を解いてみよう。

【例題1】次の $l.d.e.$ の特解 y^* を求めよ。

①$y(x+2)+y(x+1)-2y(x)=9x^2+3x+2$
②$y(x+2)-y(x+1)-2y(x)=2^x(3x+8)$

〔解〕①$\Delta=E_1-1 \Longleftrightarrow E_1=1+\Delta, E_2=E_1^2$
$=1+2\Delta+\Delta^2$ より $E_2+E_1-2=(1+2\Delta+\Delta^2)$
$+(1+\Delta)-2=3\Delta+\Delta^2$ であることに注目して
与式 $\Longleftrightarrow (3+\Delta)\Delta y(x)=9x^2+3x+2=9x^{\langle 2\rangle}$
$+12x^{\langle 1\rangle}+2$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^{\langle 2\rangle}+2x^{\langle 1\rangle} \\
3+\Delta & 9x^{\langle 2\rangle}+12x^{\langle 1\rangle}+2 \\
 & 9x^{\langle 2\rangle}+6x^{\langle 1\rangle} \quad (3\times 3x^{\langle 2\rangle}+3\Delta x^{\langle 2\rangle}) \\
 & 6x^{\langle 1\rangle}+2 \\
 & 6x^{\langle 1\rangle}+2 \quad (3\times 2x^{\langle 1\rangle}+2\Delta x^{\langle 1\rangle} \\
 & 0
\end{array}$$

$2x^{\langle 1\rangle}$ /// $\equiv 1$

より $\Delta y(x)=3x^{\langle 2\rangle}+2x^{\langle 1\rangle}$ であるから
$y(x)=3\Delta^{-1}x^{\langle 2\rangle}+2\Delta^{-1}x^{\langle 1\rangle}=3\times\dfrac{x^{\langle 3\rangle}}{2+1}+2\times\dfrac{x^{\langle 2\rangle}}{1+1}$
$=x^{\langle 3\rangle}+x^{\langle 2\rangle}=x(x-1)(x-2)+x(x-1)$
$=x\times(x^2-3x+2)+(x^2-x)=(x^3-3x^2+2x)$
$+(x^2-x)=x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$

(答) $y^*(x)=x^3-2x^2+x(=x(x-1)^2)$

②$a\equiv 1, b\equiv -2, \gamma\equiv 2, P_n(x)\equiv 3x+8$ より，
(2)の左辺 $=2^2Z(x+2)-1\times 2Z(x+1)-2Z(x)$
$=\{4\times(1+2\Delta+\Delta^2)-2(1+\Delta)-2\}Z(x)=\{(4+8\Delta+4\Delta^2)-(2+2\Delta)-2\}Z(x)=(6\Delta+4\Delta^2)Z(x)$
$=(3+2\Delta)\times 2\Delta Z(x)$ より $(3+2\Delta)\times 2\Delta Z(x)$
$=3x+8$ を解けばよい。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^{\langle 1\rangle}+2 \\
3+2\Delta & 3x^{\langle 1\rangle}+8 \\
 & 3x^{\langle 1\rangle}+2 \\
 & 6 \\
 & 6 \\
 & 0
\end{array}$$

これから $2\Delta Z(x)=x^{\langle 1\rangle}+2 \Longleftrightarrow$
$2Z(x)=\Delta^{-1}x^{\langle 1\rangle}+2\Delta^{-1}1=\dfrac{1}{2}x^{\langle 2\rangle}+2x$
$=\dfrac{1}{2}x(x-1)+\dfrac{4x}{2}=\dfrac{x^2+3x}{2}$
$\therefore Z^*(x)=\dfrac{x^2+3x}{4}=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}x$

よって
$y^*(x)=2^xZ^*(x)$ により

(答) $y^*(x)=2^x\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}x\right)=2^{x-2}(x^2+3x)$

//

(iv) 差分方程式の応用

まず，2次の行列AについてA^nを求めて見る。
$A\equiv\begin{pmatrix}a,b\\c,d\end{pmatrix},\Gamma_{n+1}\equiv\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix},\Gamma_n\equiv\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$としたとき，
$\Gamma_{n+1}\equiv A\Gamma_n(n=1,2,3,\cdots\cdots)$より$\Gamma_{n+1}=A^n\Gamma_1$となるが，この$A^n$は$A$の固有方程式

$$|tE-A|=t^2-(a+d)t+\det A=0 \tag{1}$$

の根により，次の3つの場合に分けて解かれる。
〈注1：固有方程式は底の変換$P^{-1}AP$について不変だから，A^nは固有方程式の根だけから出す方が，固有ベクトルを使うより本質的である。〉
①(1)が異なる2実根α,βを持つとき
$|tE-A|=(t-\alpha)(t-\beta)=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta$
より，ケイレイ・ハミルトンの定理により

$$A^2=(\alpha+\beta)A-\alpha\beta E \tag{2}$$

が成り立つ。
今

$$A^n=a_nA+b_nE \tag{3}$$

で，a_n, b_nを定義すれば，
$A^{n+1}=a_nA^2+b_nA=a_n\{(\alpha+\beta)A-\alpha\beta E\}$
$+b_nA=\{(\alpha+\beta)a_n+b_n\}A-\alpha\beta a_nE$
$=a_{n+1}A+b_{n+1}E$により

$$\therefore\begin{cases}a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n+b_n & (4)\\ b_{n+1}=-\alpha\beta a_n & (5)\end{cases}$$

(5)より $b_n=-\alpha\beta a_{n-1}$ (5)′
を(4)に代入すると

$$a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta a_{n-1}\Longleftrightarrow \tag{6}$$

$$a_{n+1}-(\alpha+\beta)a_n+\alpha\beta a_{n-1}=0 \tag{6'}$$

(6)の特性方程式は

$$K(t)\equiv t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0\Longleftrightarrow t=\alpha,\beta \tag{7}$$

であるから，a_nは次の形でかける。

$$a_n=x\alpha^n+y\beta^n \tag{8}$$

所で，$A^0=E=a_0A+b_0E$より$a_0=0, b_0=1$，
$A^1=A=a_1A+b_1E$より$a_1=1, b_1=0$であるから

$$\begin{cases}a_0=x+y=0\\a_1=x\alpha+y\beta=1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\ \alpha x+\beta y=1\end{cases} \tag{9}$$

を解くと，

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}1 & , & 1\\ \alpha & , & \beta\end{vmatrix}=\beta-\alpha,\Delta_1\equiv\begin{vmatrix}0 & , & 1\\ 1 & , & \beta\end{vmatrix}=-1,$$

$\Delta_2\equiv\begin{vmatrix}1 & , & 0\\ \alpha & , & 1\end{vmatrix}=1$であるから

$x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-1}{\beta-\alpha}, y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{1}{\beta-\alpha}$となり

$$\therefore\begin{cases}a_n=\dfrac{-1}{\beta-\alpha}\alpha^n+\dfrac{1}{\beta-\alpha}\beta^n=\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}\\ b_n=-\alpha\beta a_{n-1}=-\alpha\beta\times\dfrac{-\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta\alpha^n-\alpha\beta^n}{\beta-\alpha}\end{cases}$$

②(1)が2重根αを持つとき①の(7)より
$K(t)\equiv t^2-2\alpha t+\alpha^2=(t-\alpha)^2=0\Longleftrightarrow t=\alpha$
(重根)であるから，a_nは次の形でかける。

$$a_n=x\alpha^n+yn\alpha^n \tag{10}$$

$$\therefore\begin{cases}a_0=x+0=0\\a_1=x\alpha+y\alpha=1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1/\alpha\end{cases} \tag{11}$$

$$\therefore\begin{cases}a_n=0+1/\alpha\times n\times\alpha^n=n\alpha^{n-1}\\ b_n=-\alpha^2a_{n-1}=-\alpha^2(n-1)\alpha^{n-2}=-(n-1)\alpha^n\end{cases}$$

③(1)が共役な虚根$p\pm qi$(但しp, qは実で$q\neq 0$)を持つとき，①の(7)より
$K(t)\equiv t^2-2pt+(p^2+q^2)=0\Longleftrightarrow t=p\pm qi$
であるから，a_nは次の形でかける。

$$a_n=xr^n\cos\theta n+yr^n\sin\theta n$$

$$\therefore\begin{cases}a_0=x\times1+0=0\Longleftrightarrow x=0\\ a_1=0+y\times r\sin\theta=y\times q=1\Longleftrightarrow y=\dfrac{1}{q}\text{より}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{q}\times r^n\sin\left(nSin^{-1}\dfrac{q}{r}\right)\\ b_n=-(p^2+q^2)a_{n-1}=\dfrac{r^2}{-q}\times r^{n-1}\sin\left\{(n-1)Sin^{-1}\dfrac{q}{r}\right\}\end{cases}$$

$$=-\frac{r^{n+1}}{q}\sin\left\{(n-1)Sin^{-1}\frac{q}{r}\right\}$$

(但し,$r\equiv\sqrt{p^2+q^2}$)〈注：点(p,q)が第1象限のときは良いが，他の象限では修正が必要になる場合もある。θならその心配はない。〉
以上のことをまとめて，次の〔定理11〕を得る。

〔定理11〕a, b, c, dを実定数として，
$A\equiv\begin{pmatrix}a, b\\c, d\end{pmatrix}$，$K(t)\equiv|tE-A|=0$の2根$\alpha_1$，$\alpha_2$を考えれば，$A^n=a_nA+b_nE$の係数$a_n$，$b_n$は2根$\alpha_1$，$\alpha_2$の取る3つの状況に応じて，次のように与えられる。(但し$\det A\neq 0$とする)

①異なる２実根を持つとき($\Longleftrightarrow \alpha_1=\alpha, \alpha_2=\beta$ かつ $\alpha \neq \beta$ で, α, β は実のとき)

$$a_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha},\ b_n=\frac{\beta\alpha^n-\alpha\beta^n}{\beta-\alpha}$$

②２重根を持つとき($\Longleftrightarrow \alpha_1=\alpha, \alpha_2=\alpha$ のとき)

$$a_n=n\alpha^{n-1},\ b_n=-(n-1)\alpha^n$$

〈注：重根のときは実根である。〉

③共役な虚根を持つとき($\Longleftrightarrow \alpha_1=p+qi, \alpha_2=p-qi$ かつ p, q は実で, $q \neq 0$ となるとき)

$$a_n=\frac{r^n}{q}\sin(n\theta),\ b_n=-\frac{r^{n+1}}{q}\sin\{(n-1)\theta\}$$

(但し, $r \equiv \sqrt{p^2+q^2}$, $\cos\theta=\dfrac{p}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{q}{r}$ とする。)

【例題１】次のように行列 A を与えたとき, A^n を求めよ。

$$①A=\begin{bmatrix}6, & 6\\ -2, & -1\end{bmatrix} ②A=\begin{bmatrix}0, & 1\\ -4, & 4\end{bmatrix} ③A=\begin{bmatrix}2, & 1\\ -17, & 4\end{bmatrix}$$

〔解〕① $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-6, & -6\\ +2, & t+1\end{vmatrix}=(t-6)(t+1)+12$

$=(t^2-5t-6)+12=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)=0 \Longleftrightarrow t=2, 3$

よって

$$a_n=\frac{3^n-2^n}{3-2}=3^n-2^n,\ b_n=\frac{3\times2^n-2\times3^n}{3-2}=3\times2^n-2\times3^n$$

$$\therefore A^n=(-2^n+3^n)\begin{bmatrix}6, & 6\\ -2, & -1\end{bmatrix}+(3\times2^n-2\times3^n)\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}a_{11}, & a_{12}\\ a_{21}, & a_{22}\end{bmatrix}$ として $a_{11}=-3\times2^n+4\times3^n$, $a_{12}=-3\times2^{n+1}+2\times3^{n+1}$, $a_{21}=2^{n+1}-2\times3^n$, $a_{22}=2^{n+2}-3^{n+1}$ を得る。

② $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-0, & -1\\ +4, & t-4\end{vmatrix}=t(t-4)+4=t^2-4t+4=(t-2)^2$

$=0 \Longleftrightarrow t=2$(重根)より

$a_n=n2^{n-1}$, $b_n=-(n-1)2^n$ であるから

$$\therefore A^n=n2^{n-1}\begin{bmatrix}0, & 1\\ -4, & 4\end{bmatrix}-(n-1)2^n\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(n-1)2^n, & n2^{n-1}\\ -n2^{n+1}, & (n+1)2^n\end{bmatrix}$$

③ $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2, & -1\\ +17, & t-4\end{vmatrix}=(t-2)(t-4)+17=(t^2-6t+8)$

$+17=t^2-6t+25=0 \Longleftrightarrow t=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times25}}{1}$

$=3\pm\sqrt{-16}=3\pm\sqrt{16}\,i=3\pm4i$ より $p=3, q=4$ であるから $r=\sqrt{p^2+q^2}=5$, $\theta=Sin^{-1}\dfrac{q}{r}=Sin^{-1}\dfrac{4}{5}$ と取れる。

$$a_n=\frac{5^n}{4}\sin\left(nSin^{-1}\frac{4}{5}\right),\ b_n=-\frac{5^{n+1}}{4}\sin\left\{(n-1)Sin^{-1}\frac{4}{5}\right\}$$

$A^n=\dfrac{5^n}{4}\sin\left(nSin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)\begin{bmatrix}2, & 1\\ -17, & 4\end{bmatrix}-\dfrac{5^{n+1}}{4}\sin\left\{(n-1)Sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right\}\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{bmatrix}$ より

$a_{11}=\dfrac{5^n}{2}\sin\left(nSin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{5^{n+1}}{4}\sin\left\{(n-1)Sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right\}$,

$a_{12}=\dfrac{5^n}{4}\sin\left(nSin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)$, $a_{21}=-\dfrac{17}{4}\times5^n\sin\left(nSin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)$,

$a_{22}=5^n\sin\left(nSin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{5^{n+1}}{4}\sin\left\{(n-1)Sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right\}$ となる。

〈注：ポケコンを使って計算すると($a_{-1}=-0.04$)
$a_0=0, a_1=1, a_2=6, a_3=11, a_4=-84, a_5=-779, a_6=-2574, a_7=4031, a_8=88536, a_9=430441, a_{10}=369246, a_{11}=-8545549, a_{12}=-60504444, a_{13}=-149387939, a_{14}=616283466, \cdots$ が出る。〉

14. あとがき

割当の枚数を超えそうなので，ここで止めるが，この後に〔定理 11〕を３次以上の行列でやって見たい。また 11. に対応した不定和分の公式も検討して見たい。

〔参 考 文 献 表〕

(1) 渡部 隆一，差分と和分，共立，1985
(2) 丸山 哲郎，差分方程式序説，現代数学社，1981
(3) 杉山 昌平，差分方程式入門，森北，1971
(4) 佐武 一郎，線型代数学，裳華房，1980
(5) 古屋 茂，行列と行列式，培風館，1961
(6) 上田 稔(他)，微分と積分(2)，大日本図書，1982
(7) 田河 生長(他)，微分積分Ⅱ，大日本図書，2000
(8) 矢野健太郎，微分方程式通論，日新出版，1969

「受理年月日　2003 年 9 月 26 日」