小山工業高等専門学校研究紀要
第 48 号(2015)　81－ 85

２次元 Voronoi 分割法によるカオス時系列予測に関する一考察

渡辺　達男*1

Some Consideration about Chaos Time Series Predicting by Two-Dimensional Voronoi Tesselation Method.

Tatsuo WATANABE

In this paper, several problems for using two-dimensional Voronoi Tesselation Method in chaos time series predicting, were found by this thesis. Voronoi Tesselation Method is employed as spatial split-plot design widely, and there is chaos time series predicting in one of its applicability. But Voronoi Tesselation Method of chaos time series, it's indicated to set the boundary condition that there is difficulty. The case that two-dimensional Voronoi Tesselation Method can't expect the effect so much by determinism-like chaos time series again is also indicated.

KEYWORDS： chaos time series,prediction, voronoi tesselation method, voronoi tesselation.

1. はじめに

ここ数年来、記録破りの大雨、台風、竜巻等自然災害が過去にも増して増えている。またそれに対する様々な被害、人的、財産等が起こっている。これは日本だけではなく、地球的規模で起きている。原因は大域的な気象観測などを十分に考慮し、注意深く考える必要がある。想像の域を出ないところであるが、地球温暖化は大きな原因の一つであろう。わずか１００年程度のスパンで、化石燃料を大量に燃焼しつつある地球は、明らかに、それ以前の地球環境とは異なってくることは容易に予測できる。無秩序でエネルギーを使いつづけている地球は、エネルギー保存則に従い、使用されたエネルギーの一部は地上に熱の形で留まる。それは地上から大気を超えて宇宙空間に放出されない。その熱による気象、環境に対する影響は多大であることは容易に想像できる。

そんななかで、変わりつつある環境の変化を未然に予測することは大変重要だと思われる。特に局地的な自然現象の予測は、人々に対して大きな貢献をもたらすことになろう。

地震、そして火山の噴火の予測なども、予測の精度が上がれば、人々に対して貢献が大きいだろう。

筆者は簡単な数学モデルを用いて、自然界の、特に気象の予測ができないかと考え、幾つもの方法を提示し、検証してきた [1-9]。

自然界の現象はカオス時系列と考えて良いことが多く、カオス時系列予測を精密に行うことは気象予測に役立つと考えられる。

また、自然の予測だけではなく、経済、工学等にも大いに役立つと思われる。

*1 電気電子創造工学科(Dept. of Innovative Electrical and Electronic Engineering)，E-mail: watanabe@oyama-ct.ac.jp

最近では工学において、危機回避を行うシステムが多く開発されている。ある程度のパターンがわかっているシステムでは１次元時系列予測が適応できる可能性がある。

１次元の時系列予測で有名な Lorenz の類推法は [10-11]、もともと気象の予測に用いるために考えられた。繰り返しパターンの多い気象の予測は、ある程度予測しやすい。しかし方法が単純すぎるため、あまり精度は良くなかった。

筆者はLorenzの類推法を改良することにより、予測精度があがることを示してきた [1-9]。Lorenz の類推法は単純な過去の繰り返しパターンを用いて、将来を予測する。しかし、過去のパターンの選択方法が単純であり､実際の予測には適さない。そこで、予測の元データとなる、時系列データの埋め込みに関する埋め込み次元数を変えることにより、ある次元で（予測する系に依存する）適切な予測ができることを明らかにした。また近傍点を用いた重み付けの方法でさらに精度があがることを示してきた。

その後、“予測誤差時系列を用いた補正法” を提案した [7]。これは誤差にもある系統的パターンがあることを利用したもので、予測の１次補正のことである。

RBFN 法の予測では予測の元となるデータが非常に少なく予測できる。これはニューロネットの変形であり、センターベクトルをうまく選ぶことにより、予測精度が良くなることを示した。

以上の方法を複数組み合わせて予測することによりさらに予測精度があがることも示してきた。

Voronoi 分割法（Voronoi tesselation）[12]はロシアの数学者 G.Voronoi により 1907 年に提案されたもので、空間分布データの解析に多く用いられてる。Voronoi 図と呼ばれる空間分割の図は、携帯電話のアンテナの配置、空港の配置など、空間配置に関する多くの分野で使用されている。

Voronoi 分割は時系列データを再構成されたアトラクタ上の各点に対して三角分割を行う。各三角形の頂点の二等分線をつなぐ事により、各頂点を中心とした小領域に分ける。この分割を Voronoi 分割と言う。予測は現在の点が次の点に移るのに対して、現在の点が回りの Voronoi 領域をどれだけ切り取るかの面積比で加重予測を行う。Lorenz の類推法に比較して、加重が優れており、少ないデータ数で、良い予測をする。

昨年度の論文 [9]では、本来 Voronoi 分割は２次元平面上で行うものだが、手始めとして、１次元上での分割を行い、それを Lorenz の類推法の誤差修正法として用いた場合、予測精度が向上することを示した。

この論文では、本来の２次元 Voronoi 分割を試みに行い、２次元 Voronoi 分割がどのようにカオス時系列予測に影響を与えそうか、若干の数値実験及び考察を行った。

２次元 Voronoi 分割は、後ほど述べるが、境界の有限性、無限性、分割の精度などにより、難しい問題が発生する。今回はこの問題に対する指摘と考察を行う。

２章は Voronoi 分割についての説明を行う。３章は Voronoi 分割の２次元上での若干の例を挙げて、それを用いた予測の問題点を指摘する。４章は考察に、５章はまとめに当てられる。

２． Voronoi 分割について

ロシアの数学者 G.Voronoi は 1907 年に Voronoi 分割法（Voronoi tesselation）[12]を提案した。Voronoi 分割法による時系列予測は、測定された時系列データを再構成されたアトラクタ上の各点に対して、三角分割を行う。さらに各辺の近接点に対して垂直二等分線を描き、各頂点を中心とした小領域 T_i に分割する。すなわち、タイル張りにする。領域内の点を v(i)として、次元 m とすると、

$$T_i = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^m : |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}(i)| < |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}(j)|, \quad j = 1, \cdots, N, j \neq i\} \qquad (1)$$

今、写像Φ、

$$\boldsymbol{v}(t+1) = \Phi(\boldsymbol{v}(t)) \qquad (2)$$

の存在を仮定する。Φの形として、

$$\boldsymbol{v}(T+1) = \Phi\big(v(T)\big) = \textstyle\sum_{i \in N(\boldsymbol{v}(T))} \lambda_i(\boldsymbol{v}(T))\boldsymbol{v}(i+1) \qquad (3)$$

とする。ここでλ_iは新しい点が作る Voronoi 分割が、既にある Voronoi 分割から切り取る面積を表す。すなわち、

$$\lambda_i(\boldsymbol{v}(T)) = \frac{\mu_m(T_i(\boldsymbol{v}(T)))}{\sum_{i\in N(\boldsymbol{v}(T))}\mu_m(T_j(\boldsymbol{v}(T)))} \qquad （4）$$

但し、μ_m:R_m 上のルベーグ測度、$T_i(\boldsymbol{v}(T))$：$\boldsymbol{v}(T)$を中心とする新しい Voronoi 集合とそれ以前の i 番目のタイルとの共通部分、$N(\boldsymbol{v}(T))$：$\boldsymbol{v}(T)$を中心とする新しいVoronoi 領域と重なるタイルの添字集合である。

データ $\boldsymbol{v}(T)$は Voronoi 分割された領域の母点(generator)と呼ばれる。

この関数Φを用いて、予測を行う。

Voronoi 分割は１次元では容易である。１次元数直線上で中点を求めることは容易なので、計算できる。

２次元の Voronoi 分割は困難さを伴う。計算の複雑さもさることながら、さらには境界の問題が出てくる。多くの境界は無限遠点になり、定義ができない。

３次元以上の Voronoi 分割は一部研究があるが、あまり手をつけられていない。さらには３次元以上の Voronoi 分割を用いた予測はほとんど行われていない。

ここでは２次元 Voronoi 分割の性質を見ていくことにする。

３．２次元 Voronoi 分割の諸性質

２次元での Voronoi 分割予測では、まず予測の元となる過去のデータを２次元平面にプロットする。そして、埋め込まれた各点どうしを結ぶ線分の２等分線を描く。２等分線は必ず３本が交わり、交点となる。分割に必要の無くなった領域内に残されている２等分線を消去する。

図１に例として１６点を埋め込み、その Voronoi 分割を行ったものを示す。なおデータは Mathematica の Manual[14]の計算幾何学の部分の例示で用いられているデータを使わせていただいた。

図で数字の書いてある部分が埋め込まれたデータ点も同時に表す。

次に、これから予測をしようとする直前の点を Voronoi 分割の図に追加し、分割を再度行う。点１７を追加し分割を再度行った図を図２に示す。

図を見ると、分割が変化したのがわかる。

図１、図２を重ねると、点１７を追加することにより、点１７が点８、点９、点１２、点１３の領域を切り取っていることが見て取れる。

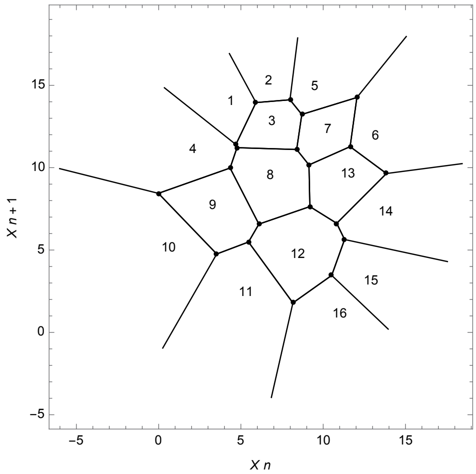

図１　Voronoi 分割の例１

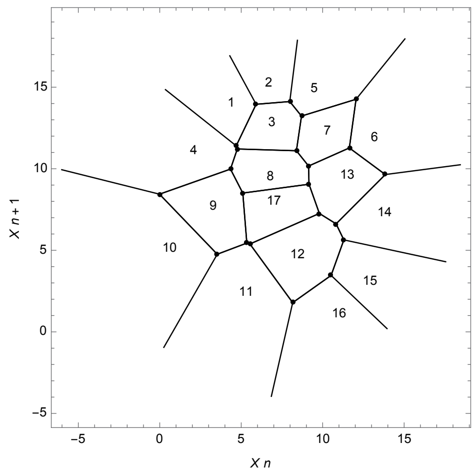

図２　ボロノイ分割の例２

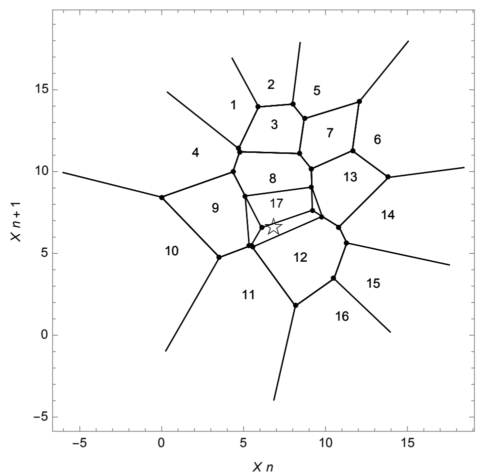

図３　ボロノイ分割の例３

図で☆印は点１７が入ることにより、点１２の領域を切り取った部分である。２次元 Voronoi 分割による予測は点１２が次に向かう点に対して、切り取った☆印の部分の面積を用いて重み付けを行う。点８、点９、点１３に対しても切り取る面積に応じて重み付けを行い、それらの重みで点１８を予測する。

ここで問題なのは、Voronoi 分割が行われる領域である。例えば図４では点１の領域は下方は無限遠になっており、境界がない。点２、３、４もやはり境界が無く面積が定義できない。領域を仮に制限して境界を与えた場合、その境界の与え方で面積が変わってしまう。

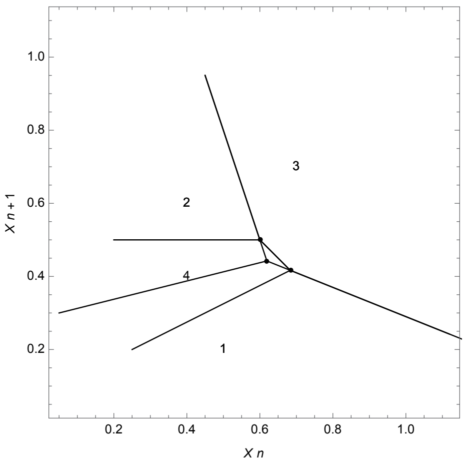

図４　Voronoi 分割の境界の問題

境界条件を適当に与えれば良いというわけにはいかない。なぜなら、埋め込み次元において、境界の近くに存在する点があるはずである。でもその点は勝手に決めた境界の近くにあるだけであるので、境界から離れた点と平等である。境界を決めることで、点の重みが変わってしまう。この問題を解決するには境界は十分に遠方であることが考えられるが、今度は重み付けに差がなくなる可能性がある。なぜなら、遠方までの面積は大きくなるので､切り取る面積の重み付けが少なくなり、重み付けが反映されないことになるからである。

実際の予測を考える上で、決定論的カオス時系列の Logistic Map を考える。すなわち、

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) \qquad (5)$$

なる１次元時系列を考える。Logistic Map は当初は生物の個体数の変動を表す式として提案された。なお、a=3.8,x_0=0.5 とした。

Logistic Map を２次元上に Mapping して、それらに対する Voronoi 分割を行った。図５に Logistic Map の Voronoi 分割例を示す。

Logistic Map は２次元埋め込み空間に埋め込むと２次曲線上にのる。その曲線上にのっている各点の Voronoi 分割の各面積はほとんど、１辺は無限遠に伸びていて、各点の面積が定義できない。

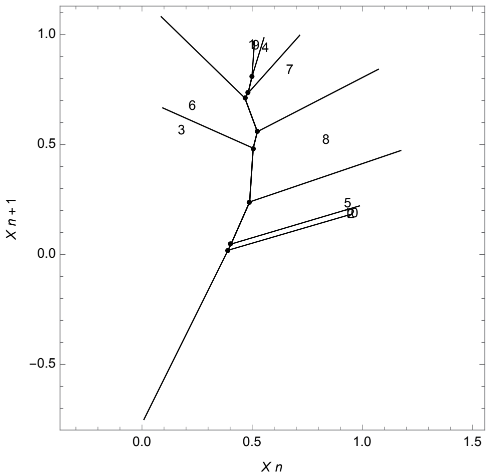

図５　Logistic Map の Voronoi 分割

従って、Logistic Map の２次元 Voronoi 分割による予測は大変難しい。このように、ある曲線上にのってしまう時系列は Voronoi 分割により予測するには工夫が必要である。

むしろこの図を見る限り、１次元 Voronoi 分割で求める方が良いと思われる。なぜなら、各点は２次曲線上にのっているので、１次元とも見なせる。

次は自然界での時系列の Voronoi 分割の例である。

図６は１９９１年から２０１４年までの日本近海における台風発生数の埋め込み次元２の分布である [13)]。横軸は当年度の台風の発生数、縦軸は次年度の台風の発生数である。

図６をもとに、Voronoi 分割を試みた結果を図７に示す。　図６、７を見るとより点が広い範囲に分布して、図の中心に近い点では Voronoi 分割による予測が可能であるが、やはり端の点では面積の定義が難しい。無限遠点まで領域が発散していて、境界条件を適切に定めないと、有限値の面積を求めることができない。

このことはどんな系にも当てはまると思われ、Voronoi 分割の本質的問題と思われる。

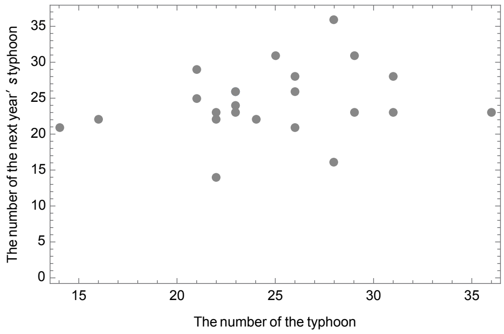

図６　台風の発生数の分布

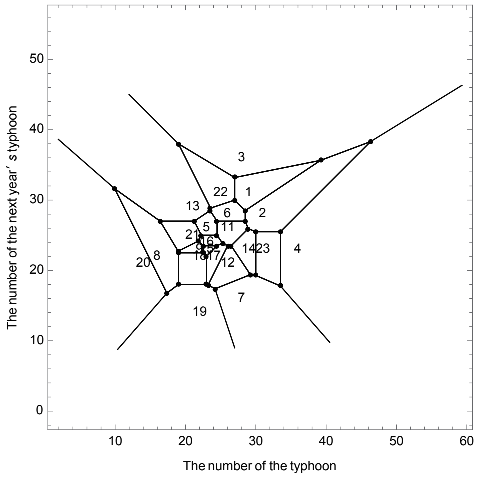

図７　台風の数の Voronoi 分割

４．考察

Voronoi 分割を２次元に拡張すると、端の領域での境界条件の決定に大きな問題が生じる。特に決定論的カオスの例であるLogistic Mapでは境界条件でどのようにでも予測が変化してしまうことが考えられる。

一般にVoronoi 分割を用いる時には、地上の携帯電話のアンテナ分布など、境界条件をシビアに考える必要のない応用に使用されているが、カオス時系列予測に対しては、境界条件を詳しく論じる必要がることがわかる。

５．まとめ

カオス時系列予測における、２次元Voronoi分割を用いた方法のVoronoi分割にしぼり、予測可能性を見てきた。

その結果、Voronoi 分割はその端点で境界条件の問題が発生し、慎重に境界を選ぶことが必要であることがわかった。

また決定論的カオス時系列においては、２次元Voronoi 分割を行うより、１次元でも予測が可能であることも分かった。

今回は、この結果を元にして予測までは行わなかったが、この後は境界条件を適切に決めて、実際に予測を行なっていきたい。

また、３次元以上の多次元では、ほとんど研究の例がないため、多次元での性質もさらに詳細に調べていくつもりである。

参考文献

1)渡辺他:小山高専紀要,Vol38,pp.101-106(2006).

2)渡辺:小山高専紀要,Vol39,pp.107-112(2007).

3)渡辺:小山高専紀要,Vol40,pp.91-94(2008).

4)渡辺:小山高専紀要,Vol41,pp.117-122(2009).

5)渡辺:小山高専紀要,Vol42,pp.103-108(2010).

6)渡辺:小山高専紀要,Vol43,pp.105-110(2011).

7)渡辺:小山高専紀要,Vol44,pp.115-120(2011).

8)渡辺:小山高専紀要,Vol46,pp.111-116(2013).

9)渡辺: 小山高専紀要,Vol47,pp.87-92 (2014).

10)合原一幸編:カオス時系列の基礎と応用, 産業図書(2000).

11)E.N.Lorenz:Jornal of the atomospheric science, Vol.20,p.130 (1963).

12)Voronoi G.:"Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques." *J. reine angew.Math.*Vol133,pp.97-178(1907).

13)気象庁、台風の発生数の 1950-2014 までのデータ: http://www.data.jma.go.jp/fcd/yoho/typhoon/statistics/generation/generation.html.

14)Wolfram Mathematica 10.0 Manual(2014).

【受理年月日　2015年 9月29日】