６章　重心

　ある物体の重心を求めるとき、簡単な物なら曲げモーメントを利用して容易に解くことができる。図 6-1 のような均質一様な棒の重心を考えてみる。

まず、人が棒の C 点をWの力で引き上げたら、棒は水平を維持しながら、持ち上がったとする。このとき錘と引き上げる力との関係は、$W = W_1 + W_2 + W_3$を満たしておれば、棒は上下については静止している。Wの方が大きければ、棒はどんどん上にいくし、小さければ持ち上がらない。

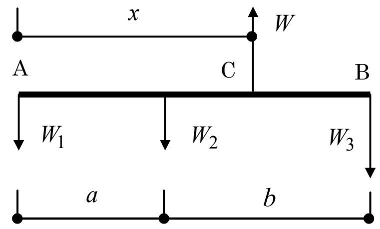

図 6-1

次に、棒が回転を起こさないためには、４個の力による曲げモーメントの総和が零でなければならない。すなわち、$\Sigma M_A = 0$、$\Sigma M_C = 0$、$\Sigma M_B = 0$等何れの場所においても前式が成立する必要がある。また前章問１の図１でシーソーがつり合っているときは、支点部分を紐で吊り下げたとすれば、紐への張力の大きさは$W = W_1 + W_2$となり、支点が重心と考えられる。５章問２の図３の場合でも o 点を紐で吊り下げれば同様の考えが当てはまる。これらのことは問題を解きながら理解してもらいたい。

問１　図 6-1 で棒が水平を維持している。これから、棒の A 点からの重心の位置xを求めよ。

（解）A 点に関する曲げモーメントの釣り合いを求めると、次のようになる。

$\Sigma M_A = W_2 \times a - W \times x + W_3 \times (a+b) = 0$ よって、$x = \{W_2 a + W_3 (a+b)\}/W$

問２　図１のような棒 A-B に A 点と B 点に錘mとMがぶら下がっていて、C 点で引っ張っている。そのとき、棒 A-B が水平を保つのに必要なxの長さを求めよ。ただし、(1)棒の重さを無視する場合と、(2)棒の重さがmの場合について求めよ。

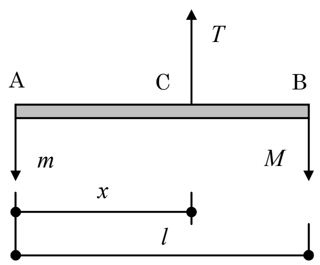

図１

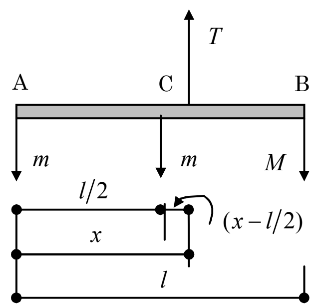

図２

（解）(1)の場合、図１から C 点に関する曲げモーメントの釣り合い式をもとめると

$\Sigma M_C = -m \times x + M \times (l - x) = 0$ から $x = \dfrac{M \times l}{M + m}$ となる。(2)の場合は棒の重さの影響を考慮する。(1)と同様 C 点に関する曲げモーメントの釣り合い式をもとめると

$$\Sigma M_C = -m \times x - m(x - l/2) + M \times (l - x) = 0 \text{ から } x = \frac{2M + m}{2(M + 2m)} \times l \text{ となる。}$$

問３　図１のような、長さ方向が不均質な丸太がある。A 点に$10kg$の力を加えたら持ち上がった。同様に B 点に$30kg$の力を加えたら持ち上がった。丸太の重さをWkg、重心を A 点からの距離xとしたとき、それらを求めよ。

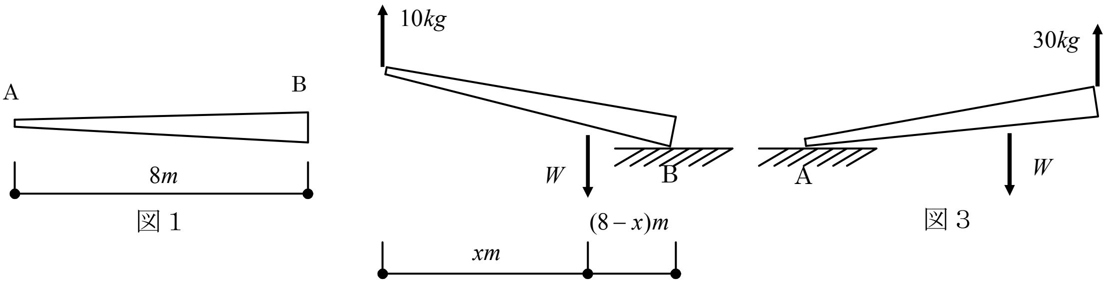

図１　図２　図３

（解）

図２から B 点に関する曲げモーメントの釣り合い式を求めると$\Sigma M_B = 10kg \times 8m + W \times (8 - x) = 0$で、図３から A 点に関する曲げモーメントの釣り合い式を求めると$\Sigma M_A = -30kg \times 8m + W \times x = 0$となる。両式から、重心は$x = 6m$、丸太の重さは$W = 40kg$

問４　図１のように、長さlで重さmの棒がテーブルの端から$l/4$はみ出ている。先端 A に集中荷重Pを作用させたとき、棒が滑り始めるときのPを求めよ。

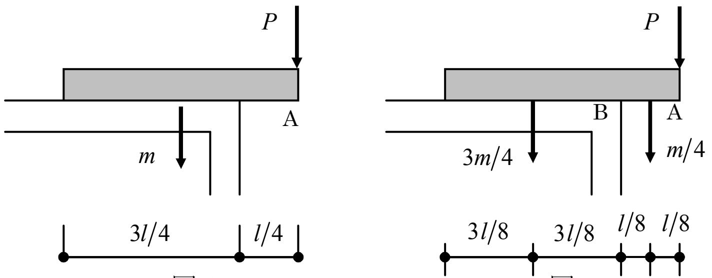

図１　図２

（解）図２から、テーブルの端 B 点に関する曲げモーメントの釣り合い式を求めると
$\Sigma M_B = -(3m/4) \times (3l/8) + (m/4) \times (l/8) + P \times (l/4) = 0$となり、両式から、集中荷重は$P = m$となる。

問５　図１のような、均質な針金がある。O 点からの重心の位置を求めよ。ただし、O 点での針金の重複は無視できるとする。

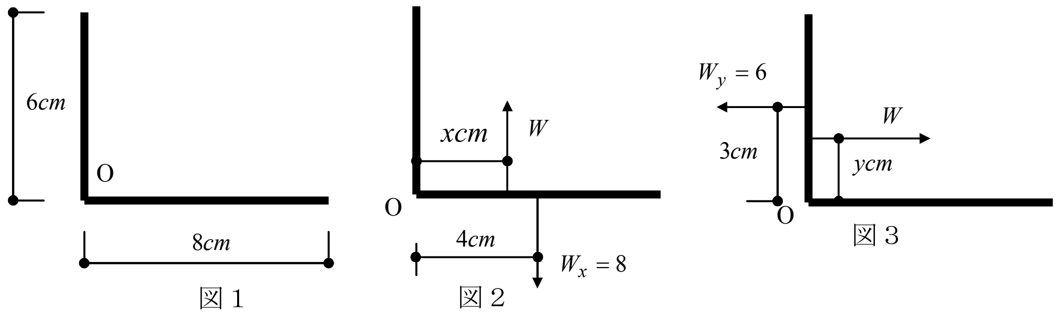

図１　図２　図３

（解）図２から全体の重さは$W = 6 + 8 = 14$で、O 点に関するx方向の曲げモーメントの釣り合いか

ら、$\Sigma M_O = -W \times x + W_x \times 4cm = -14x + 32 = 0$、よって $x = 16/7\,cm$ となる。y 方向の曲げモーメントの釣り合いから、$\Sigma M_O = W \times y - W_y \times 3cm = 14y + 16 = 0$、よって $y = 8/7\,cm$ となる。

問６　図１のような、半径 r の円板から半径 $r/2$ の円板を切り欠いた均質な板がある。この板の O 点からの重心の位置を求めよ。

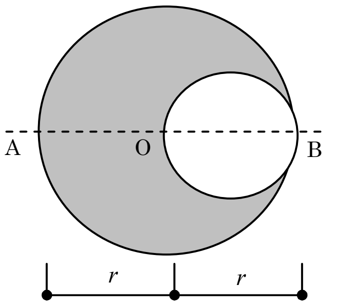

図１

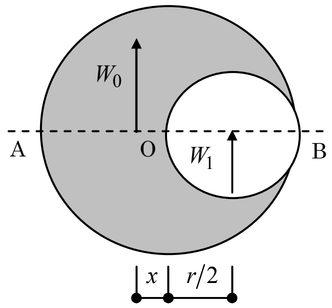

図２

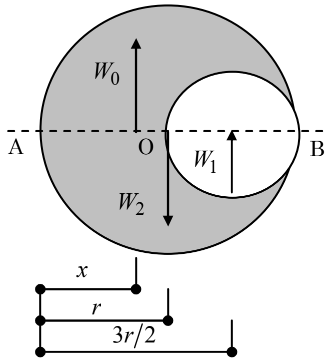

図３

（解）板の重さは面積に比例するから切り欠いた円板の重さを $W_1 = W$ とすると、射影部分の重さは $W_0 = 3W$ である。O 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、

$\Sigma M_O = W_0 \times x - W_1 \times r/2 = 3W \times x - W \cdot r/2 = 0$、よって $x = r/6$ となる。図３で W_2 は外周円で、重さを上記の仮定に従うと、$W_2 = 4W$ となる。A 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、

$\Sigma M_A = -W_0 \times x + W_2 \times r - W_1 \times 3r/2 = -3W \times x + 4W \times r - W \times 3r/2 = 0$、よって $x = 5r/6$ となる。図２の解法は曲げモーメントを O 点について考えているため、図３の W_2 を省略している。

問７　図１のような、半径 r の円板から半径 $r/4$ の円板を切り欠いた均質な板がある。この板の A 点からの重心の位置を求めよ。

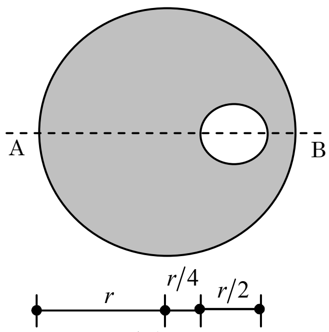

図１

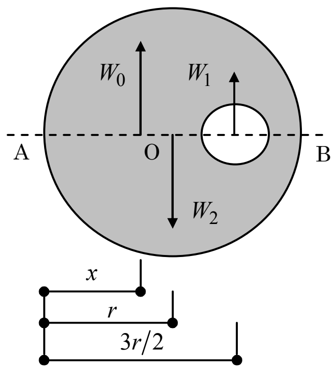

図２

（解）切り欠いた円板の重さを $W_1 = W$ とすると、射影部分の重さは $W_0 = 15W$ である。A 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、

$\Sigma M_A = -W_0 \times x + W_2 \times r - W_1 \times 3r/2 = -15W \times x + 16W \times r - W \times 3r/2 = 0$ で、$x = 29r/30$ となる。

問８　図１のような、一辺$2a$の正方形板から一辺aの正方形 D-E-H-G 板を切り欠いた均質な板がある。この板の C 点からの重心の位置を求めよ。

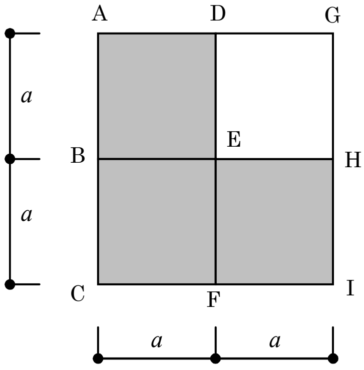

図１

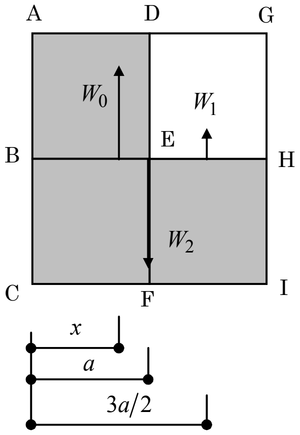

図２

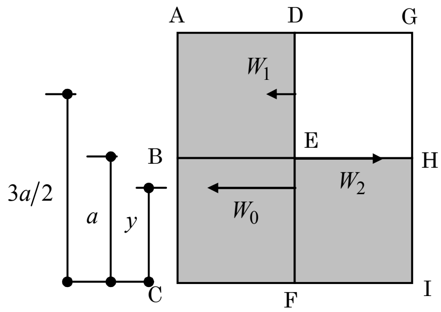

図３

（解）x 方向の重心の位置を求めると、図２でW_1は正方形 D-E-H-G の重さで、W_2は正方形 A-C-I-G の重さで、W_0は求めようとする射影部分の重さである。$W_1 = W$ とすると、$W_2 = 4W$ で$W_0 = 3W$ となる。B 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、

$\Sigma M_B = -W_0 \times x + W_2 \times a - W_1 \times 3a/2 = -3W \times x + 4W \times a - W \times 3a/2 = 0$、よって$x = 5a/6$となる。$y$ 方向の重心の位置は、図３から、D 点（G-H-I 側から見る）に関する釣り合いを曲げモーメントの釣り合いから、$\Sigma M_F = W_0 \times y + W_2 \times a - W_1 \times 3a/2 = -3W \times y + 4W \times a - W \times 3a/2 = 0$、よって$y = 5a/6$となる。E 点に関する曲げモーメントの釣り合いから求めると計算が簡単になる。

問９　図１のような、一辺$2a$の正方形板から一辺$a/2$の正方形 D-E-H-G 板を切り欠いた均質な板がある。この板の B 点からの重心の位置を求めよ。

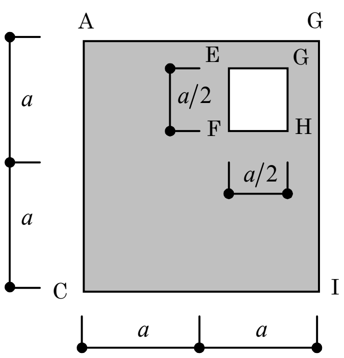

図１

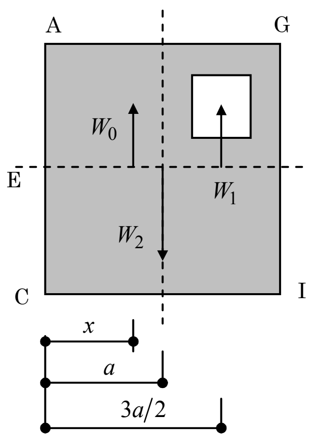

図２

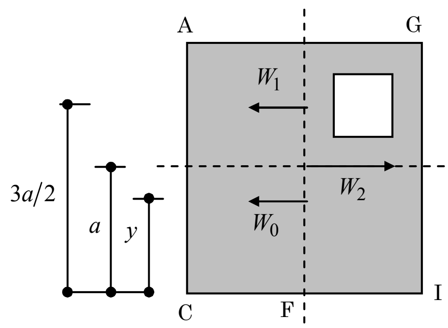

図３

（解）x 方向の重心の位置を求めると、図２でW_1は正方形 D-E-H-G の重さで、W_2は正方形 A-C-I-G の重さで、W_0は求めようとする射影部分の重さである。$W_1 = W$ とすると、$W_2 = 16W$ で$W_0 = 15W$ となる。E 点に関する曲げモーメントの釣り合いから、

$\Sigma M_B = -W_0 \times x + W_2 \times a - W_1 \times 3a/2 = -15W \times x + 16W \times a - W \times 3a/2 = 0$、よって$x = 29a/2$となる。$y$ 方向の重心の位置は、図３から、F 点（C-D 側から見る）に関する釣り合いを曲げモーメントの釣り

合いから、$\Sigma M_F = W_0 \times y + W_2 \times a - W_1 \times 3a/2 = -15W \times y + 16W \times a - W \times 3a/2 = 0$、よって $y = 29a/2$ となる。中心点に関する曲げモーメントの釣り合いから求めると計算が簡単になる。

問 10　図１のような、三角形 A-B-E から三角形 D-C-E を切り欠いた四辺形 A-B-C-D について、A 点から重心の位置を求めよ。

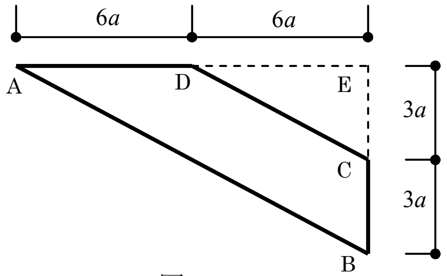

図１

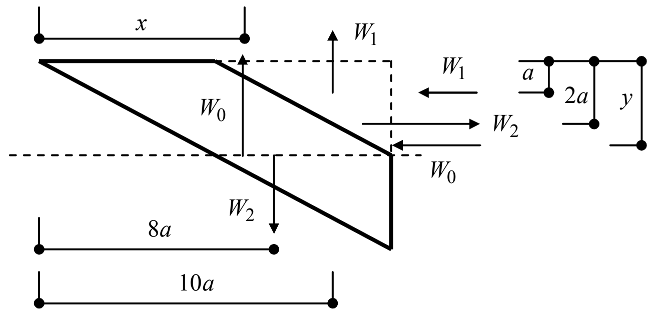

図２

（解） x 方向の重心の位置を求めると、図２で W_1 は三方形 D-C-E の重さで、W_2 は三角形 A-B-E の重さで、W_0 は四辺形 A-B-C-D の重さである。$W_1 = W$ とすると、$W_2 = 4W$ で $W_0 = 3W$ となる。A 点に関する x 方向軸の曲げモーメントの釣り合いから、

$\Sigma M_A = -W_0 \times x + W_2 \times 8a - W_1 \times 10a = -3W \times x + 4W \times 8a - W \times 10a = 0$、よって $x = 22a/3$ となる。

y 方向の位置は重心、図２から、A 点（B-C-E 側から見る）に関する釣り合いを曲げモーメントの釣り合いから、$\Sigma M_A = W_0 \times y - W_2 \times 2a + W_1 \times a = 3W \times y - 4W \times 2a + W \times a = 0$、よって $y = 29a/2$ となる。