１章　力

１．１　力の要素

（１）力と単位

本書では力の単位を次のように表す。

$kg = kg \cdot f = 9.8N$（ニュートン）

$t = t \cdot f = 9.8kN$（ニュートン）

$kg / cm^2 = kg \cdot f / cm^2 = 0.098M \times Pa$（メガパスカル）$= 0.098N / mm^2$

M（メガ）$= 10^6$

（２）力の三要素

力を正確に表現するには次のように明示しなければならない。

①　力の大きさ(kg　や　ton)

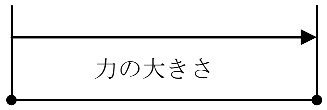

図 1-1(a)

②　力の作用方向と向き

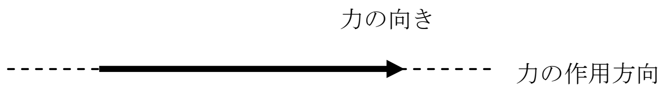

図 1-1(b)

③　力の作用点

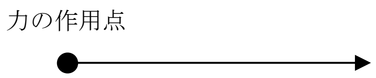

図 1-1(c)

（３）静力学上での力の考え方

①　力の移動の許容

剛体に作用している力は大きさと方向を変えないで、その作用点を作用線上の任意の点に移動してもよい。剛体は力が作用しても変形しないことから図 1-2(a)と図 1-2(b)の力 P が剛体に及ぼす諸条件は同じであることが分かる。なお静力学において力の釣り合い、合成、分解等においては、この考えが適用できる。図 1-2(c)と図 1-2(d)は弾性体に力 P が A 点と B 点に作用した場合である。このとき A 点と B 点の水平変位は力の作用点の違いにより異なっている。勿論、垂直変位も同様に異なっている。ゆえに弾性体の場合は力の移動による変形等の諸条件は異なった結果になることが分かる。

また、構造力学では図 1-3(a)のようなラーメンにおいて、梁（柱）の伸び縮みは無視するものとして計算する。このことは、図 1-3(a)と図 1-3(b)のラーメンは同一の構造体とみなせる。つまり梁

A-B は軸方向については剛体と考えて計算される。もし、構造体が対称ラーメンならば図 1-3(c)のように逆対称ラーメンとして簡単に解くことができる。撓み角法や固定法の章ででてくるから記憶しておくように。

② 作用・反作用

作用・反作用は図 1-4 のように同一直線上にあって大きさ等しく、その作用方向は逆である。この考えを発展させたのが図 1-5 のように、梁を切断したとき、その切断面に生じる曲げモーメント M 、せん断力 Q と軸力 N の関係である。

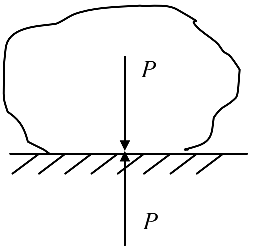

図 1-4

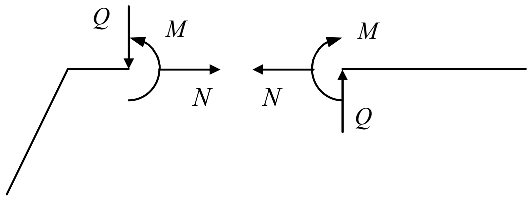

図 1-5

１．２ 力の合成と分解

（１）複数の力と同じ力を一個で表すことを**力の合成**といい、この力を**合力**という。

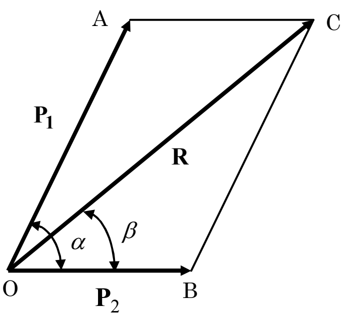

図 1-6(a)

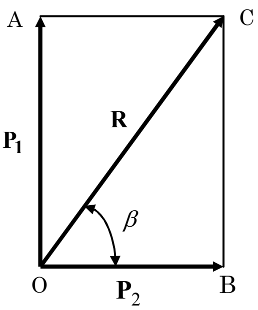

図 1-6(b)

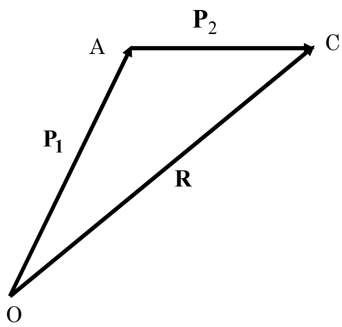

図 1-6(c)

図 1-6(a)で力 P_1 と P_2 が与えられたとき、それらの力を辺とする平行四辺形 O-A-C-B を描き O 点と C 点を結ぶ対角線が P_1 と P_2 の合力 **R** であり力の合成という。数式的に考えると次のようになる。

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha} \tag{1-1}$$

力 **R** の方向は次式より求められる

$$R\sin\beta = P_1\sin\alpha \tag{1-2}$$

また図 1-6(b)のような２力が互いに直角である場合の合力と方向性は次式で求められる。

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \tag{1-3}$$

$$\tan\beta = P_1/P \tag{1-4}$$

（２）一個の力をこれと同等の作用する複数の力に変換することを**力の分解**といい、変換された力を元の力の**分力**という。

図 1-6(c)で力 **R** が与えられたとき閉鎖形の三角形 O-A-C を描くと、O-A の力 P_1 と A-C の力 P_2 は力 **R** の分力である。図 1-7(a)も同様である。

また図 1-7(b)の力 **R** を図 1-7(c)の方向に分解する。まず図 1-7(d)のように O 点を通り平行な線分 X を、C 点を通り平行な線分 Y を描き、その交点 B を求める。その O-B の P_2 と B-C の P_1 が分力となる。図 1-7(e)のように線分 X と Y の描く順序により異なった分力が得られる。

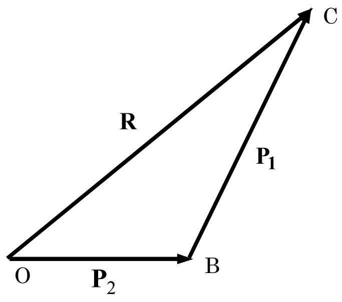

図 1-7(a)

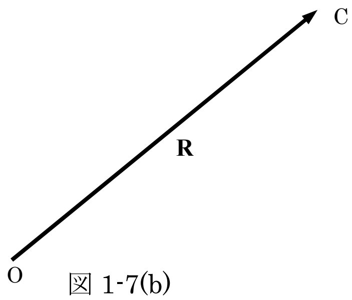

図 1-7(b)

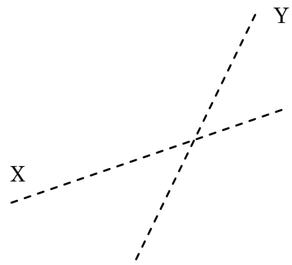

図 1-7(c)

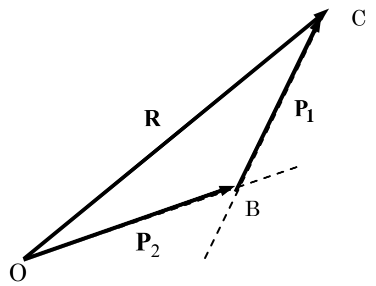

図 1-7(d)

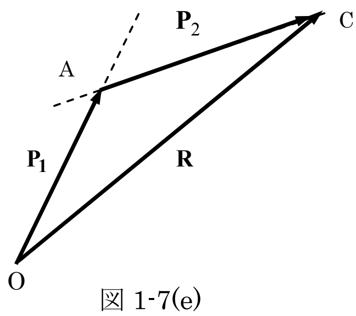

図 1-7(e)

問１　図 1-8(a)で $P_1 = 60kg$ 、$P_2 = 80kg$ のとき合力 **R** とその方向 α を求めよ。

（解）(1-3)式から

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 50kg \text{ 、 } \tan\alpha = \frac{P_1}{P_2} = \frac{60}{80} = 0.75 \text{ 、 } \alpha = 43^\circ$$

問２　図 1-8(b)で $\alpha = 30^\circ$ で $R = 100kg$ のとき、P_1 と P_2 を求めよ。

（解）　$P_1 = R\sin 30 = 50kg$ 、$P_2 = R\cos 30 = 86.6kg$

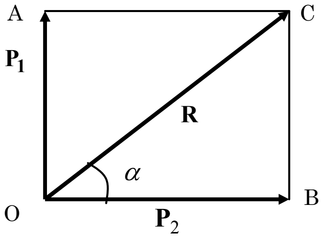

図 1-8(a)

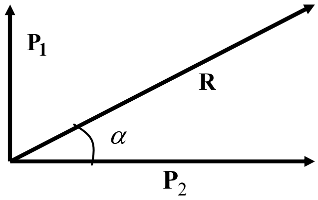

図 1-8(b)

問３　図 1-9 のような、3 個の力が O 点に働いてつり合っている。N を既知として、N_{OB} と N_{OC} を求めよ。

（解） x 方向の力の釣り合いから

$\Sigma X = N\cos 30 - N_{OB}\cos 45 - N_{OC}\cos 60 = 0$

y 方向の力の釣り合いから

$\Sigma Y = N\sin 30 + N_{OB}\sin 45 - N_{OC}\sin 60 = 0$

よって $\sqrt{2}N_{OB} + N_{OC} = \sqrt{3}N$ 、$-\sqrt{2}N_{OB} + \sqrt{3}N_{OC} = N$

$N_{OC} = N$ 、$N_{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)N$

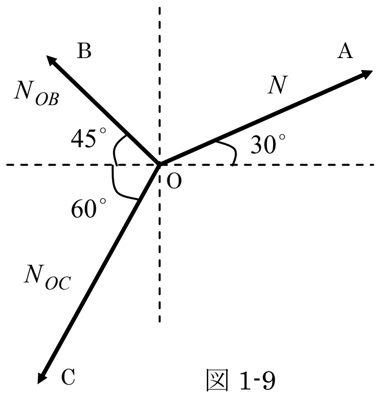

図 1-9

（３）一点に複数の力が作用する場合の合力

一点に複数の力 P_1、P_2、P_3、・・・、P_n が作用するときの合力は（１）節で行った２力の合力を求める手法を繰り返していけばよい。

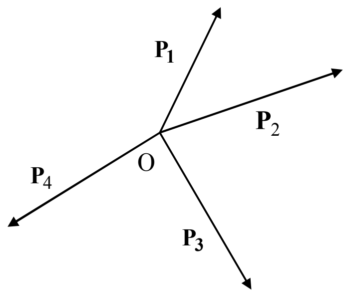

図 1-10(a)

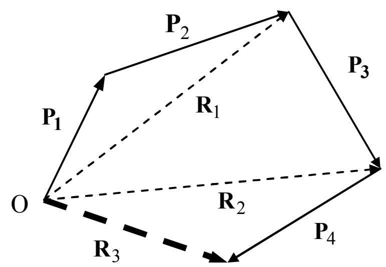

図 1-10(b)

図 1-10(a)で与えられた力 P_1、P_2、P_3、P_4 を図 1-10(b)のように作用点 O から示力図を描く。そして P_1、P_2 の合力 R_1 を求める。次に R_1 と P_3 の合力 R_2 を求めて、最後に R_2 と P_4 の合力 R_3 を求めれば、この R_3 が P_1、P_2、P_3、P_4 の合力となる。

（４）平行な２力の図式による合成

図 1-11 のように平行で同じ向きの力 P_1 と P_2 の作用点を A、B とすると、A、B を結ぶ直線上に大きさが等しく向きが逆の力 H_1 と H_2 を描く。P_1 と H_1 の合力を R_1 とし、P_2 と H_2 の合力を R_2 とする。

各合力の作用線の交点を k として、各合力が k 点を始点となるように移動させる。これらの合力は $\mathbf{R}$ となる。

$R_1 = P_1 + H_1$

$R_2 = P_2 + H_2$

$$R = R_1 + R_2 = P_1 + H_1 + P_2 + H_2 \qquad (1\text{-}5)$$

ここで、H_1 と H_2 は大きさが等しく向きが逆であったから次式のようになる。$H_2 = -H_1$ これを(1-5)式に代入すると

$$\mathbf{R} = P_1 + H_1 + P_2 - H_1 = P_1 + P_2 \qquad (1\text{-}6)$$

が導かれる。図 1-12 のように平行で逆向きの力 P_1 と P_2 の作用点を A、B とする。前例と同様に作

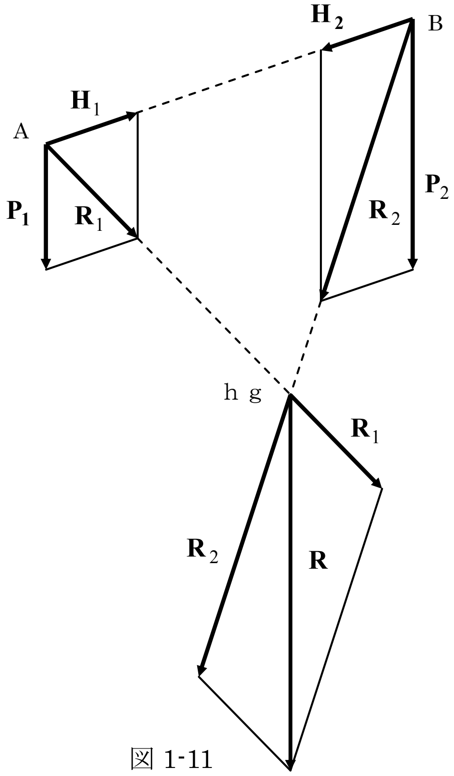

図 1-11

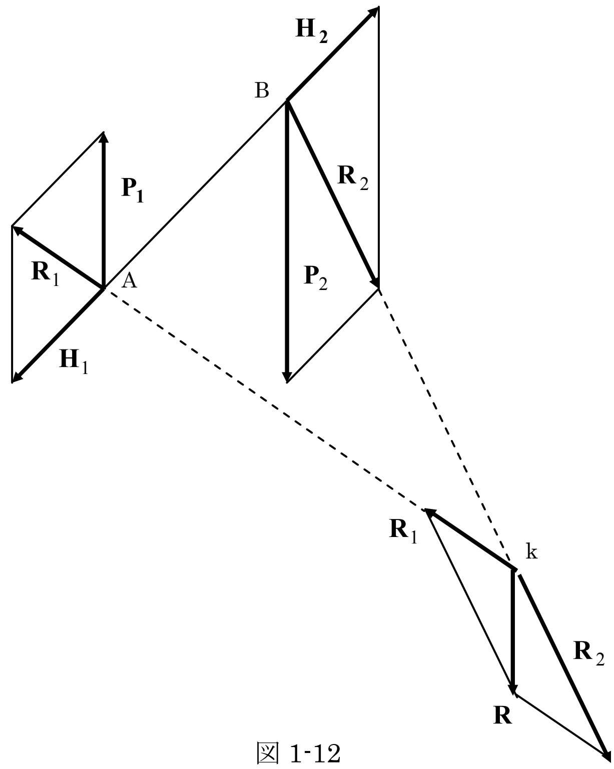

図 1-12

用点を結んだ直線 A-B を引き H_1 と H_2 を描く。後は図 1-11 とまったく同じ手順で解ける。

（５）連力図による合成法

図 1-13(a)に示す２力 P_1 と P_2 の合力とその作用点を求めてみる。

(a)　図 1-24(b)の示力図のように P_1 と P_2 を図 1-13(a)から写し取り合力 **R** を描く。そして任意の点 O をとり P_1 と P_2 の端点を結ぶ。そのベクトルはそれぞれ $\overrightarrow{01}$、$\overrightarrow{12}$、$\overrightarrow{20}$ とし、これを束線という。

(b)　図 1-13(a)のように P_1 の作用線上に任意の点を示力図の $\overrightarrow{01}$ に平行で大きさが等しい $\overrightarrow{01}$ を写し取る。そして $\overrightarrow{01}$ と P_1 の合力は示力図の $\overrightarrow{12}$ であるから、A 点から $\overrightarrow{12}$ に平行な直線 $\overrightarrow{12}$ を描けば、$\overrightarrow{01}$ と P_1 の合力の作用線となる。

(c)　$\overrightarrow{12}$ と P_2 の交点 B を通り、示力図の $\overrightarrow{20}$ に平行な $\overrightarrow{20}$ を描けば、$\overrightarrow{01}$ と P_1 の合力 $\overrightarrow{12}$ と P_2 の合力の作用線となる。

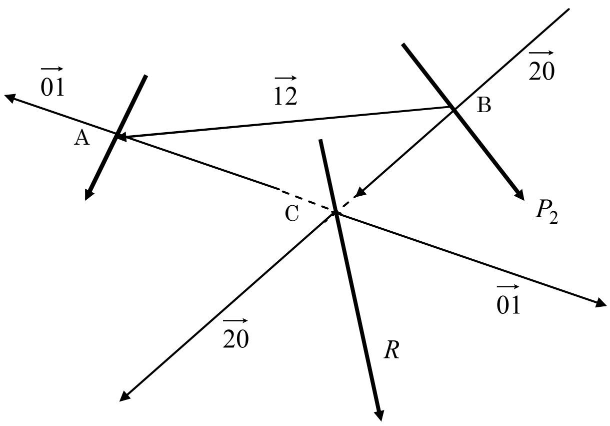

図 1-13(a)　連力図

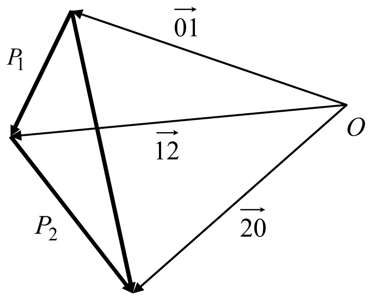

図 1-13(b)　示力図

(d)　$\overrightarrow{01}$線と$\overrightarrow{20}$線の交点をCとするとA点に写し取った$\overrightarrow{01}$と反対方向に、大きさが等しくて反対の力$\overrightarrow{01}$をC点に写し取る。この点が少々難解な部分で次式により説明できる。$\overrightarrow{12}=\overrightarrow{01}+\overrightarrow{P_1}$、$\overrightarrow{20}=\overrightarrow{12}+\overrightarrow{P_2}$から$\overrightarrow{20}-\overrightarrow{01}=\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2}$となり、連力図のを$\vec{C}$逆方向に取れば次式のようになる。$\overrightarrow{20}+\overrightarrow{01}=\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2}$。つまり、$\overrightarrow{01}$と$\overrightarrow{20}$の合力は$P_1$と$P_2$の合力$R$でその作用点はC点になる。

図1-13(a)の$\overrightarrow{01}$、$\overrightarrow{12}$、$\overrightarrow{20}$で構成される多角形の連力図$\overrightarrow{01}$を始線、$\overrightarrow{20}$を終線という。

（６）P_1、P_2、P_3の合力とその作用点を連力図で求めよ。

図 1-14(a)のP_1、P_2、P_3を図 1-14(b)に写し取り示力図の支点と終点を結べば、合力の大きさと方向がわかる。

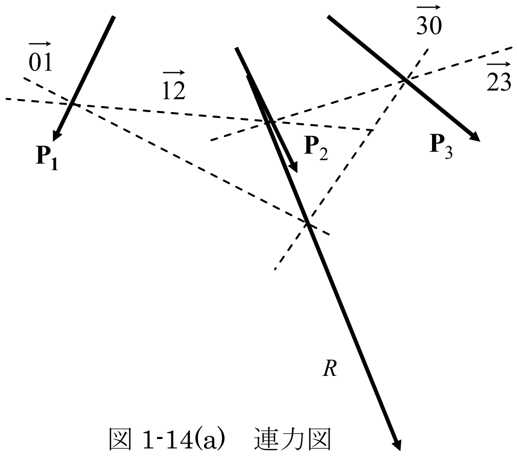

図 1-14(a)　連力図

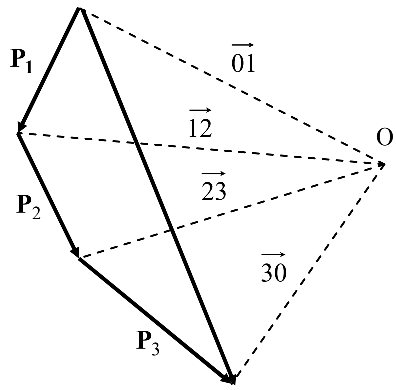

図 1-14(b)　示力図

図 1-14(b)のように任意の点Oを選び、束線$\overrightarrow{01}$、$\overrightarrow{12}$、$\overrightarrow{23}$、$\overrightarrow{30}$と結ぶ。図 1-14(a)のように束線$\overrightarrow{01}$、$\overrightarrow{12}$、$\overrightarrow{23}$、$\overrightarrow{30}$に平行に$\overrightarrow{01}$、$\overrightarrow{12}$、$\overrightarrow{23}$、$\overrightarrow{30}$と連力図を描き、始線と$\overrightarrow{01}$と終線$\overrightarrow{30}$の交点を求めれば作用点となる。

１．３　偶力

図１-15(a)のように大きさが等しく向きが反対の力が作用している。このとき双方の中心であるO点に対して、右側の力Pは$P\times l/2$の右廻りの曲げモーメントを与えている。同様に左側のPもO 点に対して$P\times l/2$の右廻りの曲げモーメントを与えている。よって両方のPにより$M=P\times l$による右廻りの曲げモーメントとなり、このモーメントを偶力という。

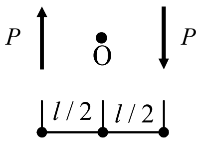

図１-15(a)

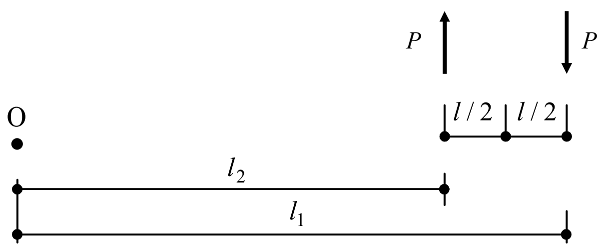

図 1-15(b)

ここで、図 1-15(b)のように任意の点をO点にとり、この点に関する２外力Pの曲げモーメントを検証してみる。左側のPはo点を左廻りに$M=-P\times l_2$、右側のPはo点を右廻りに$M=+P\times l_1$の曲げモーメントを与えている。これらの総和は

$$\Sigma M = M_1 + M_2 = +P \times l_1 - P \times l_2 = P \times (l_1 - l_2) = P \times l$$

となる。よって、任意の点に対する、両方の P による曲げモーメントは偶力 $M = P \times l$ に等しいということが分かる。つまり偶力は如何なる任意の点に対しても、$M = P \times l$ を与えることになる。

１．４　バリニオンの定理（Varignons theorem）

任意の点に対して、複数の外力による曲げモーメント M_1、M_2、・・、M_n の和は、その外力の合力が作用する任意の点に関するモーメント M に等しい。式で表現すると $M = M_1 + M_2 + \cdot \cdot + M_n$ となる。 図 1-16(a)から外力 P の回転の中心 o から P への距離を h とすると P の o 点に関する曲げモーメントは

$$M = +Ph \tag{1-7}$$

と表される。図 1 -16(a)から明らかなように(1-7)式の M は⊿A-B-O の面積の 2 倍である。

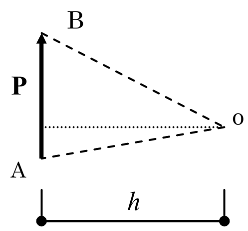

図 1-16(a)

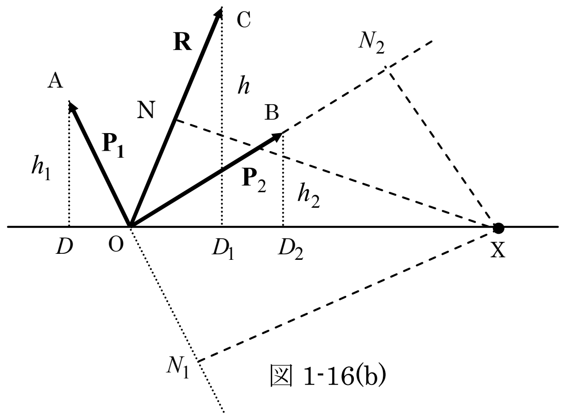

図 1-16(b)

図 1-16(b)のように 2 個の外力 P_1、P_2 と合力 R が任意の点 X に及ぼす曲げモーメントについて検証する。それぞれの曲げモーメントを M_1、M_2 と M とすれば(1)式から

$$M = M_1 + M_2 \tag{1-8}$$

が成り立つことを証明しておく。

$$M_1 = (OA \cdot XN_1) \cdot 2 = OX \cdot h_1$$

$$M_2 = (OB \cdot XN_2) \cdot 2 = OX \cdot h_2 \tag{1-9}$$

$$M = (OC \cdot XN) \cdot 2 = OX \cdot h$$

$$M_1 + M_2 = OX \cdot (h_1 + h_2) = OX \cdot h = M \tag{1-10}$$

ここで、R の y 成分は P_1、P_2 の y 成分の和であるから、$h = h_1 + h_2$ は明らかである。(1-9)式の第一式を検証すると $\angle AOD_1 = \angle XON_1 = \theta$ と置けば

$$OA \times XN_1 = OA \times OX \sin\theta \tag{1-11(a)}$$

$$OX \times h_1 = OA \sin\theta \times OX \tag{1-11(b)}$$

となり(1-11)式と(1-12)式が等しいことが分かる。

図 1-16(d)に示す P_1、P_2 の平行な力の合力の大きさと、作用点を求めるには、合力の大きさは、$R = P_1 + P_2$ となる。(1-8)式を使って、$P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2 = R \times \bar{x}$ が成立するから $\bar{x} = \dfrac{P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2}{R}$ で、

３力以上の平行力の合成は次式のようになる。 $R = P_1 + P_2 + R_3 + \cdot\cdot\cdot$

$$\bar{x} = \frac{P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2 + P_3 \times x_3 + \cdot\cdot\cdot}{R} = \frac{P_1 \times x_1 + P_2 \times x_1 + \cdot\cdot}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdot\cdot} \tag{1-12}$$

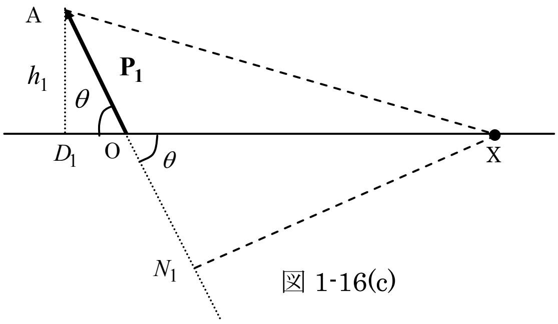

図 1-16(c)

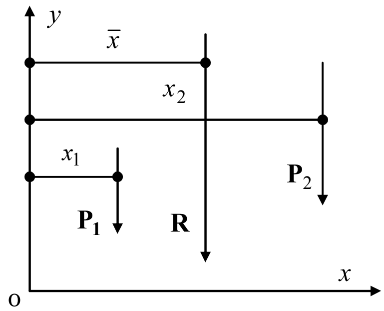

図 1-16(d)

並行する力で一部が逆方向の力である場合、例えば図 1-16(e)で P_2 が上向きに作用しているときは合力の大きさを $R = P_1 - P_2$ とする。そして、(1-12)式の分子においても、逆向きになった作用力の項の符号をマイナスにすればよい。

ここで、P_1 の作用点 A を原点に考えると、$R \times a = P_2 \times l$ となる。よって $a = \dfrac{P_2 \times l}{R} = \dfrac{P_2 \times l}{P_1 - P_2}$ である。

また、P_2 の作用点 B を原点に考えると、$R \times b = P_1 \times l$ となる。

よって $b = \dfrac{P_1 \times l}{R} = \dfrac{P_1 \times l}{P_1 - P_2}$

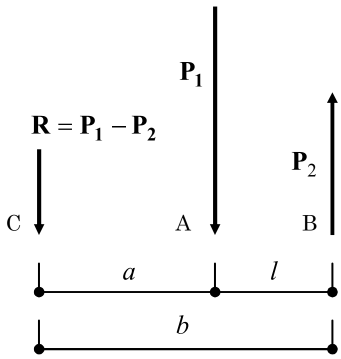

図 1-16(e)