計測工学における誤差の正規分布の導出と最小二乗法について

久保　和良*1，井手尾　光臣*2，加藤　康弘*2

On the derivation of the normal distribution of errors and the least squares method in the instrumentation and measurement

Kazuyoshi KUBO, Mitsuomi IDEO, and Yasuhiro KATO

In this paper, we derived the normal distribution from Gauss's empirical rules. Next, we assumed the error distribution to be a standard normal distribution, considered the simultaneous probability density of the measured values, performed maximum likelihood estimation, derived the least squares method, and showed that using the least squares method yields the arithmetic mean. Based on these mathematically derived results, we discussed several relationships among the arithmetic mean, normal distribution, and the least squares method. In particular, we presented ideas that can be further developed based on this process. We also demonstrated the handling of uncertainty in cutting-edge technology using easy-to-understand examples. We believe that this has provided a starting point for students to be mindful of high-level measurement in measurement engineering lectures and experiments at technical colleges.

KEYWORDS：Gauss error theory, normal distribution, least squares method, maximum likelihood, arithmetic mean

１．緒言

計測における誤差の取り扱いは，基本的でありながら，奥の深い問題である。物理現象の観測には必ず誤差の混入があり，その時代の最先端技術を一歩進めようとすると必ず誤差の問題が立ちはだかる。いかに論理的に誤差をさばくかは科学技術者の腕の見せ所である。最も有名な誤差の論理の一つにガウスの理論がある。カール F ガウス（英語では Gauss，ドイツ語では Gauß）は 1777 年に生まれた数理研究者で，30 歳でゲッティンゲンの天文台長になり，その 2 年後に天体運行論を出版した中で正規分布や最小二乗法によるデータ補正を述べている。1821 年に示した「誤差を最小にする観測の組み合わせ理論」[1] の第 4 節に，今日ガウスの誤差に関する 3 公理として参照される記述がある。

今日の高専や大学工学部での計測工学の多くの講義では，誤差が偏りを持つもの（系統誤差）とばら

---

*1 電気電子創造工学科　(Dept. of Innovative Electrical and Electronical Engineering),　E-mail: kubo@oyama-ct.ac.jp
*2 技術室　(Technical Office)

つきを持つもの（偶然誤差）に分類して，後者が計測の精密さに関わる要件であることを述べる。次に誤差のばらつきがガウス分布に従うことを示して，具体的計測法に進むまえに最小二乗法に触れる。これらはすべて天下りである。誤差の説明に時間をかける余裕はないし，学生たちは誤差がなぜこのように取り扱われるかをあまり深く考えずに，その先の計測法に大きな関心を寄せる。誤差の統計処理と言えば小学５年次で学んだ算術平均にばかり熱心で，これを教育の側から問題にしないことが多い。

近年の計測工学では，特に度量衡における標準の決定やトレーサビリティを語るうえで不確かさ[2)]の概念が重要になってきている。すなわち不確かさを２つに分けて，おおむね正規分布の分散など統計理論を扱うタイプ A と，それでは扱えないタイプ B に分割して議論するようになっている。そこまで成熟した先端技術においても，正規分布に立脚した誤差論は，いまだ基本として外せない深みがある。

正規分布が暗黙の了解とされる一例として，多くの受験生が気にする偏差値がある。偏差値とは平均値を 50 とし，その$\pm\sigma$（σは標準偏差）を 50±10 として正規化した指標である。統計学で学ぶ通り，偏差値 40 から 60 に入る割合は全体のほぼ 68 %であり，偏差値 70 以上の割合は約 2.2 %，偏差値 80 以上の割合は全体の約 0.1 %である。このような指標は便利ではあるが，有限数のサンプルについて正規分布が保証できるか疑問が残る。そもそも正規分布が仮定できるかを考えるなら，ガウスの誤差論に支配されるかどうかを論じる必要がある。実は統計分布は正規分布に限らないので，平均と分散で議論するのには限界がある。さらに高次のモーメントである歪度，尖度なども評価すべきであり，その奥の事象を意識すべきだろう。学生成績は誤差ではないので，偏差値だけでは思わぬ見逃しが起こりうる。

本稿では，そもそも正規分布が，どの条件下で導けるものなのかを具体的に示す。そのうえで最小二乗法は誤差の正規分布から説明できることを述べる。その結果，統計操作における算術平均が導出できるが，その全容が極めてトリッキーであることを考察する。この内容は計測工学の分野の項目である。導出などに新規性はないかもしれないが，今日，計測工学の教科書ではあまり目にすることがない内容を，いま一度見つめ直している。疑問を感じた高専相当の学生が読んで理解可能な内容を述べる。

すでに著者らは講義用教科書「計測工学」[3)]を出版しており，その改訂を検討している。その中で，加えるべき要点の一つが，ここに示される内容である。ただ，この内容は科学的な基本に触れているので，応用範囲は広いものと思われる。この研究報告を通じて知りたい方に向けて公開する所以である。

２．準備

２．１　ゼロ和の有限点での関数和がゼロになるような関数形

微分可能な関数$g(x)$を考える。n個の変数$x_1, x_2, \dots, x_n$が

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \tag{1}$$

の拘束下で，関数$g(x)$の有限点での和が

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_k) = 0 \tag{2}$$

を満たすと仮定する。この関数形を求めよう。
(1)式の拘束下では，$n-1$個の変数$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$が独立変数であり，

$$x_n = -\sum_{k=1}^{n-1} x_k \tag{3}$$

のみが従属変数と考えてよい。このとき(2)式を任意の独立変数 x_j（$j = 1,2,\ldots,n-1$）で偏微分すると

$$g'(x_j) + g'(x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_j} = 0 \tag{4}$$

であるが，(3)式を考慮すると

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_j} = -\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = -1 \tag{5}$$

なので (4)式は

$$g'(x_j) = g'(x_n) \tag{6}$$

である。これが任意の独立変数 x_j（$j = 1,2,\ldots,n-1$）で成り立つのであるから，$g'(x)$ はいつも同じ定数値 a をとる必要がある。すなわち

$$g'(x) = a \tag{7}$$

これを積分すると b を任意定数として

$$g(x) = ax + b \tag{8}$$

であるが，これを(2)式に代入して(1)式を考慮すると $b = 0$ が明白である。したがって次式を得る。

$$g(x) = ax \tag{9}$$

すなわち，ゼロ和の有限点での関数和がゼロになるような関数形は，線型関数にほかならない。

２．２　対数微分

正の関数 $f(x)$ を考えよう。この対数微分は次式の通りである。

$$\frac{d}{dx}\log_e f(x) = \frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{10}$$

２．３　ガウスの経験則の定式化

ガウスの誤差論の日本語訳[1)] をみると，測定誤差にはいつも規則的な定数的な誤差（今日のことばでは系統誤差）と，偶発的で不規則的な誤差（今日のことばでは偶然誤差）があると述べている（ガウス第１節)。このうち前者ではなく，後者の不規則な誤差を扱うと述べている。続いて今日，ガウスの３公理と呼ばれているものに言及していて，その原文は次のとおりである。(ガウス第４節，下線は著者)

「ある特定の観測をいくつか行ったときに生ずる総誤差 x の相対頻度を $\varphi(x)$ で表わすならば，誤差の連続性により，誤差が限りなく狭い区間 x と $x + dx$ の間にある確率は $\varphi(x)dx$ とおくべきであろう。実際には，この関数を先見的に与えることはほとんど不可能であるが，それにもかかわらず以下に示すように<u>誤差に共通した多くの特性が確認される</u>。明らかに関数 $\varphi(x)$ は，おこりうる誤差の限界の外にあるすべての x の値に対して 0 とするから，<u>定義域有限</u>とみなされる。しかしこの限界の内ならば，それは（中略）どこでもある正の値をとる。<u>多くの場合，絶対値が同じなら正と負の誤差は同じ頻度で現れるとみなされる</u>から $\varphi(-x) = \varphi(x)$ となる。<u>小さな誤差ほど大きな誤差よりも生じやすいか</u>

ら，一般に $\varphi(x)$ は $x=0$ の時最大の値をとり，そして x の絶対値が大きくなるにつれて減少し続ける。」

最初の下線部から推定するに, 今日ガウスの公理と呼ばれているものは, ガウスが確認した経験的事実, すなわち経験則とよべるものである。本論文では経験則ととらえて引用する。

（Ⅰ）ガウスの誤差に関する第１経験則（ガウスが「多くの場合，絶対値が同じなら正と負の誤差は同じ頻度で現れるとみなされる」と述べた部分に相当する）

「大きさの等しい正と負の誤差は，等しい確率で生じる」ことを仮定するなら，十分大きな n のもと，真値 θ は測定値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の算術平均に等しいと仮定できる。すなわち次のように書いてよい。

$$\theta = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{11}$$

（Ⅱ）ガウスの誤差に関する第２経験則（ガウスが「小さな誤差ほど大きな誤差よりも生じやすい」と述べた部分に相当する）

「小さい誤差は大きい誤差より起こりやすい」ことを仮定するなら，計測誤差の確率密度関数を $P(\theta)$ と書いたとすれば，その最大値は $P(\theta) = P(\bar{x})$ で実現するのであり，すなわち次のように書いてよい。

$$P'(\bar{x}) = 0 \tag{12}$$

（Ⅲ）ガウスの誤差に関する第３経験則（ガウスが「定義域有限」と述べた部分が相当する）

「ある限界値より大きな誤差は実際には起こらない」ことを仮定するなら，誤差の確率密度関数を $P(\theta)$ と書いたとすれば,

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{\xi\to+0} \xi \quad (= +0 \ ) \tag{13}$$

と書いてよい。ガウスの認識では計測器の上限下限の外側の計測値は得られない意味で定義域有限としているが，今日の我々の認識では「十分に大きいあるいは小さい」定義域について考えをめぐらす。従って正負の無限における確率密度関数は値が極めて小さい正の値をとると解釈できる。

２．４　ガウスの積分公式

ガウスの積分公式に次のものがある。証明は省略する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\kappa x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \quad (\kappa > 0) \tag{14}$$

３．正規分布と最小二乗法の導出

３．１　正規分布

誤差の正規分布の導出[4，5] にはいくつかの方法があるが，ここでは高専教育課程の学生に理解しやすいと考えられる方法を示す。

いま，ある物理量の計測をして，真値 θ に対して n 個の測定値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が得られたとする。この計測は同一条件で行われ，かつ独立に実施されたものとする。任意の測定値 x_j に含まれる誤差は

$$\varepsilon_j = x_j - \theta \tag{15}$$

であり，その確率密度関数を $f(\varepsilon)$ と書くなら，$\varepsilon = x - \theta$ について測定誤差の大きさが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間

に入る確率は $d\varepsilon = dx$ を考慮して，次式である。

$$f(\varepsilon)d\varepsilon = f(x-\theta)dx \tag{16}$$

今回の測定値は，偶然にせよ測定値は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ として得られているので，これら独立事象が同時に起こる確率を $P(\theta)dx^n$ と置くと，それらが $x_1, x_2, \ldots, x_n$ から dx 以内の範囲に入る確率は

$$P(\theta)dx^n = f(x_1-\theta)dxf(x_2-\theta)dx\cdots f(x_n-\theta)dx \tag{17}$$

であるから，誤差のばらつきに関する全体の確率密度関数 $P(x)$ は

$$P(\theta) = f(x_1-\theta)f(x_2-\theta)\cdots f(x_n-\theta) \tag{18}$$

である。この取り扱いを簡単にするために，確率が正である仮定の下に両辺の対数をとると

$$\log_e P(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \log_e f\left(x_j-\theta\right) \tag{19}$$

であり，さらに両辺を微分すると対数微分 (10)式から知れる通り，次式を得る。

$$\frac{P'(\theta)}{P(\theta)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f'\left(x_j-\theta\right)}{f\left(x_j-\theta\right)} \tag{20}$$

ここでガウスの誤差に関する第１経験則 (11)式，および第２経験則 (12)式を適用すれば

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{f'\left(x_j-\bar{x}\right)}{f\left(x_j-\bar{x}\right)} = \frac{P'(\bar{x})}{P(\bar{x})} = 0 \tag{21}$$

であり，また

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\bar{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j - n\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{n} = 0 \tag{22}$$

である。上 2 式をにらんで (9)式を適用するなら（ $g(x)$ を $f'(x)/f(x)$ に対応させて）， $f(x)$ は

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ax \tag{23}$$

を満たさなくてはいけないので，対数微分 (10)式を逆にたどると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\log_e f(x) = ax\,, \tag{24}$$

$$\log_e f(x) = \frac{a}{2}x^2 + c\,, \tag{25}$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{a}{2}x^2\right)\cdot e^c = C\exp\left(\frac{a}{2}x^2\right) \tag{26}$$

である。ここで c，C は積分定数及びそれに起因する定数である。またガウスの誤差に関する第三経験則 (13)式により $a < 0$ でなければならない。一般には

$$a = -\frac{1}{\sigma^2} \quad , \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \tag{27),(28}$$

と置いて確率密度の総和が 1 になるように正規化したうえで,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{29}$$

をガウス分布（Gauss distribution）または正規分布（normal distribution）と呼んでいる。確率密度の総和が 1 になることは，ガウスの積分公式(14)式を使う。ただし σ^2 は分散（variance），σ は標準偏差（standard deviation）である。とくに (29)式は平均値 0 周辺のばらつきを示すので，標準正規分布とも呼ばれる。

３．２　誤差の正規分布

特に計測工学では σ を平均二乗誤差（mean square error）とよび,

$$\sigma^2 = \frac{1}{2h^2} \tag{30}$$

と置き直して次式の確率密度関数を用いる。

$$f(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2\varepsilon^2) \tag{31}$$

これを誤差の正規分布（normal distribution of noise）とよぶ。また h を精度定数[6)] と呼ぶ。

３．３　最小二乗法の導出

誤差の正規分布が求まったので，これを用いて最小二乗法を導出する。
先に述べた記述と重なるが，ある物理量の計測をおこなったところ，真値 θ に対して n 個の測定値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ が得られたとする。この計測は同一条件で行われ，かつ独立に実施されたものとする。任意の測定値 x_j（$j = 1,2, \dots, n$）に含まれる誤差は

$$\varepsilon_j = x_j - \theta \tag{32}$$

であり，その確率密度関数を $f(\varepsilon)$ と書くなら，$\varepsilon = x - \theta$ について測定誤差の大きさが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間に入る確率は $d\varepsilon = dx$ を考慮して次式で表わせる。

$$f(\varepsilon)d\varepsilon = f(x - \theta)dx \tag{33}$$

今回の測定値は，偶然にせよ $x_1, x_2, \dots, x_n$ として得られているので，これら独立事象が同時に起こる確率を $P(\theta)dx^n$ と置くと，それらが $x_1, x_2, \dots, x_n$ から dx 以内の範囲に入る確率は

$$P(\theta)dx^n = f(x_1 - \theta)dxf(x_2 - \theta)dx \cdots f(x_n - \theta)dx \tag{34}$$

であるから,

$$P(\theta) = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2) \cdots f(\varepsilon_n) \tag{35}$$

である。(31)式の誤差の正規分布を代入すると

$$P(\theta) = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \exp[-h^2({\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2)]$$

$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \exp[-h^2\{(x_1-\theta)^2+(x_2-\theta)^2\cdots+(x_n-\theta)^2\}] \tag{36}$$

が得られる。確率密度分布 $P(\theta)$ の面積総和を一定に保ちつつ測定が精密になるように分布の分散を小さくするためには，真値 θ における $P(\theta)$ の値を大きくして分布をスリムにすればよい。このような考え方にもとづく方法を最尤法（さいゆうほう）（LMS；Maximum Likelihood Method）とよぶ。このためには誤差の二乗和

$$E = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2 = (x_1-\theta)^2+(x_2-\theta)^2\cdots+(x_n-\theta)^2 \tag{37}$$

を最小にすればよい。ゆえに

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \tag{38}$$

とおいて，θ の推定値が得られる。これが最小二乗法（LSM；Least Squares Method）である。
この簡単なケースに対して最小二乗法を実施すると

$$E = \sum_{k=1}^{n}(x_k-\theta)^2 = \sum_{k=1}^{n}{x_k}^2 - 2\theta\sum_{k=1}^{n}x_k + \theta^2\sum_{k=1}^{n}1\,, \tag{39}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 - 2\sum_{k=1}^{n}x_k + 2\theta n = 0 \tag{40}$$

と変形して

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \tag{41}$$

を得る。これは (11)式と同値であり，この場合の推定値は測定値の算術平均に等しい。

４．考察

ここまでの流れをまとめると次の通りである。

1．まず測定誤差の存在を認め，そこから系統誤差を除いた偶然誤差を考える。
2．ある物理量の真値 θ に対して複数回の計測を行い n 個の測定値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が得られたとする。
3．各測定値には加法的な測定誤差が含まれると仮定する。
4．ガウスの３公理とよばれる経験則を仮定する。真値は測定値の算術平均である仮定を含む。
5．以上の仮定のもとで，数学的操作により正規分布が導出される。
6．測定誤差の標準正規分布を考慮して，最小二乗法が導き出される。
7．最小二乗法を用いると，真値は測定値の算術平均であることが導ける。

この流れには，いくつかの疑問が残る。第１に，算術平均を仮定して，結論が算術平均になるのは自明のことではないか。確かにその通りである。ガウス分布は算術平均に対して必要条件なので適用が広い。（例えるならセミを仮定して昆虫の概念を手に入れて，そこからセミを導出している。）このガウス分布は，工学的に有用なことがある。導体中の電荷キャリアが熱で励起されて不規則運動を行うと熱雑

音が現れる。あるいは半導体の荷電粒子がランダムに運動する電流のゆらぎがショットノイズである。これら雑音は正規分布として表れることが知られている[7)]。雑音の表現はほかにも周波数分布などいくつかあるが，これらの性質を記述できるということは，雑音を消すためにも（例えば同期加算など），また雑音を利用するためにも（例えば熱雑音による一次温度計など），有用なことが多く，技術的な見通しを与える点で重要である。これらの理工学的ノイズ以外にも，正規分布は人の身長分布や血圧分布など様々なところに現れることが知られていて，その分布曲線はベルカーブなどと呼ばれることもある。従って，算術平均から出発すればうまくゆく応用には算術平均を使えばよく，正規分布から出発してうまくゆく応用にはガウス分布を使えばよい。発展的かつ生産的に考える指標になりうるものは，便利なものを使うべきである。小学生には算術平均でよく，平均点と偏差値が必要ならガウス分布を使えばよい。

第2に算術平均を仮定して最小二乗法が導けたなら，最小二乗法から算術平均を導く理由があるだろうか。算術平均はガウスの経験則をもとにしていると考えるなら，最小二乗法を持ち出すまでもなく正しいと仮定できよう。ただし最小二乗法を導けば，計測工学においては最小二乗法を用いて真値も，入出力関係の比例定数も，方程式のフィッティングも行えることを学べる。（例えるなら，スズメを仮定して鳥の概念を手に入れた。鳥の概念からスズメを導く意味があるだろうか。これに対して，鳥の概念からスズメもハトも鶏も導けるので，応用が広い。）この観点で見ると，最小二乗法を出発点として，さまざまな応用に発展させることが有用である。それに伴い，最小二乗法が得意でない応用も研究されていて，もともと線型ではなかったシステム入出力関係に直線をフィッティングさせてしまったなど，その限界も知られている。すなわち，最小二乗法の研究という観点が新しい展望を生む側面がある。

第3に算術平均から出発するのも，最小二乗法から出発するのも同じことなのだろうか。算術平均よりも最小二乗法の方が広い概念であるため，実はこれらは同値ではない。算術平均を仮定して最小二乗法を導いたことを知れば，算術平均が十分条件で，最小二乗法が必要条件である。ところが最小二乗法から算術平均を導いたのであるから，その見方によれば最小二乗法が十分条件で，算術平均が必要条件である。非常にトリッキーな構造がある。これはおそらく，ガウス経験則が測定全体の分布 $P(\theta)$ について言っており，導かれる正規分布は毎回の測定誤差の分布関数 $f(\varepsilon)$ を表していること，および最小二乗法が測定全体の分布 $P(\theta)$ に関する最尤法にもとづいていること，さらに算術平均はガウス経験則の一部からの導出であることなどを整理すれば，解明できる構造だと思われる。

第4に，それでは算術平均を仮定してガウス分布を導いたのであるから，ガウス分布が必要条件であるゆえに万能であろうか。具体的に言うなら，算術平均が分布の1次モーメント（平均値）一つのみを与えるのに対し，ガウス分布は平均値と2次のモーメント（分散）の二つを与える。ゆえにガウス分布のほうが広い概念である。ただしこの分布は3次のモーメント（歪度）や4次のモーメント（尖度）などは与えない。これらは機器の異常診断に用いられるパラメータである。拡張の余地は残されている。

さて，今回論じた誤差の正規分布を

$$f(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 \varepsilon^2) \qquad \text{repeated (31)}$$

とおいたから，

$$P(\theta) = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \exp[-h^2({\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2)] \qquad \text{repeated (36)}$$

によって誤差の二乗和を最小にする条件から

$$E = {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2 = (x_1 - \theta)^2 + (x_2 - \theta)^2 \cdots + (x_n - \theta)^2 \qquad \text{repeated (37)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{repeated (38)}$$

とおいて, θ の推定値を得る最小二乗法を導いたのである。これに対して拡張型の推定法も考えられる。

（Ⅰ）最小絶対値法　一つの試みとして誤差の分布を

$$f(\varepsilon) = C_a \exp(-h^2|\varepsilon|) \tag{42}$$

とおいてもガウスの３つの経験則は満足する。前例にならって，誤差の絶対値和を最小にする条件から

$$E_a = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n| = |x_1 - \theta| + |x_2 - \theta| + \cdots + |x_n - \theta| \tag{43}$$

$$\frac{\partial E_a}{\partial \theta} = 0 \tag{44}$$

とおいて，θ を推定値することは可能である。

（Ⅱ）最小四乗法　別の試みとして誤差の分布を

$$f(\varepsilon) = C_q \exp(-h^2\varepsilon^4) \tag{45}$$

とおいてもガウスの３つの経験則は満足する。前例にならって，誤差の四乗値和を最小にする条件から

$$E_q = {\varepsilon_1}^4 + {\varepsilon_2}^4 + \cdots + {\varepsilon_n}^4 = (x_1 - \theta)^4 + (x_2 - \theta)^4 \cdots + (x_n - \theta)^4 \tag{46}$$

$$\frac{\partial E_q}{\partial \theta} = 0 \tag{47}$$

とおいて，θ を推定値することは可能である。必要十分ではない関係に目をつけると，さまざまな発展が考えられる。ここで示した２つの分布による推定方式は研究対象として興味深いが，実際に考えてみるとアルゴリズムとして実装するために，過分な工夫が必要なようである。試しに手計算で (45)式の分布を使う最小四乗法を展開してみると，3 次の代数方程式を解く必要が出て，複雑さが増える。試行錯誤の価値はありそうだが，結局はいかに簡単に最高の結果を得るか，という所に落ち着くと思われる。

もう一つだけ追加しておきたいのだが，本稿では算術平均として相加平均のみを扱った。実は平均にはそれ以外にも相乗平均，調和平均などがあるので，研究のバリエーションは広がると思われる。

我々は行きがかり上，ガウスの経験則や算術平均を仮定して誤差を取り扱ってきた。しかし，正規分布や最小二乗法の方を仮定して，その拡張をいわば摂動と考えて議論しても誤りではなさそうである。

教育上の配慮を考察するなら，小学５年次では確率密度関数を習得させるのは困難なので，算術平均を理解すれば満点とする。高校，高専では平均と分散まで教えて満点とするのはやはり教育的配慮である。しかし学生から見ると，満点が全てと思い込むので，その向こう側がないかのように思わせる教育は危ない。実社会には教育的配慮の安全装置がかかっていないので, いわば神の領域まで存在している。

今日の計測技術に関して，誤差が正規分布に従う領域で仕事をするのは，ある意味楽なことかもしれない。というのは，度量衡領域では，2019 年のキログラム原器による質量標準廃止に代表される事象を支えた人類の最先端技術や, トレーサビリティに伴う不確かさの評価など, 難しい課題がたくさんあり，人類はフロンティア領域を扱う必要が出てきた。すでに，測定における真値は，人類に知りえないかもしれないという領域に足を踏み入れてしまったのである。例えばキログラム原器の廃止には，CGPM の決議先送りが生じるという異例の事態が生じたことは，この分野に詳しい方であればご承知だろう。

最終的にはプランク定数を定義するために，最先端の測定値[8]を各国から提出したのであるが，各国が国力をかけて国家予算を投じて提出した，要求に見合うデータは 8 つの測定値しかなかった。これを多いと感じるか少ないと感じるかは立場によるだろう。事実として 8 つのデータから，プランク定数を定義する必要があった。各国から提出された 8 つの測定結果のうち 1 つは日本から，3 つは合同プロジェクトに日本が貢献したデータ，ほかに合衆国 2 つ，フランス 1 つカナダ 1 つという内訳である。これをもとにプランク定数（CODATA-2017）を有効数字 9 桁で決定し，2018 年の第 26 回 CGPM が，新しいキログラムの定義への意向を審議した。その結果，満場一致でプランク定数によるキログラム標準が採択され[9]，2019 年に施行された。かつてのプランク定数は測定値であったが，現在は誤差のない定義値である。ところで定義に使われた 8 つの測定値を見ると，とてもガウス分布には見えない。今日ではこのような不確かさ（神の領域とも呼べる世界に触れているため，誤差とは呼ばない）をタイプ B の不確かさと呼んでいる。実は学生実験で扱うデータ分布は，究極のところでこのような世界につながっているということを，学生教員双方で認識できると，理想的な工学教育のほんのひとかけらが実現される。

５．結言

本稿ではガウスの経験則（一般にはガウスの公理とよばれる）から正規分布を導き，次に誤差分布が標準正規分布であると仮定して測定値の同時確率密度を考えたうえで最尤推定を行い，最小二乗法を導出して，最小二乗法を用いると算術平均に帰着することを示した。これをもとに，算術平均，正規分布，最小二乗法間でのいくつかの関係性を考察した。これらはすべて高専標準過程で学ぶ数学を用いている。

計測において，系統誤差は理論補正や校正などによって消すことができる誤差であり，偶然誤差は偶発的にばらつく性質がある。このために十分な数の計測値を得て，統計処理を行うことになる。偶然誤差を小さくするということは，すなわち計測の精密さを増すことである。このための具体的数式を導出し，いくつかの事項を考察した。特にこの流れを基本として，拡張概念に発展しうるアイディアを提示できた。また最先端技術における不確かさの扱いをわかりやすい例を用いて示した。高専や大学における計測工学の講義あるいは実験において，意識の高い計測を心掛けるべき端緒を提供できたと考える。

参考文献

1）Carl Friedrich Gauss 著，飛田武幸，石川耕春訳：誤差論，紀伊國屋書店 (2011)
2）今井秀孝ほか：測定・不確かさの評価の最前線，日本規格協会（2013）
3）久保和良，井手尾光臣，加藤康弘：計測工学，電子制御工学シリーズ第 1 巻，近代科学社（2023）
4）野本隆宏：ガウス分布の導出，新潟大学工学部 HP，［https://www.eng.niigata-u.ac.jp/~nomoto/7.html］2025-9/6 閲覧
5）本多敏：最小二乗法による測定値の扱い，慶應大学講義動画，計測信号処理，第三回（2012）
［https://www.youtube.com/watch?v=vfQqvegEplY］2025-9/6 閲覧
6）浅田常三郎：電子計測，日刊工業新聞（1969）
7）山崎弘郎ほか：電子回路のノイズ技術，オーム社（1981）
8）倉本直樹，藤井賢一：新たなキログラムの定義を導くためのプランク定数精密測定，2018 年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集，K06，pp.651-652（2018）
9）CGPM：“On the revision of the International System of Units SI” and Voting 26th CGPM，CGPM 動画（2018）
［https://www.youtube.com/watch?v=KL-D-AzytfM］2025-9/6 閲覧

［受理年月日　2025年9月26日］