

Cauchy-Riemann の関係式の証明について

On Proofs of Cauchy-Riemann's equation

山口 淳 三

Junzo YAMAGUCHI

1

一複素変数関数の研究で取り扱われる関数は、微分可能性が本質的に重要である。

複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(z)$ を実数部 $u(x, y)$ と虚数部 $v(x, y)$ の二つの実関数の和として表わす。

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

このとき、 $f(z)$ が $z=z_0$ で微分可能であるためには、即ち $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ が $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ をどのような形であれ 0 に近づければ、ある一定数 A に近づくためには、 u, v の偏導関数が連続で

コーシー・リーマンの関係式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

が成立つことが必要かつ十分である。

コーシー・リーマンの関係式は、ダランベールが流体の抵抗に関する1752年の論文のなかで、解析関数 $f(x+iy)=u+iv$ があるとき、 $f(x-iy)=u-iv$ で $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ が成立するとして導びき出しており（加賀美、浦野訳ボイヤー「数学の歴史」朝倉書店）その後コーシーによっても知られていた。

本論では、この関係式のリーマンの取扱いと、いま多くの関数論の教科書、参考書などで取扱われている方法を比較し、リーマンの考え方の素直さを見てみたい。

リーマンは、1851年にゲッティンゲン大学で「一複素変数関数の一般論の基礎（Grundlagen für eine

allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse）」という博士論文を書いた。それは21節からなる複素変数関数論の基礎概念を集約したものであり、コーシー・リーマンの関係式と等角写像の考えが最初の4節までに述べられている。

リーマンの数学に対する研究はワイヤーシュトラウスと対照的で非常に視覚的・直感的・具体的である。これは彼がニュートンやオイラーの研究を学び、引力、電気、磁気、熱などの物理的関係を研究していたことにも由来していると思われる。

以下、リーマンの上記論文を見て行くこととする。

関数の連続性に関するリーマンの記述はつぎのとおりである。「 z を順次すべての実数値をとりうる変数とする。これらの各値に対して、 z の関数と呼ばれる不定数 w が対応するとする。 z が二つの定まった値の間を連続的に動くとき、 w も同じく連続的に変化するならこの関数はこの区間で連続であるという。」

ここでは「連続」とは何かという記述はないが「関数が連続」とは何かを記述している。

現在行われているように関数の連続性の定義を初めて $\epsilon - \delta$ で表現したのはワイヤーシュトラウスであり、10年後の1861年にベルリンの講義においてであった。（好田訳、ボタチーニ「解析学の歴史」）

なお、実数の連続性については後にリーマンより5歳年下のデデキントにより深く研究され、更に連続体仮説の研究にまで発展したが、この点は今議論しない。

2

数学においては、他の科学と同様、同じ研究対象に

ついでに理論が研究の深化にともなう、より豊かな理論によってとって代わられる。それは以前の理論より新しい理論がより一層我々の「数学的」精神を満足させるためである。

ウィーン生まれの哲学者カール・ポパーによれば、一言でいえば、科学的進歩は劣った理論を打ち倒し、よりよい理論にとって代えることにある。彼はしかし「ある理論が真であると知られているということが、その理論が真であるということである」という主観説に反対する。

ポパーは、たとえ我々が真理を言いあてていても、それが真であることを知ることはできないという客観説を主張する。(以下は「カール・ポパーの哲学」高島弘文著(東大出版)による。)

これに対して、更に進んで、我々は真理を言いあてることができるだけでなく、それが真であることも知ることができるというのが本質主義的客観説であるが、ポパーはこれにも反対している。

それではよりよい理論、より一層真理に近づいている理論とはどういうものか。

ポパーは次のような点を挙げている。

- ・より一層精確な主張がなされ、より一層精確な検証にたえる。
- ・より多くの事実を説明する。
- ・諸事実をより一層詳細に記述、説明する。
- ・これまで無関係におかれていた諸問題を統一し結びつける。

などである。

要するに、真理への近さの度合は多様なテストの厳しさに耐えることのできる程度によって決められるのである。ポパーによれば、試行錯誤法が日常的認識と同じく科学の方法であり、これはアメーバから天才アインシュタインに至るまでの有機体の行動様式である。

なぜこのような議論をここで長々とするかという読者がいるかも知れないので、ここで説明をしておきたい。

数学の勉強を始める学生の内には、他の科学同様に、我々の既知の部分だけでなく未知の部分をも含めて「体系」がまず存在し、その「体系を暴露」するのが「研究」であるというように考える者がいないではない。

教科書で勉強する者は、その教科書の体系は人がそれを書き表す以前から存在するものであるという考えを抱き易い。

科学の進歩のほとんどの部分が、個別具体的な問題

をとりあげそれを研究することによって発展し、それらの研究成果を関連づけ総合化することによって「体系」ができ上がっていることを忘れがちである。

個々の理論や体系ができあがる過程を再認識するために、ここで参考までに、ポパーの科学的認識論を紹介した。

3

リーマンの論文にもどる。

「変数 z を実数に制限しないで複素数 $x+iy$ (ここで $i=\sqrt{-1}$) まで許容する場合、様相は全く別のものとなる」

関数の理解を容易にするために複素平面を導入し、 $z=x+iy$ を平面 A における点 $o(x, y)$ としそれに対応する $w=u+iv$ を平面 B の点 $q(u, v)$ で表し、視覚的・図形的に「連続」をイメージしている。

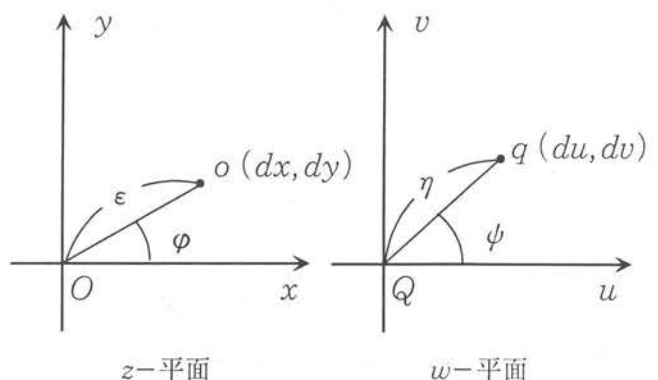
つぎに、研究する「関数」をつぎのように定義している。「 $\frac{dw}{dz}$ が dz に独立であるとき、 w は z の関数である」とし、このような関数(写像)の研究が重要であるという認識をしている。

更に x の無限小を表わす Δx と dx を区別せず x が十分にゼロに近いときこれを dx で表わしている。

さて、コーシー・リーマンの関係式に入る前にリーマンが前述の論文で簡潔に展開している等角写像の叙述を以下に示しておきたい。

w を複素変数 z の「関数」とする。 z の複素平面の原点 O の近傍の内のある点を o と記す。そして、点 o の複素平面 w への写像を q とする。

更に $x+iy+dx+idy$ 及び $u+iv+du+idv$ を対応する z と w の値とする。 (dx, dy) (du, dv) はそれぞれ O と Q を原点とする直角座標の点 o と q を表わしていると見なすことができる。



極座標を導入すると

$$dx+idy=\varepsilon e^{i\varphi}, \quad du+idv=\eta e^{i\psi}$$

今平面で o' と o'' を原点 O に近い二つの点 (dx', dy') , (dx'', dy'') とし, これに対応する w -平面の点 q' , q'' を (du', dv') , (du'', dv'') とする。

$$\text{関数の性質により } \frac{du'+idv'}{dx'+idy'} = \frac{du''+idv''}{dx''+idy''}$$

が成立つ。

これから

$$\frac{du'+idv'}{du''+idv''} = \frac{\eta'}{\eta''} e^{i(\psi'-\psi'')} = \frac{dx'+idy'}{dx''+idy''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} e^{i(\varphi'-\varphi'')}$$

$$\text{この式から } \frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \text{ 及び } \psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi''$$

即ち三角形 $o'Oo''$ と $q'Qq''$ において角 $o'Oo''$ と $q'Qq''$ が等しく対応する二辺の比が等しいことから, この関数によって, 無限に小さな三角形は相似に写像されることがわかる。ただし, ここで dz と dw の比が有限であるという条件が必要である。

以上のような論法で, リーマンには視覚的に素直に理論を展開している。

4

リーマンは前述論文の第4節でいわゆるコーシー・リーマンの関係式とラプラスの方程式と呼ばれているものについて簡潔に説明している。それは以下のとおりである。

微分商 $\frac{du+idv}{dx+idy}$ を変形し

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial x}\right) idy}{dx+idy} \quad (\text{A})$$

の型にすると, 以下のことが明らかになる。

即ち, 二つの値 dx と dy が値を持つとき, そして

$$\text{そのときのみ, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 及び } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

である。

この関係式は, $w=u+iv$ が $z=x+iy$ の関数であるための必要十分な条件である。

この関数の各部分はこの関係から次式を満たす。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B})$$

(リーマンは虚数単位を文字の後に書いている。即ち, $dx i$, $dy i$, xi , yi 等, $du i$, vi , φi , ψi 等と記しているが, 本稿では現代的記法を用いる。)

(A) からなぜコーシー・リーマンの関係式が出てく

るのが明らかであるかの説明の仕方はいくつかあろう。

リーマンは論文の第1節で式 $\frac{du+idv}{dx+idy}$ を次のように変形している。

$$\begin{aligned} \frac{du+idv}{dx+idy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) i \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) i \right] \frac{dx-idy}{dx+idy} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) i \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) i \right] e^{-2i\varphi} \end{aligned}$$

ここで, $dx+idy=\varepsilon e^{i\varphi}$ と極座標を用いている。

当然 $dx-idy=\varepsilon e^{-i\varphi}$ である。

このように変形すれば, $\frac{dw}{dz}$ が dz に独立であるということが, 上式の第2項が変角 φ に独立であることと同値であることがわかる。

故に第2項の $e^{-2i\varphi}$ の係数が零であることが $\frac{df(z)}{dz}$

が定まった値を持つためには必要かつ十分であり, これによってコーシー・リーマンの関係式が導かれる。

さて, いま出回っている関数論の教科書で, コーシー・リーマンの関係式の最も一般的な証明法はつぎのようなものである。

$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ が $z=z_0(=x_0+iy_0)$ で微分可能とすると, 次式が成立つ。

$$f(z)=f(z_0)+(a+ib)(z-z_0)+\varepsilon$$

ここで a, b は定数, ε は $\frac{\varepsilon}{|z-z_0|} \rightarrow 0 (z \rightarrow z_0)$ である。

これを実部と虚部に分けると

$$u(x, y)=u(x_0, y_0)+a(x-x_0)+b(y-y_0)+\varepsilon_1$$

$$v(x, y)=v(x_0, y_0)+b(x-x_0)+a(y-y_0)+\varepsilon_2$$

$$\text{この2式から } \frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

となる。

これで関係式の必要性が証明されているが十分性も同様に証明されている。

Δz を特殊化して関係式の必要性を証明している教科書もある。

それは以下のとおりである。

$$w=f(z) \text{ が微分可能とすると,}$$

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

である。

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ であり Δz がどの方向からゼロに近づいても上式は成立つから

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z)$$

同じく

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{i\Delta y} = -i \frac{\partial w}{\partial y} = f'(z)$$

$$\text{これから } \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y}$$

即ち $w = u + iv$ とすると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{即ち } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ が導かれる。}$$

逆の十分性の証明は省略する。

平均値の定理を用いて同様の証明をするものもある。

それは以下の如くである。

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする。

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$$

$$= \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}$$

$(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)$ である。 ($0 < \theta < 1$)

v についても同様である。

ここで $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ のとき $\Delta x : \Delta y = m : n$

とすれば

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$- \frac{\{u(x, y) + iv(x, y)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \frac{\{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$+ \frac{i\{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\text{故に } = \frac{mu_x + nv_y + i(mv_x + nu_y)}{m + in}$$

上式が $m:n$ に無関係に一定の値をとるのだから

$m = 1, n = 0, m = 0, n = 1$ においてイコール

で結べば

$$\frac{u_x + iv_x}{1} = \frac{u_y + iv_y}{i}$$

$$\text{即ち, } u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

これから

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が導き出されている。

この方法は、まず必要条件を導き出すために採られた方法であるが、変数の収束方向を特殊化するという事は必ずしもしつくりと心に（頭にではない）こない人がいるかも知れない。

リーマンの方法と同様の方法で関係式を証明している教科書がある。たとえば、それは岩波応用数字の「複素関数論」(森, 杉原著)である。

以下に式だけを省略して引用する。

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

$$= u_x \Delta x + u_y \Delta y + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y) + (\epsilon_u + i\epsilon_v)/\Delta z$$

$$\Delta x = (\Delta z + \overline{\Delta z})/2 \quad \Delta y = (\Delta z - \overline{\Delta z})/2i$$

だから

上式=

$$\frac{(u_x + v_y) + i(-u_y + v_x)}{2} \Delta z + \frac{(u_x - v_y) + i(v_y + v_x)}{2} \overline{\Delta z}$$

$$+ (\epsilon_u + i\epsilon_v)(|\Delta z|)$$

$$\text{故に } \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \frac{(u_x + v_y) + i(-u_y + v_x)}{2} + \frac{(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)}{2}$$

$$\times \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + (\epsilon_u + i\epsilon_v) \frac{|\Delta z|}{\Delta z}$$

$\Delta z \rightarrow 0$ とするとき、これが極限を持つための必要十分条件は

$$\text{第2項 } \frac{(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)}{2} = 0$$

となること

$$\text{即ち } u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

である。

5

数学の証明方法は、特に新たに学習を始める者に与える際には、学習者の心に受け入れられ易く簡明なものが望まれる。

フランスの数学者ジャック・アダマールは彼の著書「発明の心理」(伏見・尾崎訳・みすず書房)のなかでアンリ・ポアンカレの文章を引用するなどしながら、数学上の発見の心理や数学を理解することができないことがなぜ起るのかなどについて論じている。

数学的精神、数学的センスというものは幾種類もあるので同じ定理を別々の方法で発見することもあるだろうし、もちろんそのなかには幾種類もの証明方法があることもある。

ここで、アダマールは数学を理解するとはどういうことかということについて、ポアンカレの言葉を引

用している。

一つの定理の証明を理解することは、これを構成しているすべての推論式をつぎつぎに検討し、その正しさや、ゲームの規則に合致していることか？

ある人々にとっては、然り、である。

多数の人々にとっては、否、である。ほとんどすべての人々はもっときびしい。彼らはただ単に証明の推論式がすべて正しいかどうかを知りたいだけでなく、またそれらがなぜほかの順序でなくその順序で結びつけられるのを知りたいのである。その人々にとって、それらがきまぐれによってもたらされ、到達すべき目標を意識している知性によってもたらされたのではないように思われる限り、かれらはそれを自分たちが理解したとは信じていない。

アダムールは数学的認識を人の顔を見分けることに例えている。目、鼻、口、耳、髪などの形をいくら詳細に述べても、その人を一見したときほどは確実に誰であるかを認識することはできない。数学的認識も総合的なもので、たとえば証明の各段階が理解できたからといって必ずしも全体が理解できるわけではない。

多くの人が今でも、人間の認識力、精神活動が論理的階段を追って行くことにより、いくらでも高度な所まで行けると考えている。デカルトも自分の精神を正しく段階的に指導することによって、どのような高みにまでも到達できると考えていた。彼は「理性すなわち判断力は、それのみによって我々が動物から分かれた人間たらしめるものであるから、それが各人に備わっていると考える」と述べている。これは一見正しいように思える。しかし、このような考え方の誤りは、トマス・クーン（「科学革命の構造」参照）やカール・ポパーが指摘しているとおりである。

数学の教科書には総合的な美しさがなによりも必要である。

リーマンは最も直感的な数学者の一人であるので、彼の理論を原典と現在の教科書との間で比較検討することにより、数学的思考方法を比較することができ、また彼の理論がどのように発展しているかを見ることができる。

厳密性ということについては、パラダイム論を持ち出すわけではないが、その時々には最適な考え方があり絶対普遍的なものは今までなかった。

物理学者が、道具としての数学を作ることがしばしばある。

例えばディラックのデルタ関数は当時の数学では関

数とは考えられないものであり、ましてそのような関数の微積分などは考えることもできない範疇に属するものであった。

このようなものが関数として認められるためには、新しい数学の概念の構築を待たなければならなかった。

このような形で厳密性を絶対視することができない側面もある。さらに、厳密性の効用それ自体にも一考の余地がある。

厳密性については「証明」の段階では必要となるものだが「発見」には必要性が少ない。「理解」が「発見」の一形態であるならば、数学を理解するための教科書においては証明方法を適切に選択することが非常に重要である。

（注）今後とも機会があれば、リーマンの論文の原典を研究し「リーマンの数学」と現在の数学の比較検討を続けたい。

「研究」というより「教育」という立場から見ると、学習者に対して数学及び数学者の歴史的及び人間的背景等についての知識を付与することなどにより、その問題に対する興味を高め理解力を増大させることができる。と考える。

今後そのような魅力ある教科書が望まれるのではないだろうか。

関数論の一般的テキスト

- 吉田洋一 関数論 (岩波全書)
一松 信 関数論入門 (培風館)
田村二郎 解析関数 (裳華房)
溝畑 茂 数学解析 (朝倉書店)
小平邦彦 複素解析 (岩波書店)
森 正武・杉原正顕 複素関数論 (岩波書店)
スミルノフ 高等数学教程 (共立出版)
竹内端三 関数論 (裳華房)
能代 清 初等関数論入門 (培風館)
辻 正次 関数論 (朝倉書店)
アールホオルス 複素解析学 (現代数学社)
カルタン 複素関数論 (岩波書店)
楠 幸男 解析関数論 (広川書店)
小松勇作 関数論 (朝倉書店)
笠原乾吉 複素解析 (実教出版)
竜沢周雄 関数論 (共立出版)
杉浦光夫 解析入門 (東京大学出版)
Goursat A Course in mathematical
analysis (Dover)

リーマンの論文集

- Collected works of Bernhart Riemann (Dover)
(受理年月日 1996年9月30日)