

プロセス制御系設計用CADソフト（その9） —ロバスト性を考慮したPIDコントローラの設計—

笠原雅人・金原昭臣・黒須 茂・荒木寿昭*

CAD Software for Designing Process Control System —A Design Method of PID Controller in Consideration of Robustness—

Masato KASAHARA, Akiomi KIMBARA, Shigeru KUROSU, Hisaaki ARAKI*

1. はじめに

ロバスト性を考慮に入れたPIDコントローラの設計アルゴリズムに関して、プロセス制御系設計用CADソフト（その8）で数学的に厳密解を与えた。

本研究では、数値計算例によって設計の手順を具体的に述べ、トレードオフに関わるいくつかのアイデアを提案する。

2. 数値計算例

2. 1 部分的モデルマッチング法により調整されたPIDパラメータに基づいた設計法

プラントの時定数 $T_p = 10$ min, むだ時間 $L_p = 1$ min として部分的モデルマッチング法によって求めたパラメータはつぎのとおりである。

$$K_p = 9.87, K_i = 4.11, K_d = 3.26, \\ \tau = 0.033$$

ここで、微分器の時定数 τ は $\tau = 0.1T_d = 0.033$ min としている。

PID設計問題は

$$(i) \quad |S(j\omega)| < \alpha(\omega)$$

$$(ii) \quad |T(j\omega)| < \beta(\omega)$$

を満たすパラメータの許容集合

$$k = \left(\bigcap_{\omega} K_S(\omega) \right) \cap \left(\bigcap_{\omega} K_T(\omega) \right)$$

を探索する。

そこで、まず積分ゲイン $K_i = 4.11$ に固定する。

$\beta(\omega)$ は δ_T, δ_L の -20% 変動時のモデル化誤差

$\Delta(s)$ の逆数である。

$$\beta(\omega) = \left| \frac{s+7.9s-0.8s^2}{2.2s+1.8s^2} \right| \quad (s = j\omega)$$

条件(ii)を満たす許容集合 $k_T(\omega)$ を求めた結果をFig. 1に示す。

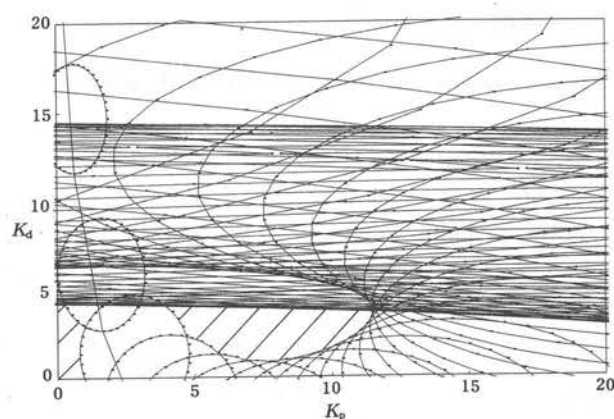


Fig.1 Permissible sets $K_T(\omega)$

つぎに、条件(i)を満たす許容集合 $K_S(\omega)$ であるが、 $\alpha(\omega)$ をつぎのように設定する。

〔例1-1〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.3}{s+3} \right| \quad (s = j\omega)$$

〔例1-2〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.2}{s+2} \right| \quad (s = j\omega)$$

〔例1-3〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.1}{s+1} \right| \quad (s = j\omega)$$

*平成7年度機械工学科卒業生（現長岡技科大）

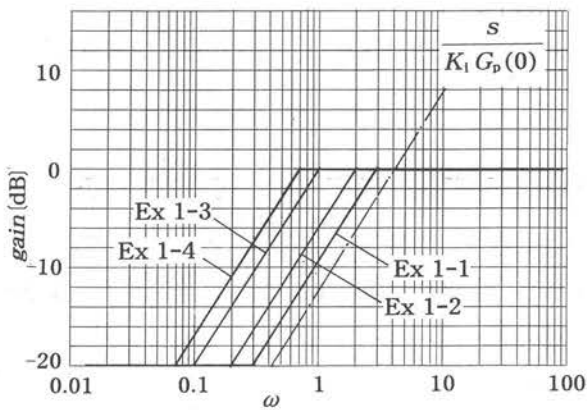
[例 1-4]

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.07}{s+0.7} \right| \quad (s = j\omega)$$

ここに, P_s は正定数で (i) を調整するパラメータである。 $P_s = 1$ の場合には $\alpha(\omega)$ の Bode 線図を示したのが Fig. 2 である。ここで, 低周波数域では,

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \frac{s}{K_i G_p(0)} = \frac{s}{4.11}$$

で近似した直線であり, この直線に近接するほど条件は厳しくなり, P_s が大きくなる。 P_s を小さくすると, $K_s(\omega)$ が縮小し, 最終的にパラメータの許容集合 K は空集合となる。


 Fig. 2 Gain diagrams of $s/K_i G_p(0)$ and $\alpha(\omega)$

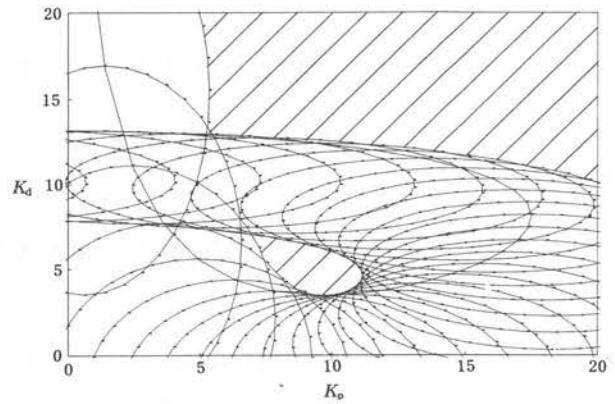
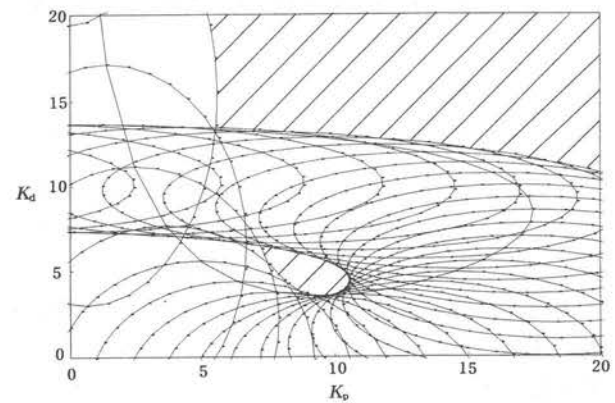
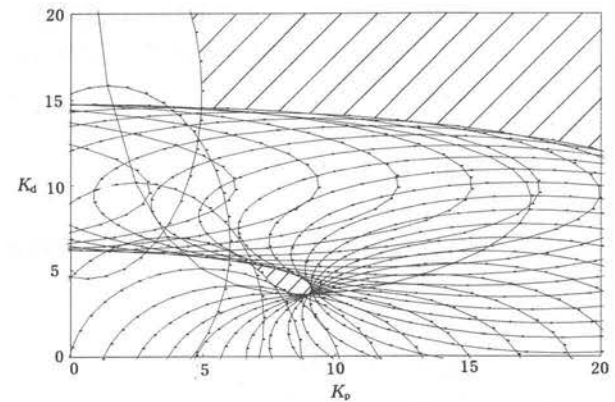
条件 (i) を満たす $K_s(\omega)$ を示したものが Fig. 3 ~ 6 である。条件 (i) (ii) を満たすパラメータをまとめたのが Table 1 である。 $\alpha(\omega)$ を厳しく設定すると, P_s が大きくなり, K_p も大きくなるが K_d には変化がみられない。

[例 1-1] ~ [例 1-4] に対して目標値応答と外乱応答を示したのが Fig. 7 である。この場合の応答は 2 DOF PID 制御系であるから, 調整則³⁾より $C_p = 0.48$, $C_d = 0.82$ に選定した。

これより $\alpha(\omega)$ を厳しく設定したときの目標値応答はオーバーシュートも小さく, 外乱応答はよくなる。

Table 1 Values of PID parameters obtained by permissible sets

Example	P_s	K_p	K_d
1-1	5.1	9.8	3.6
1-2	3.75	9.5	3.63
1-3	2.45	8.5	3.65
1-4	2.15	8.0	3.7


 Fig. 3 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 1-1

 Fig. 4 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 1-2

 Fig. 5 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 1-3

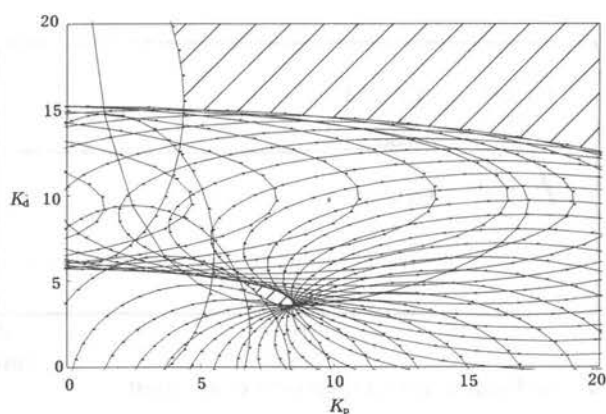


Fig.6 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 1-4

〔例2-1〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.2}{s+2.0} \right| \quad (s = j\omega)$$

〔例2-2〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.1}{s+1} \right| \quad (s = j\omega)$$

〔例2-3〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.07}{s+0.7} \right| \quad (s = j\omega)$$

条件(i)を満たす $K_s(\omega)$ を示したのが Fig. 9 ~ 11 である。条件(i) (ii)を満たすパラメーターをまとめたのが Table 2 である。

〔例2-1〕～〔例2-3〕に対して目標値応答と外乱応答を示したのが Fig. 12 である。結果については 2. 1 で述べたとおりである。

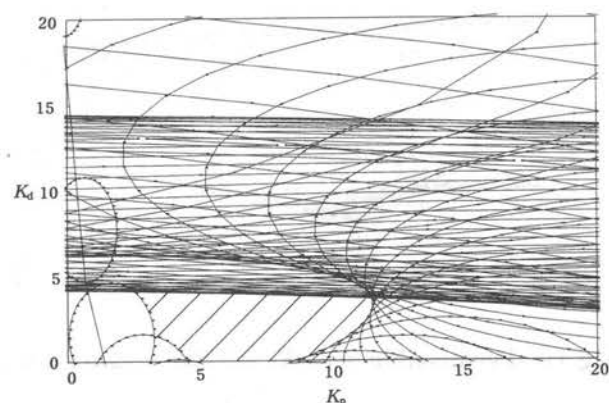


Fig.8 Permissible sets $K_r(\omega)$

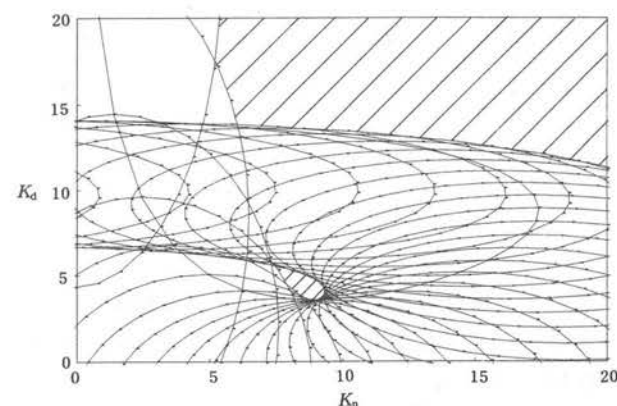
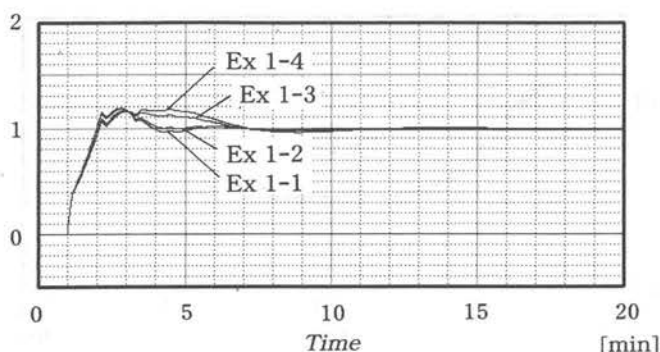
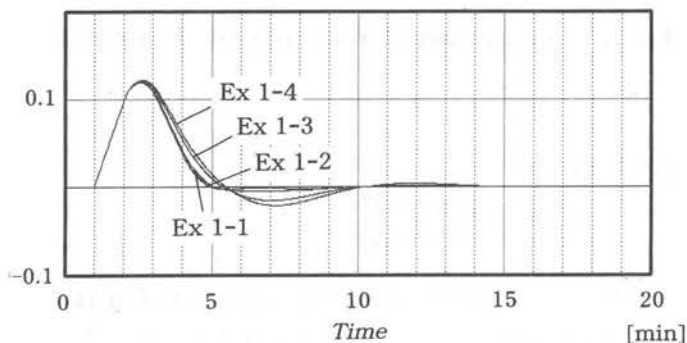


Fig.9 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 2-1



(a) Response to a step reference input



(b) Response to a step disturbance input

Fig.7 Comparison of responses for Example 1

$\alpha(\omega)$ を緩く設定すると、この逆である。2DOF PIDでは、ロバスト性はコントローラ $G_{C2}(s)$ にだけ影響するので、〔例1-1〕のように外乱応答に対してだけ $G_{C2}(s)$ を設定し、目標値応答に対しては $G_{C1}(s)$ で改善すればよいことになる。

2. 2 積分ゲイン $K_i = 3.0$, $\tau = 0.033$

条件(ii)を満たす許容集合 $K_r(\omega)$ を求めた結果を Fig. 8 に示す。

$\alpha(\omega)$ はつぎのように設定する。

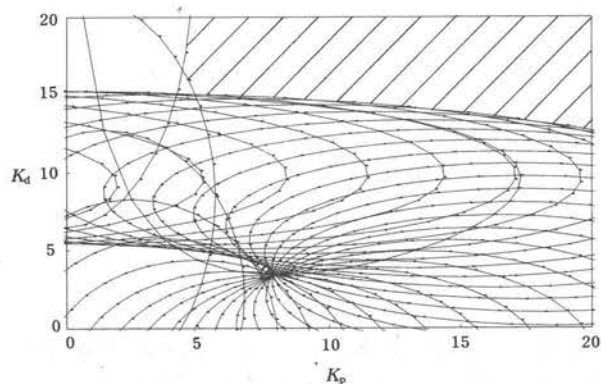


Fig.10 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 2-2

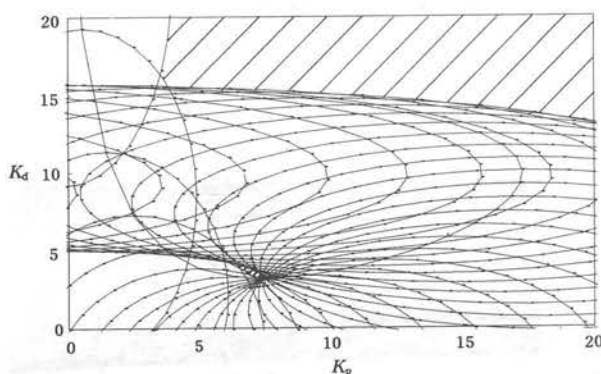


Fig.11 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 2-3

Table 2 Values of PID parameters obtained by permissible sets

Example	P_s	K_p	K_d
2-1	3.2	8.8	3.66
2-2	2.13	7.6	3.7
2-3	1.9	7.1	3.5

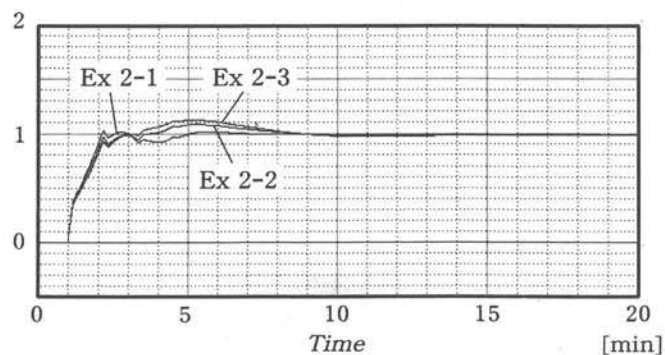
2.3 積分ゲイン $K_i = 2.0$, $\tau = 0.033$

条件(ii)を満たす許容集合 $K_T(\omega)$ を求めた結果を Fig.13 に示す。

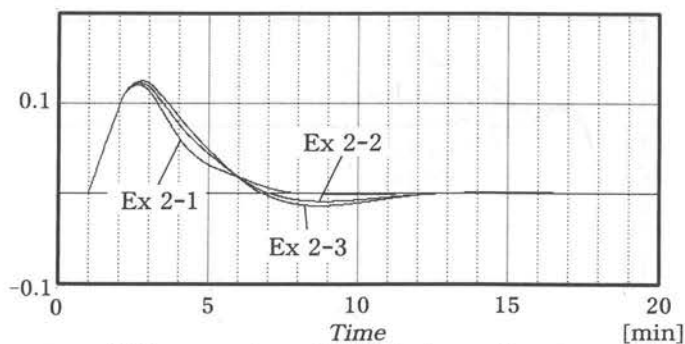
$\alpha(\omega)$ はつぎのように設定する。

〔例 3-1〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.1}{s+1} \right| \quad (s = j\omega)$$



(a) Response to a step reference input



(b) Response to a step disturbance input

Fig.12 Comparison of responses for Example 2

〔例 3-2〕

$$\alpha(\omega) = P_s \left| \frac{s+0.07}{s+0.7} \right| \quad (s = j\omega)$$

条件(i)を満たす $K_s(\omega)$ を示したのが Fig.14, 15である。条件(i)(ii)を満たすパラメーターをまとめたのが Table 3 である。

〔例 3-1〕, 〔例 3-2〕 に対して目標値応答と外乱応答を示したのが Fig.16 である。

Table 3 Values of PID parameters obtained by permissible sets

Example	P_s	K_p	K_d
3-1	1.97	6.9	3.15
3-2	1.75	6.3	3.0

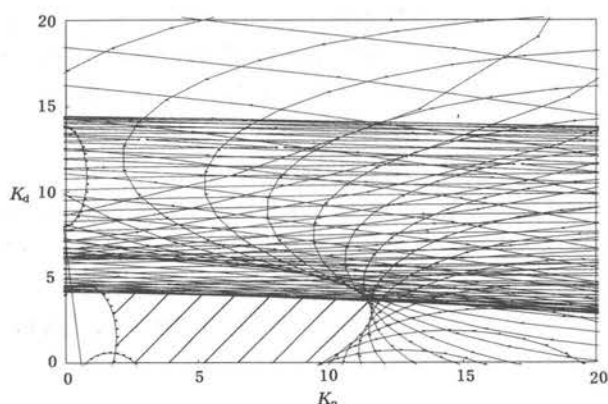


Fig.13 Permissible sets $K_r(\omega)$

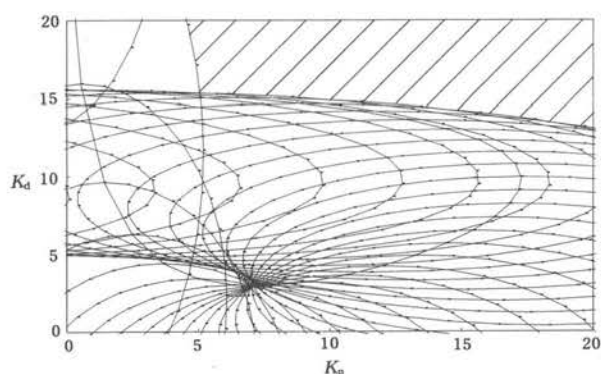


Fig.14 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 3-1

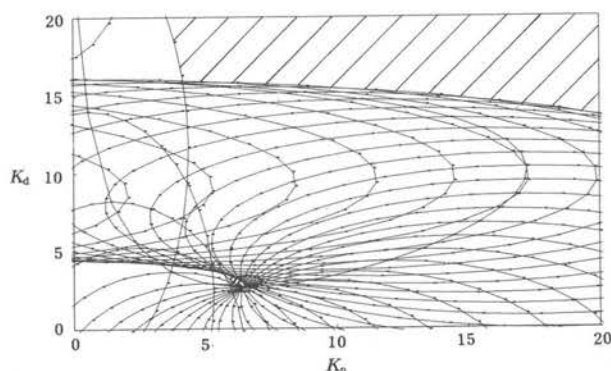


Fig.15 Permissible sets $K_s(\omega)$ for Example 3-2

2. 4 設計上の留意点

Fig.17に $|T(j\omega)|$ と $|S(j\omega)|$ のBode線図を示す。

(1) 高周波数域では

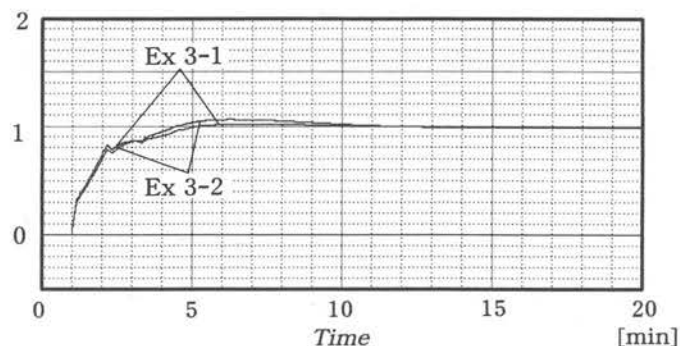
$$|T(j\omega)| \approx |G_{C2}(j\omega)G_P(j\omega)|$$

である。 $\beta(\omega)$ より $T(j\omega)$ の限界が決まるので $|G_{C2}(j\omega)G_P(j\omega)|$ を決める。

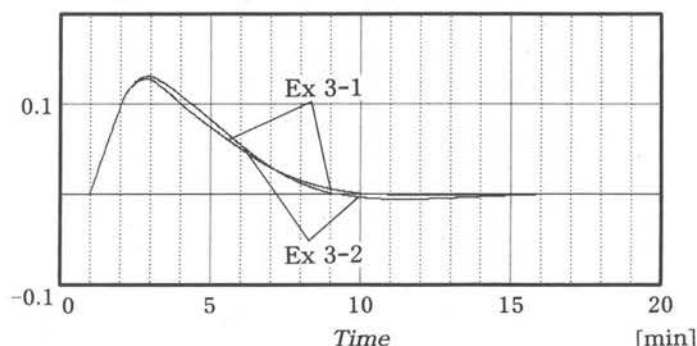
(2) 低周波数域では

$$|S(j\omega)| \approx \frac{1}{|G_{C2}(j\omega)G_P(j\omega)|}$$

である。 $|S(j\omega)|$ と $|T(j\omega)|$ の折点周波数はほぼ同じということと、 $|G_{C2}(j\omega)G_P(j\omega)|$ を $0[dB]$ ゲインを挟んで折り返した直線が $|S(j\omega)|$ となる。



(a) Response to a step reference input



(b) Response to a step disturbance input

Fig.16 Comparison of responses for Example 3

$$\lim_{s \rightarrow 0} |S(s)| \approx \left| \frac{s}{K_i G_p(0)} \right|$$

であるから、積分ゲイン K_i を設定することができる。

(3) このとき、積分ゲイン K_i は $\beta(\omega)$ が 0 dB を切る点より低周波側に設定することが大切である。

2.1～2.3 までの数値計算例より、積分ゲイン K_i を $\beta(\omega)$ が 0 dB を切る点に近接して設定すると、目標値応答についてはオーバーシュートが大きくなるが、外乱応答はよくなる。並に、 $\beta(\omega)$ が 0 dB を切る点より離して設定すると、オーバーシュートは小さくなるが、外乱応答は悪くなる。

本研究では、2 DOF PID 制御系でコントローラ $G_{C2}(s)$ を問題にしているので、 K_i を $\beta(\omega)$ が 0 dB を切る点に近接して設定することが望まれる。目標値応答に対するオーバーシュートはフィードフォワードループのコントローラ $G_{C1}(s)$ の設計で回避すればよい。

(4) 積分ゲイン K_i が設定されたとして $\alpha(\omega)$ を設定する。 $\alpha(\omega)$ を直線 $|s/K_i G_p(0)|$ に近接して設定すると、目標値応答についてはオーバーシュートにさほど変化はなく、外乱応答はよくなる。(3) で述べたと同様に、外乱応答がよくなるように $\alpha(\omega)$ を近接して設定するべきである。

(5) $\alpha(\omega)$ の最大値 P_S が大きいと、共振ピークを許し、オーバーシュートが大きくなるので、最大値

P_S は 1.3～2.0 程度が望ましいと文献⁷⁾にあった。これも 1 DOF PID コントローラの場合にそうであって、2 DOF PID コントローラでは 2.0 以下という制約にごだわらなくてもよい。

3. おわりに

プラントの周波数応答 $G_p(j\omega)$ から、ただちに感度関数 $S(j\omega)$ と相補感度関数 $T(j\omega)$ を指定値以下にする最適な PID ゲインを決定する方法を提案した。そして 1 次おくれ+むだ時間系で表わされたプラントに対して、設計手順を具体的に示した。

本研究の成果をもとに、プロセス制御系設計用 CAD ソフトとして完成させ、実用化していくつもりである。

(受理年月日 1996 年 9 月 30 日)

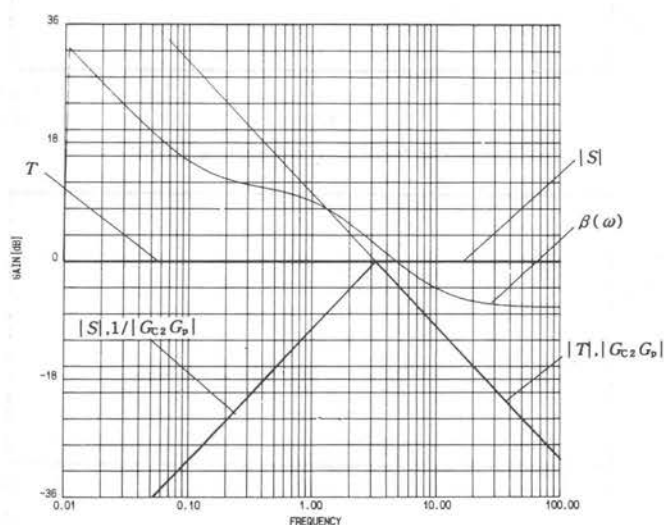


Fig.17 Gain diagram $T(j\omega)$ and $S(j\omega)$