プロセス制御系設計用ＣＡＤソフト（その８）
―ロバスト性を考慮したＰＩＤコントローラの設計―

黒須　茂，金原昭臣，笠原雅人，荒木寿昭*

CAD Software for Designing Process Control System
―A Design Method of PID Controller in Consideration of Robustness―

Shigeru KUROSU. Akiomi KIMBARA, Masato KASAHARA, Hisaaki ARAKI*

１．はじめに

ＰＩＤコントローラは構造が簡単で調整が比較的に容易なことから，空調システムなどの制御には現在も広く用いられ，技術的な蓄積も多い。筆者らは，すでにプラントを一次おくれ＋むだ時間系などで近似し，目標値応答や外乱応答などの特性を最適にする種々の調整法を提案し，「目標値追従特性」と「外乱抑制特性」の双方を同時に最適化するには２自由度コントローラの必要性を指摘してきた[1),2)]。

さらに，空調システムなどでは多変数，干渉，分布定数，非線形性といった複雑さが災いしてプロセスの数字モデルを厳密に知ることも困難である。また，モデルが得られたとしても確定したモデルとはいえず，モデリング実験を実施するたびに変動しているのが常であった。近年，プロセスのモデルと実際の特性との食い違いがあっても，制御系の安定性が保持されるロバスト性が実用化の域に達してきた。

本研究は，このような状況に鑑みて，従来のＰＩＤコントローラにロバスト性を考慮し，プラントに適合したＰＩＤパラメータを自動的に算出し設定するためのソフトパッケージを構築することを目的としている。

２．フィードバック系に要求される制御性能

２．１　２自由度コントローラ

一般に，ＰＩＤコントローラを用いた制御系の基本機能としては，

（ａ）外乱抑制特性

（ｂ）目標値追従特性

があり，（ａ）は外乱が変化したときに外乱の影響をいかに最適に抑制するかの特性であり，（ｂ）は目標値を変化させたときに制御量が目標値にいかに最適に追従するかを示す特性である。

Fig. 1に示すような従来の１自由度ＰＩＤコントローラでは，外乱変化の影響を抑制するようにＰＩＤパラメータを調整すると，目標値追従特性は振動的となり，逆に，目標値変化に対して追従するようにＰＩＤパラメータを調整すると，外乱抑制特性が非常に甘くなってしまう[2)]。

従来のＰＩＤ制御方式では，ＰＩＤパラメータを１組しか調整できない１自由度ＰＩＤ（以下１ＤＯＦ ＰＩＤとよぶ）であるため，どうしても「外乱抑制特

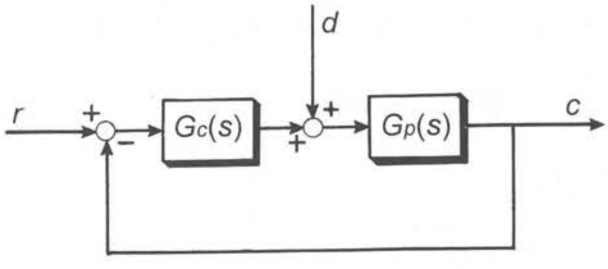

Fig.1　One degree of freedom PID controller

＊平成７年度機械工学科卒業生（現長岡技科大）

性」と「目標値追従特性」の双方を同時に最適化できる2自由度ＰＩＤ（2ＤＯＦ　ＰＩＤとよぶ）の実用化が必要不可欠となった。

Fig. 2に2ＤＯＦ　ＰＩＤ制御系の一般式型を示す。目標値rと制御量cのそれぞれに対してコントローラ$G_{c1}(s)$，$G_{c2}(s)$を設置して，外乱抑制特性を改善するように$G_{c2}(s)$を調整した後，$G_{c1}(s)$の調整により，

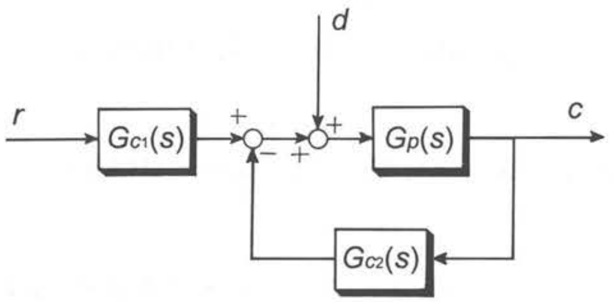

Fig.2　Two degrees of freedom PID controller

一定の範囲内で目標値追従特性の改善を図ることができる。

筆者らは，すでに1入力1出力の2ＤＯＦ　ＰＩＤ制御系を取り上げ，プラントを一般的な伝達関数（1次おくれ＋むだ時間系）で与え，プラントのパラメータ（時定数，むだ時間），コントローラのサンプリング周期に対するＰＩＤパラメータを最適化手法ならびに部分的モデルマッチング法により求める調整法を提案した[3]。本論文では，プラントの特性変動に対するロバスト性について考察し，ロバスト性を考慮に入れた2ＤＯＦ　ＰＩＤコントローラの設計法を確立する。

2．2　要求される制御性能[4),5)]

いままで制御系の設計においてステップ状の目標値および外乱の変化に対する応答だけに注目して，コントローラの調整を考えてきた[1)]。しかし，制御系の性能には，これら以外につぎの項目が着目されるようになってきた。

（a）　目標値追従特性

Fig. 2における目標値rから制御量cへの閉ループ伝達関数はつぎのようになる。

$$H_{cr}=\frac{G_{c1}G_p}{1+G_{c2}G_p} \qquad (1)$$

H_{cr}をなるべく広い周波数帯域で1に近い値にすればよい。これは，G_{c1}，G_{c2}の両方によって調整できる。

（b）　外乱抑制特性

Fig. 2における外乱dから制御量cへの閉ループ伝達関数

$$H_{cd}=\frac{G_p}{1+G_{c2}G_p} \qquad (2)$$

と閉ループ伝達関数G_pとの相対比（**感度関数**(sensitivity function) Sという）

$$S\triangleq\frac{H_{cd}}{G_p}=\frac{1}{1+G_{c2}G_p} \qquad (3)$$

をなるべく広い周波数帯域で小さくすればよい。

（c）　プラントの特性変動に対する感度，ロバスト安定性

プラントの伝達関数G_pの変動分$\varDelta G_p$，H_{cr}の変動分$\varDelta H_{cr}$とした時，感度の比Sは

$$S=\frac{\varDelta H_{cr}/H_{cr}}{\varDelta G_p/G_p}=\frac{1}{1+G_{c2}G_p} \qquad (4)$$

となり，Sを小さくすればプラントの変動に対して強い。SはG_{c2}にのみ依存することに注意する。

証明：$\varDelta H_{cr}$は（1）式より

$$\varDelta H_{cr}=\frac{G_{c1}(G_p+\varDelta G_p)}{1+G_{c2}(G_p+\varDelta G_p)}-\frac{G_{c1}G_p}{1+G_{c2}G_p}$$

$$=\frac{G_{c1}\varDelta G_p}{\{1+G_{c2}(G_p+\varDelta G_p)\}(1+G_{c2}G_p)}$$

となるから，

$$\frac{\varDelta H_{cr}}{H_{cr}}=\frac{1}{(1+G_{c2}G_p)}\frac{\varDelta G_p}{G_p}$$

がえられる。よって，感度関数Sは（4）式となる。

モデル化誤差$\varDelta(s)$を

$$G_{p'}(s)=(1+\varDelta(s))G_p(s) \qquad (5)$$

と定義する。**相補感度関数**(complementary sensitivity function) Tを

$$T=\frac{G_{c2}G_p}{1+G_{c2}G_p} \qquad (6)$$

で定義すると，

$$T(j\omega)<\left|\frac{1}{\varDelta(j\omega)}\right| \qquad (7)$$

がなりたつとき，**ロバスト安定**(robust stability)であるという。

証明：開ループ系の周波数伝達関数

$$G_0(j\omega)=G_{c2}(j\omega)G_p(j\omega) \qquad (8)$$

はナイキスト条件を満たすように設計する。したがって，Fig. 3に示すようにモデル化誤差の項$G_0(j\omega)\varDelta(j\omega)$が点−1と$G_0(j\omega)$の距離より小さければ，$G_0'(j\omega)$もやはりナイキスト条件を満たすことになる。

すなわち，

$$|G_0(j\omega)\Delta(j\omega)| < |1+G_0(j\omega)| \tag{9}$$

がなりたつとき，プラントの変動後の安定性が保証さ

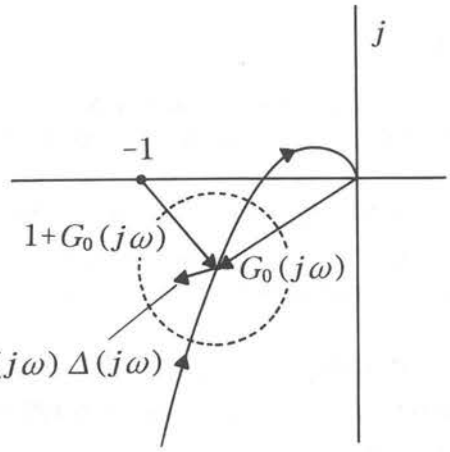

Fig. 3 Modeling error based on vector locus

れる。

$$\left|\frac{G_0(j\omega)}{1+G_0(j\omega)}\right| < \left|\frac{1}{\Delta(j\omega)}\right| \tag{10}$$

を着き通せば，(７)式となる。

（ｄ） ロバスト性

プラント特性が変動するとき，1DOF PID 制御系と２ＤＯＦ ＰＩＤ制御系との感度関数 S_1，S_2 との比（**相対感度**という）を δ とすると，

$$\delta = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1+G_cG_p}{1+G_{c2}G_p} \tag{11}$$

ここに，G_c ：1DOF PIDコントローラの伝達関数

G_{c2} ：2DOF PIDコントローラの伝達関数

で与えられ，$\delta<1$ ならば２ＤＯＦ ＰＩＤ制御系の方がロバストであるということになる。

さて，フィードバック特性は４項目からなるが，(ａ)目標値追従特性[6]と(ｂ)外乱抑制特性は感度関数 $S(j\omega)$ を小さくすることによって，(ｃ)ロバスト安定性は相補感度関数 $T(j\omega)$ を小さくすることによって改善できる。ところが，$S(j\omega)$ と $T(j\omega)$ の定義式(３)式と(６)式からただちに導けるように

$$S(j\omega)+T(j\omega)=1 \tag{12}$$

がなりたつ。これは $S(j\omega)$ と $T(j\omega)$ の両方を同時に小さくすることはできないことを意味している。したがって，フィードバック特性の調整においては，ある周波数域で $S(j\omega)$ を，他の周波数域で $T(j\omega)$ をそれぞれ小さくするといった妥協（trade off）を行わなければならない。

３．ロバストＰＩＤコントローラの設計

３．１ 設計仕様

プラントは線形時不変な１入力１出力系とし，その伝達関数を $G_p(s)$ で表す。$G_p(s)$ は１次おくれ＋むだ時間系

$$G_p(s) = \frac{e^{-L_ps}}{1+T_ps} \tag{13}$$

を考える。ＰＩＤコントローラ $G_{c2}(s)$ は近似微分を含む

$$G_{c2}(s) = K_p + K_i\frac{1}{s} + K_d\frac{s}{1+\tau s} \tag{14}$$

を考える。D動作は高周波数域でゲイン $|G_{c2}(j\omega)|$ が高くなるので不完全微分としている。

閉ループ系の感度関数 $S(s)$ と相補感度関数 $T(s)$ は，つぎのように与えられる。

$$S(s) = \frac{1}{1+G_{c2}(s)G_p(s)} \tag{15}$$

$$T(s) = \frac{G_{c2}(s)G_p(s)}{1+G_{c2}(s)G_p(s)} \tag{16}$$

よく知られているように，閉ループ系は安定であるだけでなく，感度関数と相補感度関数のゲイン特性がある値以下であることが望ましい[注]。

そこでつぎの設計問題を考える。

２ディスク型混合感度ＰＩＤ設計問題[7]

以下の条件を満たす PID コントローラが存在するかを判別し，PID コントローラを求めよ。

（ｉ） $|S(j\omega)| < \alpha(\omega),\ \omega\epsilon R$ (17)

（ii） $|T(j\omega)| < \beta(\omega),\ \omega\epsilon R$ (18)

（iii） 閉ループ系が安定である。

$\alpha(\omega)$，$\beta(\omega)$ はつぎのように定める。

(1) $\alpha(\omega)$ の決め方

コントローラに積分器があると，$S(s)$ は (15) 式より低周波数域では，

$$\lim_{s\to 0} S(s) = \frac{1}{(K_i/s)G_p(0)} = \frac{s}{K_iG_p(0)} \tag{19}$$

となり，$S(s)$ のゲインの形状が決まる。このため，$\alpha(\omega)$ が決まれば，少なくともそれを満たすように K_i を選ぶことが必要である。$\alpha(\omega)$ の最大値は1.3～2.0程度とする。これは M_p 値に密接に関連している。最大値を大きくすると，共振ピークを許すのでオーバー

注）ロバスト安定であるからといって，閉ループ系が安定であるとは限らないことを意味している。

シュートが大きくなる。

$T(s)$ と $S(s)$ の間には，(12) 式の関係があるので独立に選べない。$\beta(\omega)$ により $T(s)$ の限界が大雑把に決まるので，それから $S(s)$ の形状，すなわち $\alpha(\omega)$ も決まる。

$T(s)$ は (16) 式より高周波数域では，

$$\lim_{s\to\infty} T(s) = \lim_{s\to\infty} G_{c2}(s)G_p(s)$$
$$= \lim_{s\to\infty}\left(K_p+\frac{K_d}{\tau}\right)G_p(s) \qquad (20)$$

となり，$G_p(s)$ の分母分子の次数差のオーダで $T(s)$ のゲインが減衰する。

$S(s)$，$T(s)$ を例で示すと，Fig. 4 のようになる。$|S(j\omega)|$，$|T(j\omega)|$ の折点周波数はほぼ同程度である。

(2) $\beta(\omega)$ の決め方

$\beta(\omega)$ はモデル化誤差の大きさを $\Delta(\omega)$ とすると，その逆数によって与えられる。つまり，$G_p(s)$ において，T_p と L_p の変動分

$$\left.\begin{aligned} T_p' &= T_p(1+\delta_T) \\ L_p' &= L_p(1+\delta_L) \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

としたとき，(5) 式より

$$\Delta(s) = \frac{G_p'(s)}{G_p(s)}-1$$
$$= \frac{(T_ps+1)}{e^{-L_ps}}\left\{\frac{e^{-L_p(1+\delta_L)s}}{T_p(1+\delta_T)s+1}-\frac{e^{-L_ps}}{T_ps+1}\right\}$$
$$= \frac{(T_ps+1)e^{-L_p\delta_Ls}-\{T_p(1+\delta_T)s+1\}}{T_p(1+\delta_T)s+1} \qquad (22)$$

ここに，Pade′ の近似

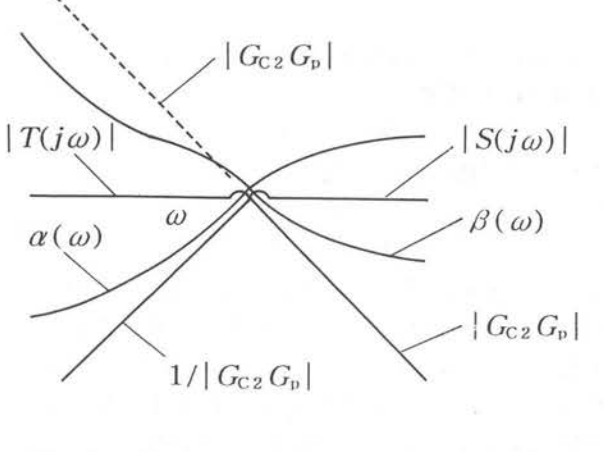

Fig. 4 Characteristics designed by PID controller

$$e^{-L_p\delta_Ls} \fallingdotseq \frac{1-0.5L_p\delta_Ls}{1+0.5L_p\delta_Ls} \qquad (23)$$

を用いると，

$$\Delta(s) =$$
$$-\frac{(T_p\delta_T+L_p\delta_L)s+0.5L_pT_p\delta_L(2+\delta_L)s^2}{1+\{T_p(1+\delta_T)+0.5L_p\delta_L\}s+0.5L_pT_p\delta_L(1+\delta_T)s^2} \qquad (24)$$

となる。変動分 δ_T，δ_L を 5 %，10%，20%としたとき Bode 線図において$|\Delta(j\omega)|$が最大となるのは，δ_T，δ_L をともに減少させた場合である。

さて，K_i を固定し，2つのパラメータ K_p，K_d について周波数 ω ごとに (17)，(18) 式の条件を満たすパラメータの集合

$$K_S(\omega) = \{[K_p, K_d]\,|\,|S(j\omega)| < \alpha(\omega)\} \qquad (25)$$
$$K_T(\omega) = \{[K_p, K_d]\,|\,|T(j\omega)| < \beta(\omega)\} \qquad (26)$$

を定義する。設計問題の解はこれらをすべての周波数 $\omega \varepsilon R$ で満たす場合，すなわち

$$K = (\bigcap_\omega K_S(\omega)\cap(\bigcap_\omega K_T(\omega)) \qquad (27)$$

が空集合でないときで，閉ループ系が安定であればその要素が解である。条件 (17)，(18) 式を強めれば単調に K が縮小し，最終的には空集合となるので，最適値は消滅する直前の要素となる。

3．2 パラメータの許容集合に K_S，K_Tの計算

プラントの周波数応答が

$$G_p(j\omega) = a(\omega)+b(\omega)j \qquad (28)$$
$$a(\omega),\ b(\omega)\epsilon R$$

で与えられたとする。そのとき，$S(j\omega)$ の集合について，つぎの定理を得る。

定理1 $[K_p, K_d]$ 平面において，集合 $K_s(\omega)$ は $0 \le \theta \le 2\pi$ に対し

$$K_d = \frac{1+(\omega\tau)^2}{\omega}\left\{\frac{1}{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{a^2+b^2}+\frac{K_i}{\omega}\right\} \qquad (29)$$

$$K_p = \frac{1}{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta-\frac{a}{a^2+b^2}\ \frac{K_d\omega^2\tau}{1+(\omega\tau)^2} \qquad (30)$$

で描かれる楕円の外部である。

証明 (14) 式より

$$G_{c2}(j\omega) = \tilde{K}_p+j\tilde{K}_d \qquad (31)$$

ここに，

$$\tilde{K}_p = K_p + \frac{K_d\omega^2\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{32}$$

$$\tilde{K}_a = \frac{K_d\omega}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{K_i}{\omega} \tag{33}$$

とおくと，(15) 式より

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+G_{c2}(j\omega)G_p(j\omega)}$$

$$= \frac{1}{1+(\tilde{K}_p+\tilde{K}_d j)(a+bj)}$$

$$= \frac{1}{1+(\tilde{K}_p a-\tilde{K}_d b)+(\tilde{K}_p b+K_d a)j} \tag{34}$$

よって，

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{\{(1+\tilde{K}_p a-\tilde{K}_d b)^2+(\tilde{K}_p b+K_d a)^2\}^{1/2}} < \alpha$$

となり，２乗して逆数をとると

$$(1+\tilde{K}_p a-\tilde{K}_d b)^2+(\tilde{K}_p b+\tilde{K}_d a)^2 > \frac{1}{\alpha^2}$$

となる。展開してまとめると，

$$\left(\tilde{K}_p+\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\tilde{K}_d-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2 > \frac{1}{\alpha^2(a^2+b^2)} \tag{35}$$

であるので，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ を考慮すると，

$$\alpha\sqrt{a^2+b^2}\left(\tilde{K}_p+\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \sin\theta \tag{36}$$

$$\alpha\sqrt{a^2+b^2}\left(\tilde{K}_d-\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \cos\theta \tag{37}$$

とおくと，(37) 式より

$$K_d = \frac{1+(\omega\tau)^2}{\omega}\left\{\frac{1}{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{a^2+b^2}+\frac{K_i}{\omega}\right\} \tag{38}$$

(36) 式より

$$K_p = \frac{1}{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta - \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{K_d\omega^2\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{39}$$

を得る。$\tilde{K}_p$，$\tilde{K}_d$ に関しては円であるが，K_p，K_d に逆変換すれば楕円となり，その楕円の外部となる。

（証明終り）

$T(j\omega)$ の集合については，つぎの定理を得る。

定理２〔K_p，K_d〕平面において，集合 $K_T(\omega)$ は

(a) $0<\beta<1$ のとき，$0\leq\theta\leq 2\pi$ に対し

$$K_d = \frac{1+(\omega\tau)^2}{\omega}\left\{p\cos\theta+\frac{K_i}{\omega}-\frac{b}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}\right\} \tag{40}$$

$$K_p = p\sin\theta+\frac{a}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2-1}\right)}-\frac{K_d\omega^2\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{41}$$

ここに，

$$p = \frac{\beta}{\sqrt{a^2+b^2}(1-\beta^2)}$$

で描かれる楕円の内部である。

(b) $\beta>1$ のとき，(40)，(41) 式で描かれるる楕円の外部である。

(c) $\beta=1$ のとき，つぎの半平面の領域である。

$$aK_p+\frac{K_d\omega}{1+(\omega\tau)^2}(a\omega\tau-b)+\frac{bK_i}{\omega}+\frac{1}{2} > 0 \tag{42}$$

証明　(16) 式に (28)，(31) 式を代入すると，

$$T(j\omega) = \frac{(a+bj)(\tilde{K}_p+\tilde{K}_d j)}{1+(a+bj)(\tilde{K}_p+\tilde{K}_d j)}$$

$$= \frac{Z+Qj}{X+Yj}$$

ここに，$Z = a\tilde{K}_p-b\tilde{K}_d$

$Q = b\tilde{K}_p+a\tilde{K}_d$

$X = 1+a\tilde{K}_p-b\tilde{K}_d$

$Y = b\tilde{K}_p+a\tilde{K}_d$

であり，$T(j\omega)$ の分母を有理化すると，

$$T(j\omega) = \frac{1}{X^2+Y^2}\left\{(ZX+QY)+(XQ-YZ)j\right\} \tag{43}$$

となり，$|T(j\omega)|$ は

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{(ZX+QY)^2+(XQ-YZ)^2}{(X^2+Y^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{Z^2+Q^2}{X^2+Y^2}} \tag{44}$$

となる。(18) 式の条件を考慮すると，

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{(a\tilde{K}_p-b\tilde{K}_d)^2+(b\tilde{K}_p+aK_d)^2}{(1+a\tilde{K}_p-b\tilde{K}_d)^2+(b\tilde{K}_p+a\tilde{K}_d)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(\tilde{K}_p+\tilde{K}_d)}{(1+2a\tilde{K}_p-2b\tilde{K}_d)+(a^2+b^2)(\tilde{K}_p^2+\tilde{K}_d^2)}} < \beta \tag{45}$$

となる。２乗して変形すると，

$$(a^2+b^2)(\tilde{K}_p^2+\tilde{K}_d^2) <$$
$$\beta^2\{(1+2a\tilde{K}_p-2b\tilde{K}_d)+(a^2+b^2)(\tilde{K}_p^2+\tilde{K}_d^2)\} \quad (46)$$

となり，変形すると，

$$(a^2+b^2)(\tilde{K}_p^2+\tilde{K}_d^2)(1-\beta^2) < \beta^2(1+2a\tilde{K}_p-2b\tilde{K}_d) \quad (47)$$

となるから，β^2 で割り，$(1-\beta^2)$ (>0 とする) を両辺にかけると，

$$(\tilde{K}_p^2+\tilde{K}_d^2)\left\{\frac{(a^2+b^2)(1-\beta^2)^2}{\beta^2}\right\} < (1+2a\tilde{K}_p-2b\tilde{K}_d)(1-\beta^2) \quad (48)$$

さらに，変形すると，

$$(\tilde{K}_p^2+\tilde{K}_d^2)\left\{\frac{(a^2+b^2)(1-\beta^2)^2}{\beta^2}\right\} +(2b\tilde{K}_d-2a\tilde{K}_p)(1-\beta^2)+\beta^2 < 1 \quad (49)$$

となり，展開すると，

$$\frac{(a^2+b^2)(1-\beta^2)^2}{\beta^2}\tilde{K}_p^2-2a\tilde{K}_p(1-\beta^2)+\frac{a^2\beta^2}{a^2+b^2} +\frac{(a^2+b^2)(1-\beta^2)^2}{\beta^2}\tilde{K}_d^2+2b\tilde{K}_d(1-\beta^2)+\frac{b^2\beta^2}{a^2+b^2} < 1 \quad (50)$$

となる。両辺を $(a^2+b^2)(1-\beta^2)$ で割ると

$$\frac{(1-\beta^2)}{\beta^2}\tilde{K}_p^2-\frac{2a\tilde{K}_p}{(a^2+b^2)}+\frac{a^2\beta^2}{(a^2+b^2)^2(1-\beta^2)} +\frac{(1-\beta^2)}{\beta^2}\tilde{K}_d^2+\frac{2b\tilde{K}_d}{(a^2+b^2)}+\frac{b^2\beta^2}{(a^2+b^2)^2(1-\beta^2)} < \frac{1}{(a^2+b^2)(1-\beta^2)} \quad (51)$$

となり，さらに両辺を $(1-\beta^2)/\beta^2$ で割ると，

$$\tilde{K}_p^2-\frac{2a\tilde{K}_p}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}+\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)^2} +\tilde{K}_d^2+\frac{2b\tilde{K}_d}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)^2} < \frac{\beta^2}{(a^2+b^2)(1-\beta^2)^2} \quad (52)$$

となる。よって，両辺に $(1-\beta^2)/\beta^2$ をかけて，まとめると，

$$\left[\left\{\tilde{K}_p-\frac{a}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}\right\}^2 +\left\{\tilde{K}_d+\frac{b}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}\right\}^2\right]\left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right) < \frac{1}{(a^2+b^2)(1-\beta^2)} \quad (53)$$

となる。$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ を考慮すると，(53) 式より

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}(1-\beta^2)}{\beta}\left\{\tilde{K}_p-\frac{a}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}\right\}=\sin\theta$$

とおけば，

$$\tilde{K}_p = p\,\sin\theta+\frac{a}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)} \quad (55)$$

ここに，

$$p=\frac{\beta}{\sqrt{a^2+b^2}(1-\beta^2)}$$

よって，(41) 式

$$K_p = p\,\sin\theta+\frac{1}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}-\frac{K_d\omega^2\tau}{1+(\omega\tau)^2} \quad (41)$$

が得られる。$\tilde{K}_d$ は同様にして，(53) 式より

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}(1-\beta^2)}{\beta}\left\{\tilde{K}_d+\frac{b}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}\right\}=\cos\theta \quad (56)$$

とおくと，

$$\tilde{K}_d = p\,\cos\theta-\frac{b}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}$$

よって，(40) 式

$$K_d=\frac{1+(\omega\tau)^2}{\omega}\left\{p\,\cos\theta-\frac{b}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)}+\frac{K_i}{\omega}\right\} \quad (40)$$

が得られる。明らかに，$\beta<1$ のときは楕円の内部であり，$\beta>1$ のときは楕円の外部である。

$\beta=1$ のときは，(47) 式に $\beta=1$ を代入すると

$$1+2a\tilde{K}_p-2b\tilde{K}_d>0$$

(32), (33) 式を代入すると,

$$1+2a\left\{K_p+\frac{\omega^2\tau K_d}{1+(\omega\tau)^2}\right\}-2b\left\{\frac{K_d\omega}{1+(\omega\tau)^2}-\frac{K_i}{\omega}\right\}>0$$

となり, 変形すると (42) 式

$$aK_p+\frac{K_d\omega}{1+(\omega\tau)^2}(a\omega\tau-b)+\frac{b}{\omega}K_i+\frac{1}{2}>0 \quad (42)$$

が得られ, $\beta=1$ のときは半平面の領域である。

(証明終り)

文献[7]では, ロバスト安定条件を満たしていても, 閉ループ系が安定である保証はないので, ナイキストの安定条件に基づいて〔K_p, K_d〕平面における許容集合 $K_N(\omega)$ を求めている。しかしながら, 本研究においては, プラントそのものが安定であり, 種々の調整則によって調整された制御系を問題としているので, 閉ループ系が不安定になることはあり得ない。したがって, 許容集合 $K_S(\omega)$, $K_T(\omega)$ だけを考えることにする。

4. 種々の調整法におけるロバスト安定性の比較

(13) 式に示すプラントの伝達関数において

$$T_p=10\,\mathrm{min},\ \ L_p=1\,\mathrm{min}$$

とする。(14) 式に示すＰＩＤコントローラの伝達関数において, $\tau=0.1\,T_d$ とする。$\beta(s)$ は (24) 式に示す δ_T, δ_L の -20% 変動時のモデル化誤差 $\Delta(s)$ の逆数である。

$$\beta(\omega)=\left|\frac{1+7.9s-0.8s^2}{2.2s+1.8s^2}\right| \quad (s=j\omega)$$

種々の調整法によるパラメータは Table 1 に示すとおりである。それぞれ積分ゲイン K_i が異なるので許容集合 $K_T(\omega)$ は変わってくる。許容集合 $K_T(\omega)$ に対して調整法によって求めた〔K_p, K_d〕を示したのが Fig. 5～Fig. 7 である。図中 $\beta(\omega)>1$ の周波数では楕円の外部が, $\beta(\omega)<1$ の周波数では内部が集合 $K_T(\omega)$ であるので, これらの共通部分 $\cap K_T(\omega)$ を斜線で示す。図中の黒丸が PID のパラメータの調整値を示す。

Table1 Tuned PID Parameters

Example		K_p	K_i	K_d	τ
1	ultimate senstivity method	9.16	4.36	4.76	0.052
2	partial model matching method	9.87	4.11	3.26	0.033
3	optimization method	11.24	7.49	7.19	0.064

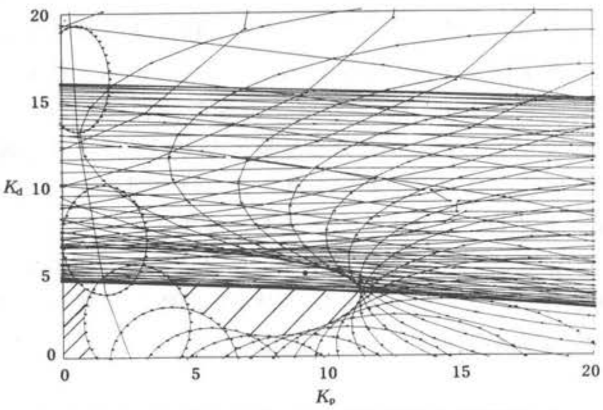

Fig. 5 Permissible set $K_T(\omega)$ for Example 1

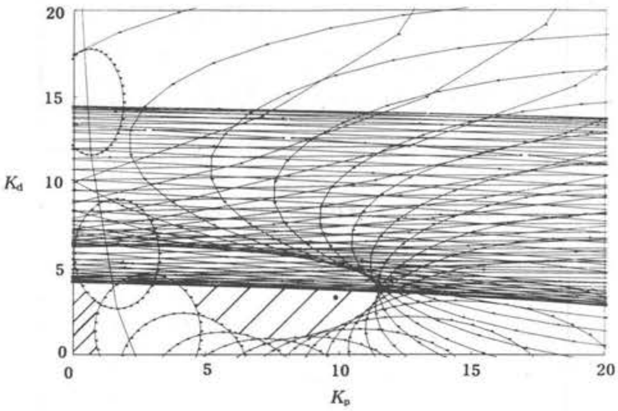

Fig. 6 Permissible set $K_T(\omega)$ for Example 2

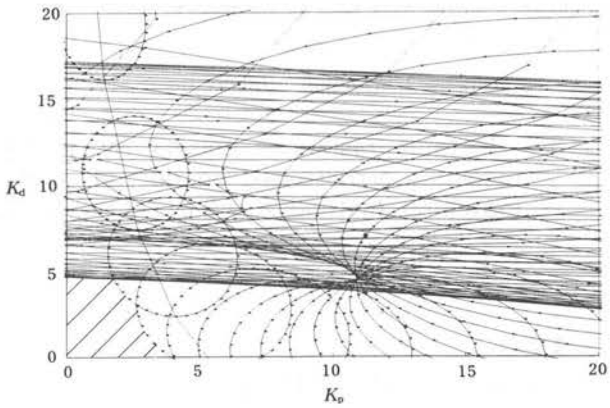

Fig. 7 Permissible set $K_T(\omega)$ for Example 3

これにより，限界感度法，最適化手法ではロバスト安定を満たさないが，部分的モデルマッチング法ではロバスト安定を満たしている。ここでロバスト性を考慮に入れたPIDコントローラの調整法には部分的モデルマッチング法が有力な候補となり得ることを示唆している。ロバスト安定を満たさなければ，そのパラメータに基いて修正する方法を提案する。

Fig. 8に部分的モデルマッチング法による調整値に調整したとき，δ_T，δ_Lを-59.4%変動時に顕われた不安定現象を示す。

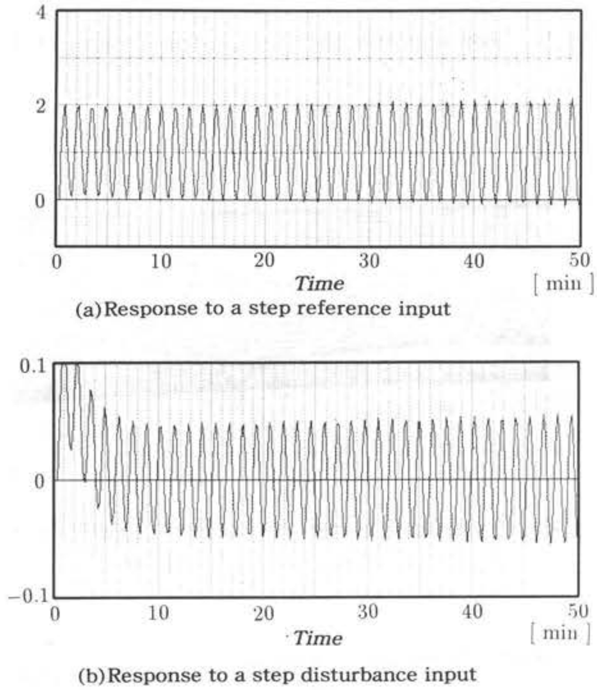

Fig. 8　Unstable responses caused by a big modeling error(based on partial model matching method(K_p=9.87, T_i=2.4, T_d=0.33))

参考文献

1) Kamimura, K.,T.Matsuba et al. : CAT (Computer Aided Tuning) Software for PID Controllers, ASHRAE Transactions, Vol.100-Part Ⅰ,180／190 (1994)

2) 広井和男編：制御システム技術の理論と応用，電気書院，32／34 (1992)

3) Kasahara,M.,T.Matsuba et al. : A Tuning Method of Two Degrees of Freedom PID Controller, ASHRAE Transactions, Vol.103-Part Ⅰ(to appear) (1997)

4) 須田信英：システム制御情報ライブラリー「PID制御」，朝倉書店，80／98 (1992)

5) 嘉納秀明ほか：動的システムの解析と制御，コロナ社，177／179 (1991)

6) 大須賀公一：機械システム入門シリーズ「制御工学」，共立出版KK，119／122 (1995)

7) 佐伯正美：2ディスク型混合感度問題の最適PID制御器の設計法，システム制御情報学会論文誌，7—12，520／527 (1994)

（受理年月日 1996年9月30日）