超伝導体球による散乱パターンと位相特性

大嶋　建次　　　栗林　仁

Scattering Pattern and Phase Variation from a Superconductive Sphere

Kenji OHSHIMA　　Masashi KURIBAYASHI

Scattering pattern and phase variation from a superconductive sphere (SCS) are investigated. It is similar to scattering pattern from dielectric sphere when the temperature of SCS is low than critical temperature. It is equivalent to scattering pattern from lossy conductive sphere when the temperature of SCS is vicinity of critical temperature. Phase variation further more depend on the temperature, that describe scattering pattern from SCS.

1．まえがき

超伝導体の複素導電率を考慮して得た等価複素誘電率を用いて，超伝導体球の散乱断面積を求めた検討例がすでに報告されている。[1]

本論文は上記の検討で示されている超伝導体球の散乱問題に対する解析手法，すなわち超伝導体球を誘電体球に等価であるとしたときの伝搬定数を考慮して散乱電界を導出する方法，を用いて超伝導体球の散乱パターンおよび位相特性の温度依存性を数値的に明らかにするものである。

まず超伝導体球の散乱パターンは，超伝導体球の温度が臨界温度よりかなり低い温度では、誘電体球のそれに類似したパターンを示し，温度が臨界温度に近づくと散乱パターンは損失の大きい導体球のそれに一致してくることを述べている。次に仰角に依存する散乱電界の位相特性を明らかにし，この位相特性が散乱パターンのサイドローブの発生要因であることを示すとともに、温度が臨界温度に近づくほど位相の回転が早くなることを述べている。

2．超伝導体球の散乱電界

超伝導体球の θ（仰角）および ϕ（方位角）の散乱電界 E_θ^S および E_ϕ^S は，誘電体球の散乱電界式における展開係数 b_n および c_n のパラメータである伝搬定数を，超伝導体の温度（ T/T_c，T：温度，T_c：臨界温度）に依存した伝搬定数 $k_s(T/T_c)$ に置換して次式で与えられる。[1][2][3][4]

$$E_\theta^s = \frac{jE_0}{k_0 r} e^{-jk_0 r} \cos\phi \sum_{n=1}^{\infty} j^n \left\{ b_n \sin\theta \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} - c_n \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right\} \tag{1}$$

$$E_\phi^s = \frac{jE_0}{k_0 r} e^{-jk_0 r} \sin\phi \sum_{n=1}^{\infty} j^n \left\{ b_n \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} - c_n \sin\theta \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right\} \tag{2}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = -\frac{j_n'(k_s a) j_n(k_0 a) - \sqrt{\varepsilon_{er}}\, j_n'(k_0 a) j_n(k_s a)}{j_n'(k_s a) h_n^{(2)}(k_0 a) - \sqrt{\varepsilon_{er}}\, h_n^{(2)'}(k_0 a) j_n(k_s a)} \tag{3}$$

$$\frac{c_n}{a_n} = -\frac{j_n(k_s a) j_n'(k_0 a) - \sqrt{\varepsilon_{er}}\, j_n(k_0 a) j_n'(k_s a)}{j_n(k_s a) h_n^{(2)'}(k_0 a) - \sqrt{\varepsilon_{er}}\, h_n^{(2)}(k_0 a) j_n'(k_s a)} \tag{4}$$

$$a_n = j^{-n}\frac{(2n+1)}{n(n+1)} \tag{5}$$

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \tag{6}$$

$$k_s(T/T_c) = k_0\sqrt{\varepsilon_{er}(T/T_c)} \tag{7}$$

$$\varepsilon_{er}(T/T_c) = \varepsilon_{dr}(T/T_c) - j\varepsilon_{di}(T/T_c)$$
$$= \left\{1 - \frac{\sigma_{2s}(T/T_c)}{\omega e_0}\right\} - j\left\{\frac{\sigma_{1s}(T/T_c)}{\omega \varepsilon_0}\right\} \tag{8}$$

ここで，

(r, θ, ϕ) ：球座標

a ：超伝導体球半径

E_0 ：入射波電界振幅

μ_0, ε_0 ：真空の透磁率，真空の誘電率

$P_n^m(x)$ ：ルジャンドル陪関数

$j_n(x)$, $j_n'(x)$ ：球ベッセル関数,

$dj_n(x)/dx$, $h_n^{(2)'}(x)$, $h_n^{(2)'}(x)$

：球ハンケル関数, $dh_n^{(2)}(x)/dx$

ω ：角周波数

$\varepsilon_{er}(T/T_c)$ ：超伝導体の等価複素比誘電率

$\varepsilon_{dr}(T/T_c)$, $\varepsilon_{di}(T/T_c)$: $\varepsilon_{er}(T/T_c)$ の実数部，虚数部

$\sigma_{1S}(T/T_c)$ ：超伝導体の導伝率の実数部

$\sigma_{2S}(T/T_c)$ ：超伝導体の導伝率の虚数部

T, T_c ：温度、臨界温度

である。

3．散乱パターンおよび位相特性

超伝導体球の散乱パターンおよび位相特性の温度依存性を式(1)～式(8)を用いて計算した結果を以下に示す。

数値計算の条件は，超伝導体球の前方散乱特性を明確にするため $|\varepsilon_0 \varepsilon_{er}(T/T_c)| < \varepsilon_0$ ，つまり $1 > \sigma_{2s}/(\omega\varepsilon_0) > 0$ ，が成立する範囲とし，よって周波数 $f = 10^{15}$ (Hz) に $k_0 a = 15$, に設定した。また，温度 T/T_c は超伝導状態および常伝導状態に近い状態を考慮して，それぞれ $T/T_c = 0.1$ および0.9に設定した。

3．1　散乱パターン

(1)　E_θ^S の散乱パターン

$\phi = 0°$ の場合，つまり E_θ^S の散乱パターンを $T/T_c = 0.1$ および0.9の場合について計算した結果をそれぞれFig. 1 (a)および(b)に示す。まずFig. 1 (a)は $T/T_c = 0.1$ のときの $\varepsilon_{er}(T/T_c)$ の実数部 $\varepsilon_{dr}(T/T_c) = 0.192$ および虚数部 $\varepsilon_{di}(T/T_c) \fallingdotseq 0$ の場合の E_θ^S の散乱パターンを示したもので、この場合，超伝導体球は無損失誘電体球に等価であり[1]，このため散乱パターンは誘電体球特有のそれとなる。すなわち，$\phi = 0$ であるから入射電界は入射面に並行しているため，散乱電界と超伝導体球内部の多重反射電界とが，$\theta = 0°$ で同相で相加し，$\theta = 180°$ で逆相で相加するため，散乱パターンにサイドローブが発生する。例えば，

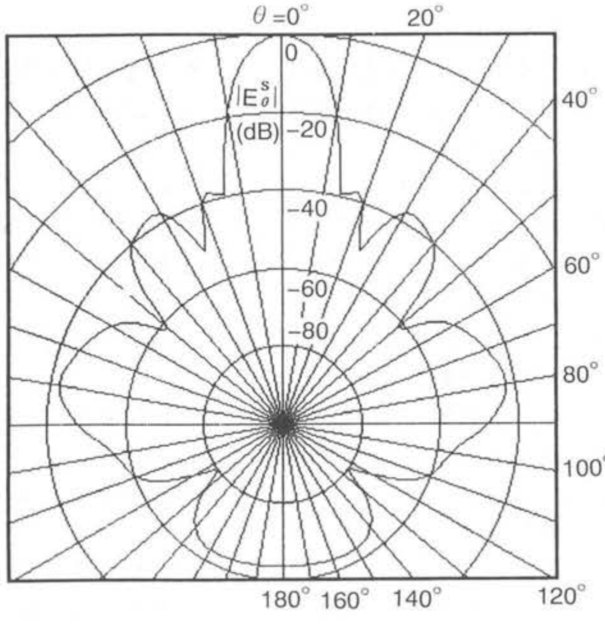

Fig. 1 (a)　Scattering pattern for　$|E_\theta^S|$
($T/T_c = 0.1$, $\phi = 0°$, $k_0 a = 15$).

Fig. 1(a)では $\theta=80^\circ$ で-42dBのサイドローブが発生している。

次にFig. 1(b)は $T/T_c=0.9$, $\varepsilon_{dr}(T/T_c)=0.429$および $|\varepsilon_{di}(T/T_c)|=0.263$の場合の E_θ^S の散乱パターンを示したものである。この場合の超伝導体球は損失の大きい導体球に等価となるため[1], 超伝導体球内部の多重反射電界は減少し、サイドローブレベルは $\theta=80^\circ$ で-69dBとなる。したがって $T/T_c=0.9$のときの超伝導体球は等価的に導電率の低い導体球の散乱特性を示す。

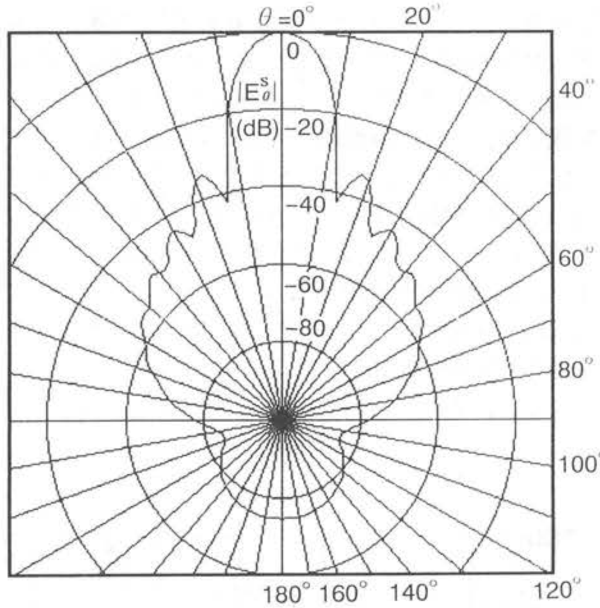

Fig. 1(b) Scattering pattern for $|E_\theta^S|$ ($T/T_c=0.9$, $\phi=0^\circ$, $k_0a=15$).

(2) E_ϕ^S の散乱パターン

Fig. 2(a)および(b)に, E_ϕ^S ($\phi=90^\circ$) の散乱パターンをそれぞれ $T/T_c=0.1$および0.9の場合について計算した結果を示す。まずFig. 2(a)はFig. 1(a)の場合と同じ数値 ($T/T_c=0.1$, $\varepsilon_{di}(T/T_c)=0.192$, $\varepsilon_{di}(T/T_c)\fallingdotseq 0$ の場合の E_ϕ^S の散乱パターンを示したもので, 超伝導体球はこの場合も無損失誘電導体に等価である。ただしこの場合は $\phi=90^\circ$ であるから, 入射電界は入射面に垂直になっているため, 散乱電界と超伝導体球内部の多重反射電界とが, 仰角 θ に対し $\phi=90^\circ$ の位相で相加するため, サイドローブの発生が抑制される。例えばFig. 2(a)で, $\theta=80^\circ$ でのサイドロー

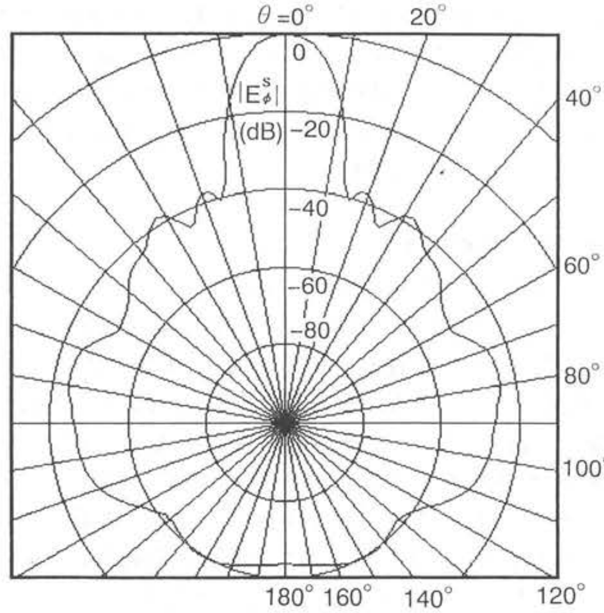

Fig. 2(a) Scattering pattern for $|E_\phi^S|$ ($T/T_c=0.1$, $\phi=90^\circ$, $k_0a=15$).

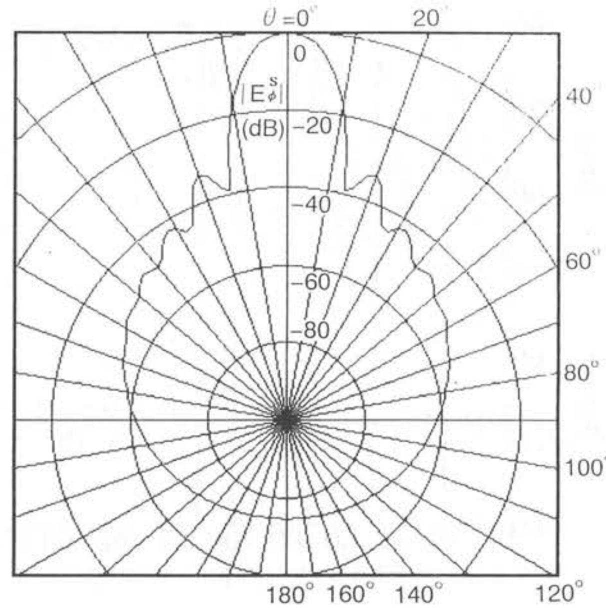

Fig. 2(b) Scattering pattern for $|E_\phi^S|$ ($T/T_c=0.9$, $\phi=90^\circ$, $k_0a=15$).

プレベルは−44dBである。

次にFig. 2(b)もFig. 1(b)と同じ数値（$T/T_c=0.9$, $\varepsilon_{dr}(T/T_c)=0.429$および $|\varepsilon_{di}(T/T_c)|=0.263$）の場合の E^S_ϕ の散乱パターンを示したものである。この場合もFig. 1(b)と同じ理由で，サイドローブは，例えば $\theta=80°$ では消失しており，損失の大きな導体球と同様な散乱特性を示す。

3．2　位相特性

(1)　$T/T_c=0.1$の場合の位相特性

Fig. 3(a)は $T/T_c=0.1$, $k_0a=15$の場合における E^S_θ と E^S_ϕ の位相特性をそれぞれ ϕ_θ（実線）および ϕ_ϕ（点線）で示したものである。先ず ϕ_θ は仰角 $\theta=21°$, 46°, 71°, 110° でそれぞれ逆相となる。ここで位相 ϕ_θ が逆相となる上記の仰角 $\theta=30°\sim57°$, $57°\sim92°$, $92°\sim128°$ および$128°\sim232°$ の範囲の ϕ_θ はFig. 1(a)の $|E^S_\theta|$ における同じ θ の範囲におけるサイドローブパターンの発生要因となる。

次にFig. 3(a)に対し同様な考察を ϕ_ϕ について行う。ϕ_ϕ は $\theta=8°$, 35°, 60°, 99° でそれぞれ逆相となる。ここで，ϕ_ϕ が逆相となる上記の仰角 θ を含む $\theta=21°\sim48°$, $48°\sim78°$, $78°\sim124°$ および $124°\sim236°$ の ϕ_ϕ はFig. 2(a)の $|E_\phi|$ における同じ θ の範囲に生起するパターンのゆらぎの要因となる。

(2)　$T/T_c=0.9$の場合の位相特性

Fig. 3(b)は $T/T_c=0.9$, $k_0a=15$の場合における E^S_θ と E^S_ϕ の位相特性をそれぞれ ϕ_θ（実線）および ϕ_ϕ（点線）で示したものである。まず ϕ_θ は仰角 $\theta=21°$, 47°, 75°, 105°, 153° でそれぞれ逆相となる。$\theta=10°\sim90°$ の ϕ_θ はFig. 1(b)の $|E_\theta|$ における同じ θ の範囲の細かいゆらぎの発生要因となり，また，$\theta=90°\sim180°$ の ϕ_θ は $|E_\theta|$ の緩やかなパターンを発生させる。

次にFig. 3(b)の ϕ_ϕ は仰角 $\theta=10°$, 35°, 63°, 97°, 153° でそれぞれ逆相となる。$\theta=21°\sim80°$ の ϕ_ϕ はFig. 2(b)の $|E_\phi|$ における同じ θ の範囲の細かいゆらぎの発生要因となり，また，$\theta=80°\sim180°$ の ϕ_ϕ は $|E_\phi|$ の緩やかなパターンを発生させる。

最後に ϕ_θ と ϕ_ϕ の温度依存性について述べる。まず ϕ_θ は $T/T_c=0.1$と0.9のときとでは，$\theta=49°$ まではほぼ同じ位相特性を示す。$\theta=49°\sim75°$ の範囲では，$T/T_c=0.1$の ϕ_θ の方が $T/T_c=0.9$のときのそれより位相回転がやや早くなり，$\theta=75°\sim180°$ では $T/T_c=0.9$の ϕ_θ の方が $T/T_c=0.1$のときのそれよりさらに位相回転が早くなる。

次に ϕ_ϕ は $T/T_c=0.1$と0.9のときでは $\theta\fallingdotseq100°$ ま

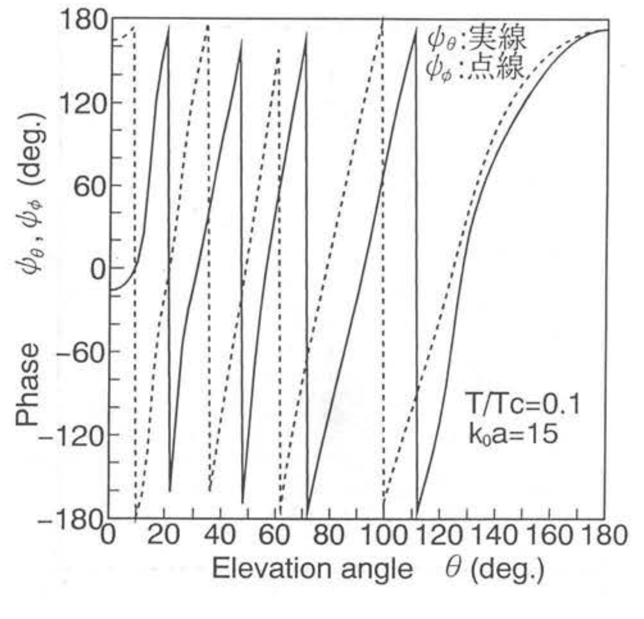

Fig. 3(a)　Phase variation for ϕ_θ and ϕ_ϕ ($T/T_c=0.1$, $k_0a=15$).

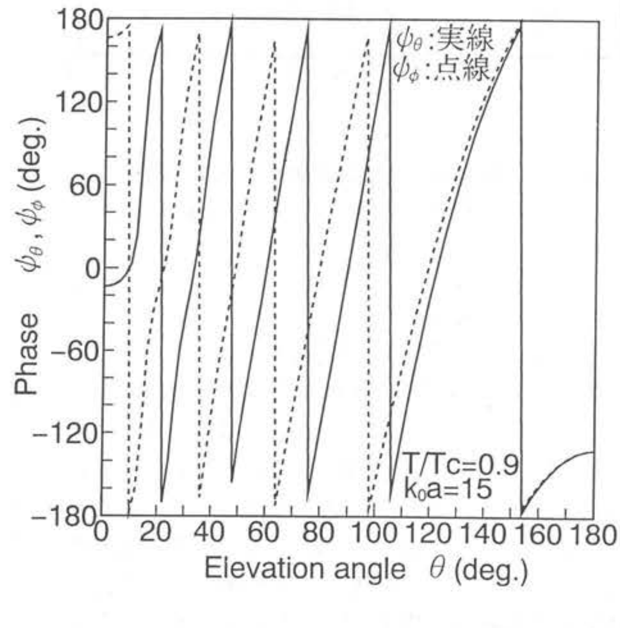

Fig. 3(b)　Phase variation for ϕ_θ and ϕ_ϕ ($T/T_c=0.9$, $k_0a=15$).

で両者とも同じ位相特性を示し，$\theta \fallingdotseq 100°$ 以上では $T/T_c=0.9$のときのφ_ϕのほうが $T/T_c=0.1$のそれより位相回転が早い。 $T/T_c=0.9$のφ_θとφ_ϕの位相回転が $T/T_c=0.1$のときのそれより早くなる理由は，温度の上昇とともに超伝導体球が等価誘電体球から損失の大きい導体球に変移してゆくためである。すなわち $T/T_c=0.1$のときは超伝導体球の内部多重反射波と散乱波との両者の位相が影響するのに対し、 $T/T_c=0.9$のときは超伝導体球の散乱波の位相が支配的になるためである。

4．むすび

超伝導体球の散乱特性を等価誘電体球の散乱問題として取扱い，その散乱パターンおよび位相特性の温度依存性について考察した。以下に考察結果をまとめる。

(1) 散乱電界 E_θ^S の散乱パターンは，温度が臨界温度より低い場合には無損失誘電体球における散乱パターン（$\phi=0°$ の場合）と等価になり，内部多重反射が影響してサイドローブが発生する。温度が臨界温度に近づくと，超伝導体球は損失の大きな導体球に等価な散乱パターンを示し，このためサイドローブレベルは減少することが明らかになった。

(2) 散乱電界 E_ϕ^S の散乱パターンの温度依存性も E_θ^S のそれと同様な特性を示す。ただし E_ϕ^S の入射面は$\phi=90°$ であるため，サイドローブレベルは E_θ^S のそれよりさらに減少することがわかった。

(3) E_θ^S と E_ϕ^S の位相特性は，E_θ^S と E_ϕ^S のそれぞれの散乱パターンの発生根拠を与えるものであり，位相（φ_θ，φ_ϕとも）が逆相となる仰角θで散乱パターンにサイドローブが発生する。

(4) 温度が臨界温度に近づくと，E_θ^S および E_ϕ^S の位相とも臨界温度よりも低い場合に比較して、位相回転が早くなる。この理由は温度が高くなると超伝導体球が損失性導体球と等価となるので，散乱波の位相が内部反射波のそれより支配的となるためであることがわかった。

今後は超伝導体球の等価複素誘電率が空間的に変動する場合の散乱特性について検討する。

最後に、本研究の御指導を賜りました北海道大学教授伊藤精彦先生に深く感謝致します。

文　献

(1) 大嶋建次，栗林　仁：" 超伝導体球の散乱断面積"，信学論（C－Ⅰ)，J77－C－Ⅰ，12,pp.763－766（1994－12)

(2) 前田憲一：" 電波工学"，pp.274－281，共立出版社（1961).

(3) 原宏，菅原昌敬（訳)：" 超伝導デバイスおよび回路の原理"，pp.107－110，コロナ社（1983).

(4) 細野敏夫：" 電磁波工学の基礎"，pp.222－241，昭晃堂（1992).

（受理年月日 1996年 9 月19日）