

等角写像の一般化とその応用について(I)

河 島 博

Generalized Conformal mappings and their applications(I)

KAWASHIMA Hiroshi

1. はじめに

関数論では、正則関数の微分係数の値が0でない点で等角性が成り立つ。(即ち等角写像となる)という重要な定理が知られているが、この証明には不思議にも行列が使われていない。所が行列を使うと、色々な点の利点だけではなく、もっと大切なことは一般次元への拡張への道が開けることである。これを以下研究して行くことにする。

2. 行列の関数論への応用

順序が逆になるが、次の定理(注：一般論の定理3.1で $n=2$ のとき)を使うことにする。

【定理2.1】 行列式の値が0でない2次の正方行列が等角変換であるならば、次の(i), (ii)の行列のどちらかに一致する。

$$(i) \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (ii) \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

(但し ρ は正の定数とする。)

〈注：(i)の直交行列は“正系”で、(ii)の直交行列は“負系”である。それを正直交行列、負直交行列と略さずにいうこともある。勿論、(i), (ii)は等角変換となることは、自明である。〉

【定理2.1の系1】 正則関数 $w=f(z)$ において、 $f'(z_0) \neq 0$ であるならば、 $w=u+iv$, $z=x+iy$ と分解して考えると $z=z_0$ で(i)の場合が成り立つ。

$$[\text{証}] w_0 = u_0 + iv_0 = f(z_0) = u(z_0) + iv(z_0) \quad (i)$$

また

$$\begin{cases} du = u_x dx + u_y dy \\ dv = v_x dx + v_y dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (ii)$$

と考えられ、(ii)はいわゆる局所変換である。

ここで、Cauchy-Riemannの関係式が(i)の点で成り立つ($\because f'(z_0) \neq 0$ の仮定より

$f'(z)_{z=z_0} = (u_x + iv_x)_{z=z_0} = (v_y - iu_y)_{z=z_0} \neq 0$ である)から、即ち、次の(i)が成り立つ。

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \quad (i)$$

この(i)を(ii)のヤコビ行列 $J(x_0, y_0)$ にを使えば、

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{z=z_0} = \begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & -v_x(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & u_x(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{J(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0)/\sqrt{J(x_0, y_0)} & -v_x(x_0, y_0)/\sqrt{J(x_0, y_0)} \\ v_x(x_0, y_0)/\sqrt{J(x_0, y_0)} & u_x(x_0, y_0)/\sqrt{J(x_0, y_0)} \end{bmatrix}$$

〈注： $\rho = \sqrt{J(x_0, y_0)} = |f'(z_0)| > 0$ となる〉で出来た。[了]

【例】 $w=f(z) \equiv z^2+z$ のとき $f'(z)=2z+1$ である。このとき $z_0=(1,1)=1+i$ の点における等角性を調べて見よう。

【解】

$$w_0 = f(z_0) = (1+i)^2 + (1+i) = 2i + (1+i) = 1+3i$$

$$f'(z_0) = f'(1,1) = 2(1+i) + 1 = 3+2i \neq 0$$

また、

$$w = u+iv = f(z) = z^2+z = (x+iy)^2 + (x+iy) = (x^2-y^2+2ixy) + (x+iy) = (x^2-y^2+x) + i(2xy+y)$$

より

$$u = x^2 - y^2 + x, \quad v = 2xy + y \quad \text{であるから}$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x+1 & -2y \\ 2y & 2x+1 \end{bmatrix} \quad (i)$$

(i)から

$$J(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (i)$$

ここで、点 $z_0=(1,1)$ を始点とする3つのベクトル $i=[1,0]$, $j=[0,1]$, $k=[1,1]$ を考え、(i)を施してつくった夫々のベクトルを i' , j' , k' として点 $w_0=(1,3)$ を始点として、 $1=1\text{ cm}$ の単位で方眼紙に図示してみると、 $i'=[3,2]$, $j'=[-2,3]$, $k'=[1,5]$ の関係でかけると、また $y=1$ に対応する曲線は $u=(v^2-5)/4$, $x=1$ に対応する曲線は $u=2-v^2/9$ で i' , j' が直交していることから、2つの曲線も点 $w_0=(1,3)$ で直交していることが分かる。〈注： $y=x(t)$ に対応する曲線は $v=2u^2+u=2(u+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}$ で、ベクトル k' が点 $w_0=(1,3)$ で接している。つまり等角性がグラフ用紙を使うことにより、具体的に把握できることになった。〉

【定理2.1の系2】 領域Dにおいて $u(x, y)$ および $v(x, y)$ が連続な一次の偏導関数を持つとき、 $w=f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ がDの各点で等角性を持つならば、〈但し等角の向きは逆向き(負系)も許す〉、 $f(z)$ または $\overline{f(z)}$ がDにおいて正則であり、しかもDの各点で $f'(z) \neq 0$ である。

【証】 定理2.1の系1の証明における(ii)のヤコビ行列 $J(x, y)$ に定理2.1を適用すればよい。

(i)の場合は向きを変えない等角変換で、

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{より}$$

$u_x = v_y$ かつ $v_x = -u_y$ が成り立ち、これはCauchy-Riemannの関係式だから、これより $f(z)$ がDにおいて

正則, かつ $\rho \neq 0$ より $f'(z) \neq 0$ が判った。

(ii) の場合は向きを変える等角変換で,

$$\begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta & \rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & -\rho \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{より}$$

$u_x = -v_y, u_y = v_x \Leftrightarrow u_x = (-v)_y, (-v)_x = -u_y$ で, これは $\overline{f(z)} = u - iv = u + i(-v)$ が正則を示す。勿論 $\rho \neq 0$ より $f'(z) \neq 0$ もよい。 [了]

3. 等角写像の一般化

等角写像の基礎となるのは, 定理2.1であった。この定理は, 2次元の線型変換が等角を保つ必要十分な条件を示している。まず, この定理を一般の n 次元のユークリッド空間に拡張してみよう。

その為に, まず3次元の立体角の概念を一般の n 次元に拡張してみる。勿論 $n=2$ の場合も入っている。

[定義] n 次元空間の集合 D を, D 外の一点 O から射影して出来る超錐体と, O を中心とする半径1の超球面との共通部分の面積を, O から D をみこむ“超立体角”という。全空間の超立体角は $2(\sqrt{\pi})^n / \Gamma(\frac{n}{2})$ である。

〈注: 超単位球の体積は $\Gamma(\frac{1}{2})^n / \Gamma(\frac{n+2}{2})$ である。〉

そのとき, 行列式の値が0でない n 次正方行列 F が超立体角を不変に保つとき, F は超等角変換の行列であるという。勿論, 部分は部分で不変に保たれる事を要請する訳である。($n=2$ のとき等角変換行列となる。)

ここで, 上の定義に思い至った訳を定理2.1の証明を交えながら解説してみよう。

O でない2つの独立な縦ベクトル a, b を用意し, また等角変換を表わす2次の行列 F を用意する。

そのとき, $a \equiv |a|, b \equiv |b|$ を導入して,

$$m \equiv \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \right|,$$

$$n \equiv \left| \det \begin{bmatrix} F(a/a) & F(b/b) \\ |F(a/a)| & |F(b/b)| \end{bmatrix} \right|$$

と定義して, $L \equiv n/m$ を考え, a を固定し, b を a に収束させたときの, L の極限を考えると, F の等角性より, その極限値が1となり, 同時に $|F(a)|^2 = |\det F| \times |a|^2 \Leftrightarrow |F(a)| = \sqrt{|\det F|} \times |a|$ が出るのである。

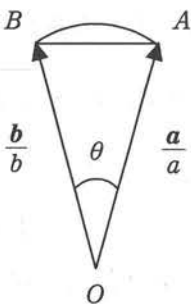


図3・1

それは, 左図で弧度(超立方角の $n=2$ のとき)を計算するとき, 単位円の弧 $\widehat{AB} = \theta$ より, 扇形 OAB の面積 $S = \frac{1}{2} \theta r^2 = \frac{1}{2} \theta$ で, 一方, $T \equiv \triangle OAB = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \right|$ 。そのとき $\lim_{b \rightarrow a} \frac{T}{S} = \lim_{b \rightarrow a} \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \right| / \theta = 1$ が保証されるから, θ の代わ

りに, m が使えるのである。よってうつった先では n が使え, F の等角性から $\lim_{a \rightarrow b} L = 1$ が言えるのである。

〈注: うつった先での角度も同じ θ であるから〉

これから $|F(a)|^2 = |\det F| \times |a|^2$ を出してみる。

まず

$$m = \frac{1}{ab} \left| \det[a, b] \right|,$$

$$n = \frac{1}{|F(a)| \times |F(b)|} \left| \det[F(a), F(b)] \right|$$

$$= \frac{1}{|F(a)| \times |F(b)|} \left| \det F \times \det[a, b] \right|$$

($\because [F(a), F(b)] = F \times [a, b]$ より)

$$L = \frac{n}{m} = \frac{ab}{|F(a)| \times |F(b)|} \times |\det F|$$

$$= \frac{|\det F| \times ab}{|F(a)| \times |F(b)|} \quad (イ)$$

$\lim_{b \rightarrow a} L = 1$ と(イ)より $|F(a)|^2 = |\det F| \times |a|^2$ がいえた。

よって

$$|F(a)| = \sqrt{|\det F|} |a| \quad (ロ)$$

が言えた。つまり $\rho \equiv \sqrt{|\det F|}$ とおけば, (ロ)より $\frac{F}{\rho}$ は直交行列となる。そして $\det F > 0$ のときが(i)となり, $\det F < 0$ のときが(ii)となる。これで定理2.1の証明も出来た訳である。

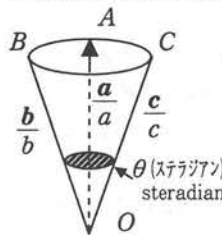


図3・2

一般の n 次元に入る前に, もう一つ $n=3$ のときをやっておく。

左図はその為の図で, 立体角の単位はステラジアン(steradian)と言われる。一般の場合を含めて sterad とかくことにすれば, (但し超単位球の表面積の値にステラド(sterad)をつけて, 単位を入れる訳である。)

よって $n=2$ のときは $2\pi \text{ rad} = 2\pi \text{ sterad}$ で, $n=3$ のときは全空間の超立体角は $4\pi \text{ sterad}$ となる。また, 一般の n のときの全空間の超立体角は $2(\sqrt{\pi})^n / \Gamma(\frac{n}{2}) \text{ sterad}$ となる訳である。

まず, $n=3$ のときを定理の形で述べよう。

3次元空間から3次元空間への正則な一次変換の行列 F が超等角性を持つならば, $|F(a)| = \sqrt[3]{|\det F|} |a|$ が出て来る。

これを証明すればよい訳で, 本質的には $n=2$ に並行して出来る。これを実行してみよう。

O でない3つの独立な縦ベクトル a, b, c を用意し, また等角変換を表わす3次の正則行列 F を用意する訳である。

そのとき, $a \equiv |a|, b \equiv |b|, c \equiv |c|$ を導入する。

〈注: $\equiv$ は“(イコール)と置いて定義する”とい

う意味)

$$\text{また } m \equiv \left| \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \right|,$$

$$n \equiv \left| \det \begin{bmatrix} F\left(\frac{a}{a}\right) & F\left(\frac{b}{b}\right) & F\left(\frac{c}{c}\right) \\ F\left(\frac{a}{a'}\right) & F\left(\frac{b}{b'}\right) & F\left(\frac{c}{c'}\right) \end{bmatrix} \right|$$

と定義して、 $L \equiv \frac{n}{m}$ を考え、 a だけを固定し、 b, c を a に収束させたときの L の極限を考えると、 F の等角性より $n=2$ のときと同様に $\lim_{b,c \rightarrow a} L = 1$ が出て、同時に $|F(a)|^3 = |\det F| \times |a|^3$ が出るのである。

図 3・2 を頭において、単位球の球面三角形 ABC の面積 θ より球面三角錐 $OABC$ の体積 $S = \frac{1}{3}\theta r^3 = \frac{\theta}{3}$ 。

一方、三角錐 $OABC$ の体積 $T = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \right|$ 。

そのとき、幾何学的に

$$\lim_{b,c \rightarrow a} \frac{T}{S} = \lim_{b,c \rightarrow a} \frac{\left| \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \right|}{2\theta} = 1$$

が保証されるから、極限において θ の代わりに $\frac{1}{2}m$ が使えるのである。よってうつった先では超立体角の代わりに $\frac{1}{2}n$ が使えて、 F の等角性から $\lim_{b,c \rightarrow a} L = 1$ が言える。〈 $\therefore$ うつった先での立方角も同じ θ となることが F の仮定であるから。〉

これから、 $|F(a)|^3 = |\det F| \times |a|^3$ を出してみよう。まず、

$$m = \frac{1}{abc} \left| \det[a, b, c] \right|$$

次に

$$n = \frac{|\det F|}{|F(a)| \times |F(b)| \times |F(c)|} \left| \det[a, b, c] \right|$$

($\therefore [F(a), F(b), F(c)] = F[a, b, c]$ より)

$$\therefore L = \frac{n}{m} = \frac{abc}{|F(a)| \times |F(b)| \times |F(c)|} \times |\det F| \quad (i)$$

よって $\lim_{b,c \rightarrow a} L = 1$ と (i) より $|F(a)|^3 = |\det F| \times |a|^3$ が言えた。

これで $n=3$ のときの定理の証明は終わった。

〈注: $n=3$ のときの結論から $|F(a)| = \sqrt[3]{|\det F|} |a|$ が出て、 $\rho \equiv \sqrt[3]{|\det F|}$ とおけば、(i) $\det F > 0$ のとき、 $\frac{F}{\rho}$ は正直交行列、(ii) $\det F < 0$ のとき $\frac{F}{\rho}$ は負直交行列となる。〉

いよいよ一般の n のときの定理を与える段階に達した。それは、

[定理 3.1] n 次元ユークリッド空間 E^n 上の正則な一次変換を表わす行列 F が等角性を持つならば、 E^n 上の任意の縦ベクトル a に対して $|F(a)| = \sqrt[n]{|\det F|} |a|$ が成り立つ。

そして $\rho \equiv \sqrt[n]{|\det F|}$ としたとき、(i) $\det F > 0$ の

場合は F/ρ は正の直交行列、(ii) $\det F < 0$ の場合は、 F/ρ は負の直交行列とそれぞれなる。

[証] $n=3$ の場合を参考にしてやればよい。

O でない n 個の一次独立な列ベクトル $a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ を用意し、また等角変換を表わす n 次の正則行列 F を用意する訳である。

そのとき、 $a \equiv |a|$, $b_i \equiv |b_i|$ (但し $i=1, 2, \dots, n-1$) を導入し、また

$$u = \left| \det \begin{bmatrix} a & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \right|,$$

$$v = \left| \det \begin{bmatrix} F\left(\frac{a}{a}\right) & F\left(\frac{b_1}{b_1}\right) & \dots & F\left(\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}}\right) \\ F\left(\frac{a}{a'}\right) & F\left(\frac{b_1}{b_1'}\right) & \dots & F\left(\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}'}\right) \end{bmatrix} \right|$$

と定義する。

そのとき $L \equiv \frac{v}{u}$ と定義して、 a だけを固定し、 $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ を独立に a に収束させたときの L の極限を考えると、 F の等角性より $\lim_{b_1, \dots, b_{n-1} \rightarrow a} L = 1$ が出て、同時に $|F(a)|^n = |\det F| \times |a|^n$ が出るのである。

図 3・2 を参考にして、超単位球の球面基本単体 $A, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ の面積 θ より超球面単体錐 $OA, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ の体積 $S = \frac{1}{n}\theta r^n = \frac{1}{n}\theta$ である。

一方、単体錐 $OA, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ の体積 T は

$$T = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a' & b_1' & b_2' & \dots & b_{n-1}' \end{bmatrix} \right|.$$

そのとき、幾何学的に

$$\lim_{b_1, \dots, b_{n-1} \rightarrow a} \frac{T}{S} = \lim_{b_1, \dots, b_{n-1} \rightarrow a} \frac{\left| \det \begin{bmatrix} a & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \right|}{(n-1)! \theta} = 1$$

が保証されるから、極限において θ の代わりに $\frac{1}{(n-1)!}u$ が使えるのである。よって、うつった先では超立方角の代わりに $\frac{1}{(n-1)!}v$ が使えて、 F の等角性から $\lim_{b_1, \dots, b_{n-1} \rightarrow a} L = 1$ が言える。〈 $\therefore$ うつった先での超立体角も同じ θ となることが F の仮定そのものであるから。〉

これから、 $|F(a)|^n = |\det F| \times |a|^n$ を出してみよう。まず

$$u = \frac{1}{ab_1 b_2 \dots b_{n-1}} \left| \det[a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}] \right|$$

次に

$$v = \frac{|\det F|}{|F(a)| \times |F(b_1)| \times \dots \times |F(b_{n-1})|} \times \left| \det[a, b_1, \dots, b_{n-1}] \right|$$

($\therefore [F(a), F(b_1), \dots, F(b_{n-1})] = F[a, b_1, \dots, b_{n-1}]$ より)

$$\therefore L = \frac{v}{u} = \frac{a \times b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_{n-1}}{|F(a)| \times |F(b_1)| \times \cdots \times |F(b_{n-1})| \times |\det F|} \quad (イ)$$

よって $\lim_{b_1, \dots, b_{n-1} \rightarrow a} L = 1$ と(イ)より

$|F(a)|^n = |\det F| \times |a|^n$ が言えた。

これより $|F(a)| = \sqrt[n]{|\det F|} |a|$ となり, $\rho \equiv \sqrt[n]{|\det F|}$ とすれば, (i) $\det F > 0$ のとき, $\frac{F}{\rho}$ が正の直交行列,

(ii) $\det F < 0$ のとき $\frac{F}{\rho}$ が負の直交行列がそれぞれ言えるので良い訳である。[証了]

[定理 3.1 の系] $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 空間上の領域 D から, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 空間への C^1 級の写像

$$y_i \equiv y_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{但し } i = 1, 2, \dots, n)$$

があり, D の一点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ において

$$J \equiv \partial(y_1, y_2, \dots, y_n) / \partial(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$$

かつ

$$J = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right]_{(i,j=1,2,\dots,n)}$$

が直交行列の定数倍とかけられるならば, 点 a で超等角性が成り立つ。

[証] 今までの話からほとんど明らかである。[了]

[例] E^n の原点における反転は原点を除いて超等角性をもつ。〈注: E^n における超単位球面 S^{n-1} に対して $y = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x^2} [x_1, x_2, \dots, x_n]$ で x から y を決めるとき, y を S^{n-1} における x の反転の点という。(但し $x = |x|$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ とする。)特に $n = 2$ のときが関数論の $w = \frac{1}{z}$ から定義した所の反転 $\bar{w} = \frac{z}{|z|^2} \Leftrightarrow y = \bar{w}, x = z$ である。〉

[解] $y_i = \frac{x_i}{x^2} (i = 1, 2, \dots, n)$ とかけるから,

$$(y_i)_{x_i} = 1 \times \frac{1}{x^2} + x_i \times (-2)x^{-2-1} \frac{\partial x}{\partial x_i} = \langle \text{所で } \frac{\partial x}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ (但し } u \equiv \sum_{i=1}^n x_i^2, \text{ よって } x = \sqrt{u} \text{ で) } = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 2x_i \rangle = \frac{x_i}{x^2} - 2x_i \times \frac{x_i}{x^4} = \frac{x^2 - 2x_i^2}{x^4} \quad (イ)$$

また $i \neq j$ のとき

$$(y_i)_{x_j} = x_i \left(\frac{1}{x^2} \right)_{x_j} = x_i \times (-2) \frac{1}{x^3} \times \frac{x_j}{x} = \frac{-2x_i x_j}{x^4} \quad (ロ)$$

よって(イ), (ロ)より

$$J = \frac{1}{x^4} H \quad (ハ)$$

但し

$$H = \begin{bmatrix} x^2 - 2x_1^2 & -2x_1x_2 & \cdots & -2x_1x_n \\ -2x_2x_1 & x^2 - 2x_2^2 & \cdots & -2x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_nx_1 & -2x_nx_2 & \cdots & x^2 - 2x_n^2 \end{bmatrix} \quad (ニ)$$

とする。

さらにこの H は, 単位行列 E と, 次に定義する対

称行列 G により, 次のようにかける。

$$H = x^2 E - 2G \quad (ホ)$$

但し

$$G = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{bmatrix} \quad (ヘ)$$

所が

$$G = [x_1, x_2, \dots, x_n] \times [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

から

$$G^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \left([x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

で()の部分が x^2 となるから, 結局 $G^2 = x^2 G$ となる。

よって $'H = H$ に注意して

$$\begin{aligned} 'HH &= H^2 = (x^2 E - 2G)^2 = x^4 E - 4x^2 G + 4G^2 \\ &= x^4 E - 4x^2 G + 4x^2 G = x^4 E \\ \therefore 'HH &= x^4 E \end{aligned} \quad (ト)$$

$x \neq 0$ の仮定から $\frac{1}{x^2} H$ は直交行列となる。よって $J = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2} H = \frac{1}{x^2} \times F$ となり, $\rho = \frac{1}{x^2}$, F は直交行列でできた。

(注 1: 一般には, 反転は半径 r の超球面を使うが, 関数論との係わりと, 話を簡潔にするため単位超球面に絞った。

一般の場合には

$$y_i = \frac{r^2}{x^2} x_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ である。}$$

(注 2: (ト)より $|H|^2 = (x^4)^n |E| = x^{4n} \times 1 = x^{4n} \Leftrightarrow$

$$|H| = \pm x^{2n} \Leftrightarrow \det \frac{H}{x^2} = \left(\frac{1}{x^2} \right)^n \det H = \pm 1$$

所で $x_1 = 1, x_i = 0 (i = 2, 3, \dots, n)$ とおくと

$$H = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \text{ より } \det H = -1 \text{ より}$$

$\therefore \det H = -x^{2n}$ が出る。

(注 3: もっと直接に $\det H = -x^{2n}$ を出してみる。

$$\det H = \begin{vmatrix} x^2 - 2x_1^2 & -2x_1x_2 & \cdots & -2x_1x_n \\ -2x_2x_1 & x^2 - 2x_2^2 & \cdots & -2x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_nx_1 & -2x_nx_2 & \cdots & x^2 - 2x_n^2 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} \frac{x_2}{x_1} - 2x_1 & -2x_2 & \cdots & -2x_n \\ -2x_1 & \frac{x^2}{x_2} - 2x_2 & \cdots & -2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_1 & -2x_2 & \cdots & \frac{x^2}{x_n} - 2x_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow -1 \times \\ \searrow -1 \times \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= x_1 x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} \frac{x_2}{x_1} - 2x_1, & -2x_2, & \cdots, & -2x_n \\ -\frac{x^2}{x_1}, & \frac{x^2}{x_2}, & 0, & \cdots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{x^2}{x_1}, & 0, & \cdots, & 0, & \frac{x^2}{x_n} - 2x_n \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} x^2 - 2x_1^2, & -2x_2^2, & -2x_3^2, & \cdots, & -2x_n^2 \\ -x^2, & x^2, & 0, & \cdots, & 0 \\ -x^2, & 0, & x^2, & \cdots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x^2, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & x^2 \end{vmatrix} = \\
 &\quad \begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ & 1 \times & & 1 \times & & 1 \times \end{matrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - \cdots - 2x_n^2, & -2x_2^2, & -2x_3^2, & \cdots, & -2x_n^2 \\ 0, & x^2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & x^2, & 0, & \cdots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & x^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -x^2, & -2x_2^2, & -2x_3^2, & \cdots, & -2x_n^2 \\ 0, & x^2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & x^2, & 0, & \cdots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & x^2 \end{vmatrix} = -(x^2)^n = -x^{2n}
 \end{aligned}$$

で出来た。

4. 軸から見た回転の公式

これから、いよいよ回転の公式の導出にはいる訳である。後で判ることだが、2種類の公式群に分かれる。(注：次元によって変わるから複数個と見て)そして、その基本形が小山高専紀要 (No27) の定理 2 ($n=3$), 定理 6 ($n=4$) である。

それは次の定理 4.1 にまとめられる。

[定理 4.1] n 次元のユークリッド空間において、原点 O を始点として $(n-2)$ 個の互いに直交する単位ベクトル $[{}^1P_1, {}^1P_2, \dots, {}^1P_{n-2}, {}^1P_{n-1}, {}^1P_n], [{}^2P_1, {}^2P_2, \dots, {}^2P_{n-2}, {}^2P_{n-1}, {}^2P_n], \dots, [{}^{n-2}P_1, {}^{n-2}P_2, \dots, {}^{n-2}P_{n-2}, {}^{n-2}P_{n-1}, {}^{n-2}P_n]$ をこの順での固定された回転軸とみて、右ねじの方向に直交補空間の点を θ だけ回転する変換の行列を $\mathcal{R}(\theta)$ とすれば、

$$\mathcal{R}(\theta) = \cos \theta \times E + (1 - \cos \theta) G' + \sin \theta \times H' \quad (i)$$

となる。〈但し E は n 次元単位行列。 G', H' の (i, j) 成分を g_{ij}, h_{ij} とすれば $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n-2} {}^kP_i {}^kP_j$ (注)

$$h_{ij} = (-1)^{i+j} \varepsilon \begin{pmatrix} i_1, i_2 \\ i, j \end{pmatrix} \det \begin{bmatrix} {}^1P_{j_1} & {}^1P_{j_2} & \cdots & {}^1P_{j_{n-2}} \\ {}^2P_{j_1} & {}^2P_{j_2} & \cdots & {}^2P_{j_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{n-2}P_{j_1} & {}^{n-2}P_{j_2} & \cdots & {}^{n-2}P_{j_{n-2}} \end{bmatrix} \quad (ii)$$

(但し $i \neq j$)

〈注: $i_1 = \min(i, j)$, $i_2 = \max(i, j)$ かつ $\{i_1, i_2, j_1, j_2, \dots, j_{n-2}\}$ は 1 から n までの重複しない自然数で $\{j_1, j_2, \dots, j_{n-2}\}$ は小さい順に取ったものである。また

$\varepsilon \begin{pmatrix} i_1, i_2 \\ i, j \end{pmatrix}$ は互換の符号 ± 1 を表わす。) なお $h_{ii} = 0$ とする。〉

(注 1: $n=3$ のとき (前紀要 [定理 2])

$$g_{11} = p_1 p_1, g_{12} = p_1 p_2, g_{13} = p_1 p_3, g_{21} = p_2 p_1, g_{22} = p_2 p_2, g_{23} = p_2 p_3, g_{31} = p_3 p_1, g_{32} = p_3 p_2, g_{33} = p_3 p_3$$

$$h_{11} = 0, h_{12} = -p_3, h_{13} = p_2, h_{21} = p_3, h_{22} = 0, h_{23} = -p_1, h_{31} = -p_2, h_{32} = p_1, h_{33} = 0 \text{ でよい。}$$

(注 2: $n=4$ のとき (前紀要 [定理 6])

$$g_{11} = {}^1p_1 {}^1p_1 + {}^2p_1 {}^2p_1, g_{12} = {}^1p_1 {}^1p_2 + {}^2p_1 {}^2p_2, g_{13} = {}^1p_1 {}^1p_3 + {}^2p_1 {}^2p_3, g_{14} = {}^1p_1 {}^1p_4 + {}^2p_1 {}^2p_4, g_{22} = {}^1p_2 {}^1p_2 + {}^2p_2 {}^2p_2, g_{23} = {}^1p_2 {}^1p_3 + {}^2p_2 {}^2p_3, g_{24} = {}^1p_2 {}^1p_4 + {}^2p_2 {}^2p_4, g_{33} = {}^1p_3 {}^1p_3 + {}^2p_3 {}^2p_3, g_{34} = {}^1p_3 {}^1p_4 + {}^2p_3 {}^2p_4, g_{44} = {}^1p_4 {}^1p_4 + {}^2p_4 {}^2p_4 \quad (\because G' \text{ は対称行列より})$$

$$h_{11} = 0, h_{12} = -\begin{vmatrix} {}^1p_3 & {}^1p_4 \\ {}^2p_3 & {}^2p_4 \end{vmatrix}, h_{13} = \begin{vmatrix} {}^1p_2 & {}^1p_4 \\ {}^2p_2 & {}^2p_4 \end{vmatrix}, h_{14} = -\begin{vmatrix} {}^1p_2 & {}^1p_3 \\ {}^2p_2 & {}^2p_3 \end{vmatrix}$$

$$h_{22} = 0, h_{23} = -\begin{vmatrix} {}^1p_1 & {}^1p_4 \\ {}^2p_1 & {}^2p_4 \end{vmatrix}, h_{24} = \begin{vmatrix} {}^1p_1 & {}^1p_3 \\ {}^2p_1 & {}^2p_3 \end{vmatrix}, h_{33} = 0, h_{34} =$$

$$-\begin{vmatrix} {}^1p_1 & {}^1p_2 \\ {}^2p_1 & {}^2p_2 \end{vmatrix}, h_{44} = 0 \quad (\because H' \text{ は交代行列より}) \text{ でよい。}$$

[証明] 一般の n の証明にはいる前に、 $n=5$ のときの証明をすまそう。〈注: 前紀要, 定理 2, 6 を参照。〉

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{bmatrix} s_1, t_1, p_1, q_1, r_1 \\ s_2, t_2, p_2, q_2, r_2 \\ s_3, t_3, p_3, q_3, r_3 \\ s_4, t_4, p_4, q_4, r_4 \\ s_5, t_5, p_5, q_5, r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta, & -\sin \theta, & 0, & 0, & 0 \\ \sin \theta, & \cos \theta, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \\ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \\ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \\ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \\ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \end{bmatrix} \quad (i)$$

で、回転の行列 $\mathcal{R}(\theta)$ は与えられるから、これからパラメータ $s_i, t_j (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ を消去すれば、軸から見た回転の公式が得られる。

この計算を実行する。

真ん中の行列は、 $E + (\cos \theta - 1)G + \sin \theta H$ とかける。(但し E は単位行列、

$$G = \begin{bmatrix} 1, & 0, & & & \\ 0, & 1, & & & \\ & & O_{32} & & \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0, & -1, & & & \\ 1, & 0, & & & \\ & & O_{32} & & \end{bmatrix}, \text{である。}$$

よって、(i) より

$$\mathcal{R}(\theta) = E + (\cos \theta - 1)TGT + \sin \theta THT \quad (ii)$$

とかける。(但し T は (i) の右端の行列を表わす)

(i) の右端の直交行列 T をブロック化 (小行列に分けること) して、次のようにする。

$$T = \begin{bmatrix} T_1(2,2), & T_2(2,3) \\ T_3(3,2), & T_4(3,3) \end{bmatrix} \quad (iii)$$

すると、

$$\begin{aligned} TGT &= \begin{bmatrix} T_1(2,2), & T_3(3,2) \\ T_2(3,2), & T_4(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2, & O_{23} \\ O_{32}, & O_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(2,2), & T_2(2,3) \\ T_3(3,2), & T_4(3,3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_1(2,2), & T_3(3,2) \\ T_2(3,2), & T_4(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(2,2), & T_2(2,3) \\ O_{32}, & O_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 'T_1(2,2) T_1(2,2), 'T_1(2,2) T_2(2,3) \\ 'T_2(3,2) T_1(2,2), 'T_2(3,2) T_2(2,3) \end{bmatrix} \quad (二)$$

一方

$$\begin{aligned} E_5 = 'TT &= \begin{bmatrix} 'T_1(2,2), 'T_3(2,3) \\ 'T_2(3,2), 'T_4(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(2,2), T_2(2,3) \\ T_3(3,2), T_4(3,3) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 'T_1(2,2) T_1(2,2) + 'T_3(2,3) T_3(3,2), \\ 'T(3,2) T_1(2,2) + 'T_4(3,3) T_3(3,2), \\ 'T_1(2,2) T_2(2,3) + 'T_3(2,3) T_4(3,3) \\ 'T_2(3,2) T_2(2,3) + 'T_4(3,3) T_4(3,3) \end{bmatrix} \quad (ホ) \end{aligned}$$

(ホ)から

$$\begin{aligned} 'T_1(2,2) T_1(2,2) + 'T_3(2,3) T_3(3,2) &= E_2 \Leftrightarrow 'T_1(2,2) T_1(2,2) \\ &= E_2 - 'T_3(2,3) T_3(3,2), 'T_1(2,2) T_2(2,3) = -'T_3(2,3) T_4(3,3), \\ 'T(3,2) T_1(2,2) &= -'T_4(3,3) T_3(3,2), 'T_2(3,2) T_2(2,3) = \\ &= E_3 - 'T_4(3,3) T_4(3,3) \quad (イ) \end{aligned}$$

これらを(二)に代入して

$$\begin{aligned} 'TGT &= \begin{bmatrix} E_2 - 'T_3(2,3) T_3(3,2), -'T_3(2,3) T_4(3,3) \\ -'T_4(3,3) T_3(3,2), E_3 - 'T_4(3,3) T_4(3,3) \end{bmatrix} \\ &= E_5 - \begin{bmatrix} 'T_3(2,3) T_3(3,2), 'T_3(2,3) T_4(3,3) \\ 'T_4(3,3) T_3(3,2), 'T_4(3,3) T_4(3,3) \end{bmatrix} \quad (ト) \end{aligned}$$

〈注：この計算は、このまま一般の場合に通用する。〉

(ト)を(ロ)に代入すると、(イ)の第2項まで出る。

実際、

$$G' = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1, q_1, r_1 \\ p_2, q_2, r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1, p_2 \\ q_1, q_2 \\ r_1, r_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_1, q_1, r_1 \\ p_2, q_2, r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3, p_4, p_5 \\ q_3, q_4, q_5 \\ r_3, r_4, r_5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_3, q_3, r_3 \\ p_4, q_4, r_4 \\ p_5, q_5, r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1, p_2 \\ q_1, q_2 \\ r_1, r_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3, q_3, r_3 \\ p_4, q_4, r_4 \\ p_5, q_5, r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3, p_4, p_5 \\ q_3, q_4, q_5 \\ r_3, r_4, r_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

に注意すれば、明らかである。

問題は、(イ)の末項であるが、これが意外と難関である。

まず、 H が交代行列であるから $'THT$ は交代行列である。(∵ $'(THT) = 'TH('T) = 'T(-H)T = -'THT$ であるから。)

$H' \equiv 'THT$ は交代行列でよい。しかし、 G' を求めたときのやり方は通用しないので(実際、実行して見ると判る)、ここでは連立一次方程式の解法に倣って解いて見よう。まず

$$O_{5,3} = H'[\downarrow p, \downarrow q, \downarrow r] = \begin{bmatrix} 0, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15} \\ x_{21}, 0, x_{23}, x_{24}, x_{25} \\ x_{31}, x_{32}, 0, x_{34}, x_{35} \\ x_{41}, x_{42}, x_{43}, 0, x_{45} \\ x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1, q_1, r_1 \\ p_2, q_2, r_2 \\ p_3, q_3, r_3 \\ p_4, q_4, r_4 \\ p_5, q_5, r_5 \end{bmatrix} \quad (チ)$$

(何となれば、 $\mathcal{R}(\theta)[\downarrow p, \downarrow q, \downarrow r] = [\downarrow p, \downarrow q, \downarrow r]$ より) よって、(チ)より

$$\begin{cases} 0 + x_{12}p_2 + x_{13}p_3 + x_{14}p_4 + x_{15}p_5 = 0 \\ 0 + x_{12}q_2 + x_{13}q_3 + x_{14}q_4 + x_{15}q_5 = 0 \\ 0 + x_{12}r_2 + x_{13}r_3 + x_{14}r_4 + x_{15}r_5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{21}p_1 + 0 + x_{23}p_3 + x_{24}p_4 + x_{25}p_5 = 0 \\ x_{21}q_1 + 0 + x_{23}q_3 + x_{24}q_4 + x_{25}q_5 = 0 \\ x_{21}r_1 + 0 + x_{23}r_3 + x_{24}r_4 + x_{25}r_5 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_{51}p_1 + x_{52}p_2 + x_{53}p_3 + x_{54}p_4 + 0 = 0 \\ x_{51}q_1 + x_{52}q_2 + x_{53}q_3 + x_{54}q_4 + 0 = 0 \\ x_{51}r_1 + x_{52}r_2 + x_{53}r_3 + x_{54}r_4 + 0 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

(1)はクラメルの公式より

$$\Delta = \Delta_{2,3,4} = \det[\downarrow p_2, \downarrow p_3, \downarrow p_4] = \begin{vmatrix} p_2, p_3, p_4 \\ q_2, q_3, q_4 \\ r_2, r_3, r_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

として、

$$x_{12} = \frac{1\Delta_2}{\Delta} = \frac{-x_{15} \det[\downarrow p_5, \downarrow p_3, \downarrow p_4]}{\Delta} = \frac{-x_{15} \det[\downarrow p_3, \downarrow p_4, \downarrow p_5]}{\Delta} = \Delta_{3,4,5}$$

$$x_{13} = \frac{1\Delta_3}{\Delta} = \frac{-x_{15} \det[\downarrow p_2, \downarrow p_5, \downarrow p_4]}{\Delta} = \frac{x_{15} \det[\downarrow p_2, \downarrow p_4, \downarrow p_5]}{\Delta} = \Delta_{2,4,5}$$

$$x_{14} = \frac{1\Delta_4}{\Delta} = \frac{-x_{15} \det[\downarrow p_2, \downarrow p_3, \downarrow p_5]}{\Delta} = \frac{-x_{15} \Delta_{2,3,5}}{\Delta}$$

より

$$x_{12} \cdot x_{13} \cdot x_{14} \cdot x_{15} = \frac{x_{12}}{x_{15}} \cdot \frac{x_{13}}{x_{15}} \cdot \frac{x_{14}}{x_{15}} \cdot 1 = \frac{(-1)^{1+2} \Delta_{3,4,5}}{\Delta}$$

$$\frac{(-1)^{1+3} \Delta_{2,4,5}}{\Delta} \cdot \frac{(-1)^{1+4} \Delta_{2,3,5}}{\Delta} \cdot 1 = (-1)^{1+2} \Delta_{3,4,5}$$

$$(-1)^{1+3} \Delta_{2,4,5} \cdot (-1)^{1+4} \Delta_{2,3,5} \cdot (-1)^{1+5} \Delta_{2,3,4} \text{ であり。}$$

(2)もクラメルの公式より

$$\Delta = \Delta_{1,3,4} = \det[\downarrow p_1, \downarrow p_3, \downarrow p_4] = \begin{vmatrix} p_1, p_3, p_4 \\ q_1, q_3, q_4 \\ r_1, r_3, r_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

として

$$x_{21} = \frac{2\Delta_1}{\Delta} = \frac{-x_{25} \det[\downarrow p_5, \downarrow p_3, \downarrow p_4]}{\Delta} = \frac{-x_{25} \det[\downarrow p_3, \downarrow p_4, \downarrow p_5]}{\Delta} = \Delta_{3,4,5}$$

$$x_{23} = \frac{2\Delta_3}{\Delta} = \frac{-x_{25} \det[\downarrow p_1, \downarrow p_5, \downarrow p_4]}{\Delta} = \frac{x_{25} \det[\downarrow p_1, \downarrow p_4, \downarrow p_5]}{\Delta} = \Delta_{1,4,5}$$

$$x_{24} = \frac{2\Delta_4}{\Delta} = \frac{-x_{25} \det[\downarrow p_1, \downarrow p_3, \downarrow p_5]}{\Delta} = \frac{-x_{25} \Delta_{1,3,5}}{\Delta} \text{ より}$$

$$x_{21} \cdot x_{23} \cdot x_{24} \cdot x_{25} = \frac{x_{21}}{-x_{25}} \cdot \frac{x_{23}}{-x_{25}} \cdot \frac{x_{24}}{-x_{25}} \cdot -1 = \frac{\Delta_{3,4,5}}{\Delta}$$

$$\frac{-\Delta_{1,4,5}}{\Delta} \cdot \frac{\Delta_{1,3,5}}{\Delta} \cdot -1 = (-1)^{2+1} \varepsilon_{(2,1)}^{(1,2)} \Delta_{3,4,5} \cdot (-1)^{2+3} \Delta_{1,4,5}$$

$$: (-1)^{2+4} \Delta_{1,3,5} \cdot (-1)^{2+5} \Delta_{1,3,4} \text{ であり。}$$

この考えで、 $x_{ij} = (-1)^{i+j} \varepsilon_{(i,j)}^{(i_1, i_2)} \Delta_{j_1, j_2, j_3}$ と巧く決定出来て、(但し $x_{ii} = 0$)、計算を実行すれば全てが巧くい。〈注意：検算には $p_3 = q_4 = r_5 = 1$ 、他は0とすれば、

$\mathcal{R}(\theta)$ が (i) の真ん中の行列となりよい。

次に、いよいよ n 次元の場合をやってみよう。まず、 G' の求め方をやる。これは簡単である。場所の節約のために、 $m \equiv n-2$ を導入すると、

$$\begin{aligned} {}^i TGT &= \begin{bmatrix} {}^i T_1(2,2), {}^i T_3(2,m) \\ {}^i T_2(m,2), {}^i T_4(m,m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(2,2) & O(2,m) \\ O(m,2) & O(m,m) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^i T_1(2,2) & {}^i T_3(2,m) \\ {}^i T_2(m,2) & {}^i T_4(m,m) \end{bmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{bmatrix} T_1(2,2) & T_2(2,m) \\ O(m,2) & O(m,m) \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} {}^i T_1(2,2) T_1(2,2), {}^i T_1(2,2) T_2(2,m) \\ {}^i T_2(m,2) T_1(2,2), {}^i T_2(m,2) T_2(2,m) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} E(n,n) &= E(2+m, 2+m) = \begin{bmatrix} E(2,2) & O(2,m) \\ O(m,2) & E(m,m) \end{bmatrix} = \\ {}^i TT &= \begin{bmatrix} {}^i T_1(2,2), {}^i T_3(2,m) \\ {}^i T_2(m,2), {}^i T_4(m,m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(2,2) & T_2(2,m) \\ T_3(m,2) & T_4(m,m) \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} {}^i T_1(2,2) T_1(2,2) + {}^i T_3(2,m) T_3(m,2), \\ {}^i T_2(m,2) T_1(2,2) + {}^i T_4(m,m) T_3(m,2), \\ {}^i T_1(2,2) T_2(2,m) + {}^i T_3(2,m) T_4(m,m) \\ {}^i T_2(m,2) T_2(2,m) + {}^i T_4(m,m) T_4(m,m) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} {}^i TGT &= \begin{bmatrix} E(2,2) - {}^i T_3(2,m) T_3(m,2), \\ -{}^i T_4(m,m) T_3(m,2), \\ -{}^i T_3(2,m) T_4(m,m) \\ E(m,m) - {}^i T_4(m,m) T_4(m,m) \end{bmatrix} \\ &= E(2+m, 2+m) - \\ &\quad \begin{bmatrix} {}^i T_3(2,m) T_3(m,2), {}^i T_3(2,m) T_4(m,m) \\ {}^i T_4(m,m) T_3(m,2), {}^i T_4(m,m) T_4(m,m) \end{bmatrix} \\ &= E(n,n) - G' \text{ であり。} \end{aligned}$$

やはり難しいのは、 H' の決定である。次のように H' と $(n, n-2)$ 型 $[\downarrow P, \downarrow P, \dots, \downarrow {}^{n-2}P]$ を用意するのである。

$$H'[\downarrow P, \downarrow P, \dots, \downarrow {}^{n-2}P] = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 0 & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & 0 & x_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1P, {}^2P, \dots, {}^{n-2}P \\ {}^1P, {}^2P, \dots, {}^{n-2}P \\ {}^1P, {}^2P, \dots, {}^{n-2}P \\ \vdots \\ {}^1P, {}^2P, \dots, {}^{n-2}P \end{bmatrix} = 0$$

として、これを解いて H' を求めるのである。

i 行成分 (但し $i \neq n$ とする) を求めてみよう。

$$\begin{cases} x_{i1} {}^1P_1 + x_{i2} {}^1P_2 + \cdots + x_{i,i-1} {}^1P_{i-1} + 0 + x_{i,i+1} {}^1P_{i+1} + \cdots + x_{in} {}^1P_n = 0 \\ x_{i1} {}^2P_1 + x_{i2} {}^2P_2 + \cdots + x_{i,i-1} {}^2P_{i-1} + 0 + x_{i,i+1} {}^2P_{i+1} + \cdots + x_{in} {}^2P_n = 0 \\ \vdots \\ x_{i1} {}^{n-2}P_1 + x_{i2} {}^{n-2}P_2 + \cdots + x_{i,i-1} {}^{n-2}P_{i-1} + 0 + x_{i,i+1} {}^{n-2}P_{i+1} \\ \quad + \cdots + x_{in} {}^{n-2}P_n = 0 \end{cases}$$

まず $\Delta \equiv \det[\downarrow P_1, \downarrow P_2, \dots, \downarrow P_{i-1}, \downarrow P_{i+1}, \dots, \downarrow P_{n-1}] \neq 0$ として

$$x_{ij} = \frac{{}^i \Delta_j}{\Delta} = \frac{-x_{in} \det[\downarrow P_1, \dots, \downarrow P_{i-1}, \dots, \downarrow P_{n-1}]}{\Delta}$$

ここで、 $x_{in} = (-1)^{i+n} \Delta = (-1)^{i+n} \Delta_{1,2,\dots,\hat{i},\dots,n}$ としておけば、全てが巧く行くのである。〈注：(は)と合う〉

実際、上の式より

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (-1)^{i+n+1} \det[\downarrow P_1, \dots, \downarrow P_{i-1}, \dots, \downarrow P_{n-1}] \\ &= (-1)^{i+j} \varepsilon \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i & j \end{pmatrix} \Delta_{1,2,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,n} \quad (\because (は)より) \end{aligned}$$

よって、この等式が言えれば、全てが巧く行くのである。

〈注： $j \geq i+1$ だと、 $\downarrow P_n$ を最後に持って行くには、 $(n-1)-j \equiv n+(j+1) \pmod{2}$ だけ移動すればよいから、左辺 $= (-1)^{(i+n+1)+(n+j+1)} \Delta_{1,2,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,n}$

$$= (-1)^{i+j} \varepsilon \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \Delta_{1,2,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,n} \equiv \text{右辺でよい。}$$

また、 $j \leq i-1$ のとき、 $\downarrow P_n$ を尻に持って行くには $(n-2)-j \equiv n+j \pmod{2}$ だけ移動すればよいから、左辺 $= (-1)^{(i+n+1)+(n+j)} \Delta_{1,2,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,n}$

$$= (-1)^{i+j} \varepsilon \begin{pmatrix} j & i \\ i & j \end{pmatrix} \Delta_{1,2,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,n} \text{ でこれもよい。}$$

これで、後は $n=5$ のときと同じように ${}^1P_3 = {}^2P_4 = \dots = {}^{n-2}P_n = 1$ 、他は 0 として、検算が出来て全てが完了したことになった。〔証了〕

$$[\text{例}] \cos \theta = \frac{3}{4} \text{ のとき, } \sin \theta = \frac{\sqrt{16-9}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ で}$$

あるから $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ となる。このとき $n=5$ ($m=n-2=3$) の公式で計算できることを示す。〈注：今の所、これだけしか例がない。一般には後で示す“平面から見た回転の公式”で解けることを定理の形で示せる。〉

下記の表で、軸 $[p, q, r]$ の方向比が表わせるから、(それは $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ の内積が互いに 0 で直交する),

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & 1, 1, 0, & 1, & 2 & & \\ q & 1, 1, 2, & 0, & -1 & & \\ r & 1, 1, -1, & -2, & 0 & & \end{array} \quad \begin{aligned} G' &= [g_{ij}] \text{ (但し, } g_{ij} = \\ & p p_j + q q_j + r r_j), H' = \\ & [h_{ij}] \text{ (但し } h_{ii} = 0, h_{ij} = \\ & (-1)^{i+j} \varepsilon \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i & j \end{pmatrix} \det[\downarrow p_{j_1}, \downarrow p_{j_2}, \downarrow p_{j_3}] \text{ (但し } i_1 = \min(i, \end{aligned}$$

$j), i_2 = \max(i, j), j_1 < j_2 < j_3$ で $\{i_1, i_2; j_1, j_2, j_3\}$ は 1 から 5 までの自然数の全体) と区別して大文字 G_{ij}, H_{ij} で表わして計算しよう (何となれば、 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ はまだ正規化されていないから)。

$$\begin{aligned} G_{11} &= 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 = G_{22}, G_{33} = 0^2 + 2^2 + (-1)^2 = 5 \\ &= G_{44} = G_{55}, G_{12} = 3, G_{13} = 0 + 2 + (-1) = 1, G_{14} = 1 + \\ &0 + (-2) = -1, G_{15} = 2 + (-1) + 0 = 1; G_{23} = 0 + 2 + \\ &(-1) = 1, G_{24} = 1 + 0 + (-2) = -1, G_{25} = 2 + (-1) + \end{aligned}$$

$$0 = 1; G_{34} = 0 + 0 + 2 = 2, G_{35} = 0 + (-2) + 0 = -2; G_{45} = 2 + 0 + 0 = 2 \text{ より}$$

$$\therefore G' = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3, & 3, & 1, & -1, & 1 \\ 3, & 3, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & 5, & 2, & -2 \\ -1, & -1, & 2, & 5, & 2 \\ 1, & 1, & -2, & 2, & 5 \end{bmatrix} = G$$

$$H_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0, & 1, & 2 \\ 2, & 0, & -1 \\ -1, & -2, & 0 \end{vmatrix} = 7, H_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 2 \\ 1, & 0, & -1 \\ 1, & -2, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7, H_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 1, & 2, & -1 \\ 1, & -1, & 0 \end{vmatrix} = 7, H_{15} = (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 1, & 0, \\ 1, & 2, \\ 1, & -1, \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} = -7; H_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 2 \\ 1, & 0, & -1 \\ 1, & -2, & 0 \end{vmatrix} = 7, H_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1, \\ 1, \\ 1, \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 2 \\ 2, & -1 \\ -1, & 0 \end{vmatrix} = -7, H_{25} = (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 1, & 2, & 0 \\ 1, & -1, & -2 \end{vmatrix} = 7; H_{34} = (-1)^{3+4}$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 2 \\ 1, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = 0, H_{35} = (-1)^{3+5} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 0; H_{45} = 0 \text{ より}$$

$$\therefore H' = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 0, & 7, & -7, & 7, & -7 \\ -7, & 0, & 7, & -7, & 7 \\ 7, & -7, & 0, & 0, & 0 \\ -7, & 7, & 0, & 0, & 0 \\ 7, & -7, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} = H$$

よって

$$\mathcal{R}(\theta) = \frac{3}{4}E + \frac{1}{4}G' + \frac{\sqrt{7}}{4}H' = \frac{21}{28}E + \frac{1}{28}G + \frac{1}{28}H =$$

$$\frac{1}{28} \begin{bmatrix} 24, & 10, & -6, & 6, & -6 \\ -4, & 24, & 8, & -8, & 8 \\ 8, & -6, & 26, & 2, & -2 \\ -8, & 6, & 2, & 26, & 2 \\ 8, & -6, & -2, & 2, & 26 \end{bmatrix}$$

となる。

ここで $\mathbf{a}' = 28\mathbf{a}$ (但し $\mathbf{a} = (1, -1, 0, 0, 0)$) とすれば, $\mathbf{b}' \equiv \mathcal{R}(\theta)\mathbf{a}' = (14, -28, 14, -14, 14) = 14(1, -2, 1, -1, 1)$ であるから

$$\mathbf{b} = (1, -2, 1, -1, 1)$$

を得る。

実際, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 2 = 3, |\mathbf{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \mathbf{b} = \sqrt{1+4+1+1+1} = \sqrt{8}$ であるから,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \text{ で良い。}$$

5. 平面から見た回転の公式

いよいよ, 平面から見た回転の公式を導出する。不思議なことに, この公式群の方が証明が易しいのに,

$$\cos \theta = \frac{n}{m} \text{ (但し } m > 0 \text{ で, } |n| < m \text{ となる } m, n \text{ は}$$

互いに素の整数) がいつでも解ける最小次元数は 5 が証明出来るのは, こちらの公式だからである。〈注: 前の紀要で, 8 で割ったとき余りが 7 になるものは, 例えば今やった $\cos \theta = \frac{3}{4}, \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ は 4 次元では表現不可能がコンピュータでの計算結果で判っている訳である。〉

それを, 次の定理 5.1 の形で述べる。

[定理 5.1] n 次元のユークリッド空間において, 原点を始点として 2 個の互いに直交する単位ベクトル $[x_1, x_2, \dots, x_n], [y_1, y_2, \dots, y_n]$ をこの順での回転平面とみて, その直交補空間を動かさずに右ねじの方向に平面上の点を θ だけ回転する変換行列を $\mathcal{R}(\theta)$ とすれば,

$$\mathcal{R}(\theta) = E + (\cos \theta - 1) \times \mathcal{R}[c] + \sin \theta \times \mathcal{R}[s] \quad (\text{い})$$

$$b_{ij} = x_i x_j + y_i y_j \text{ (対称行列)} \quad (\text{ろ})$$

$$a_{ij} = -x_i y_j + y_i x_j = - \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \text{ (交代行列)} \quad (\text{は})$$

とかける行列である。

[証] これも一般の n ではなく, 次の定理 5.2 で使う $n = 5$ の場合の証明を先にやっておこう。

今迄の話から

$$\mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} x_1, y_1, p_1, q_1, r_1 \\ x_2, y_2, p_2, q_2, r_2 \\ x_3, y_3, p_3, q_3, r_3 \\ x_4, y_4, p_4, q_4, r_4 \\ x_5, y_5, p_5, q_5, r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \\ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \\ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \\ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \end{bmatrix}$$

〈所で

$$\begin{pmatrix} -y_1, & -y_2, & -y_3, & -y_4, & -y_5 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \text{ より} \rangle$$

$$\therefore \mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} -x_1 y_1 + y_1 x_1, & -x_1 y_2 + y_1 x_2, & -x_1 y_3 + y_1 x_3, & -x_1 y_4 + y_1 x_4, & -x_1 y_5 + y_1 x_5 \\ -x_2 y_1 + y_2 x_1, & -x_2 y_2 + y_2 x_2, & -x_2 y_3 + y_2 x_3, & -x_2 y_4 + y_2 x_4, & -x_2 y_5 + y_2 x_5 \\ -x_3 y_1 + y_3 x_1, & -x_3 y_2 + y_3 x_2, & -x_3 y_3 + y_3 x_3, & -x_3 y_4 + y_3 x_4, & -x_3 y_5 + y_3 x_5 \\ -x_4 y_1 + y_4 x_1, & -x_4 y_2 + y_4 x_2, & -x_4 y_3 + y_4 x_3, & -x_4 y_4 + y_4 x_4, & -x_4 y_5 + y_4 x_5 \\ -x_5 y_1 + y_5 x_1, & -x_5 y_2 + y_5 x_2, & -x_5 y_3 + y_5 x_3, & -x_5 y_4 + y_5 x_4, & -x_5 y_5 + y_5 x_5 \end{bmatrix}$$

で, $a_{ii} = 0, a_{ji} = -a_{ij} = -x_i y_j + y_i x_j$ でよい。

次に

$$\mathcal{R}[c] = \begin{bmatrix} x_1, y_1, p_1, q_1, r_1 \\ x_2, y_2, p_2, q_2, r_2 \\ x_3, y_3, p_3, q_3, r_3 \\ x_4, y_4, p_4, q_4, r_4 \\ x_5, y_5, p_5, q_5, r_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \\ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \\ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \\ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \end{bmatrix}$$

〈所で

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix} \text{より}$$

$$\therefore \mathcal{R}[c] = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2, x_1x_2 + y_1y_2, x_1x_3 + y_1y_3, \\ x_2x_1 + y_2y_1, x_2^2 + y_2^2, x_2x_3 + y_2y_3, \\ x_3x_1 + y_3y_1, x_3x_2 + y_3y_2, x_3^2 + y_3^2, \\ x_4x_1 + y_4y_1, x_4x_2 + y_4y_2, x_4x_3 + y_4y_3, \\ x_5x_1 + y_5y_1, x_5x_2 + y_5y_2, x_5x_3 + y_5y_3, \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1x_4 + y_1y_4, x_1x_5 + y_1y_5 \\ x_2x_4 + y_2y_4, x_2x_5 + y_2y_5 \\ x_3x_4 + y_3y_4, x_3x_5 + y_3y_5 \\ x_4^2 + y_4^2, x_4x_5 + y_4y_5 \\ x_5x_4 + y_5y_4, x_5^2 + y_5^2 \end{bmatrix}$$

で, $b_{ii} = x_i^2 + y_i^2$, $b_{ij} = b_{ji} = x_ix_j + y_iy_j$ でよい。

一般の n の場合も, 同様に証明される。〈注: 定理 4.1 に比べたら証明は格段に易しい。〉 [証了]

次に定理 5.1 の応用として, 定理 5.2 を述べる。これは前紀要の課題の決定的な解答である。

[定理 5.2] $\cos \theta = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素の整数で, $m > |n| > 0$ とする) のとき, $\sin \theta = \frac{p\sqrt{q}}{m}$ (但し p, q は正の整数で, q の因子には平方数は含まれないとする) とした場合, いつでも始点を共有する, そのなす角が θ となる 5 次元の格子点ベクトルの対が存在する。

〈注: 前紀要の [定理 4] を考慮して, こちらの q は 0 でない 4 つの平方数の和としてよい。また, 仮定から, q は 4 で割り切れないとしてよい。〉

[証明] $\sin \theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$ より

$$p\sqrt{q} = \sqrt{m^2 - n^2} \quad (1)$$

が分かる。また, 〈注〉により

$$q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (2)$$

としてよい。(但し, a, b, c, d は正の整数)

すると, 組 $\{a, b, c, d\}$ の中の 1 つは奇数, もう 1 つは偶数となるものが存在する。(何となれば, 4 つとも奇数もしくは偶数だと q が 4 で割り切れるから。)

よって, 5 次元ベクトル $\vec{u} = [a, b, c, d, 0]$ に対して $\vec{v} = [0, 0, d, -c, w]$ を考えて, $|\vec{v}|^2$ が平方数とな

るように, w を決定してみよう。〈注: $\vec{u} \perp \vec{v}$ 〉

勿論, $\{c, d\}$ は夫々問題の奇数, 偶数を表わす。よって $s^2 \equiv c^2 + d^2 + w^2 \Leftrightarrow s^2 - w^2 = (c^2 + d^2) \times 1 \Leftrightarrow s + w = c^2 + d^2$ (イ), $s - w = 1$ (ロ) と取れば可。

$$\text{よって } 2s = c^2 + d^2 + 1 \text{ かつ } 2w = c^2 + d^2 - 1 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}(c^2 + d^2 + 1), w = \frac{1}{2}(c^2 + d^2 - 1) \quad (\text{ハ})$$

で出来た。

つまり, (ハ) により $w, |\vec{v}| = s$ が巧く決定出来た。これらにより, 全てが巧く計算できるのである。

$$\begin{cases} \vec{x} \equiv \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{q}} [a, b, c, d, 0] \\ \vec{y} \equiv \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = \frac{1}{s} [0, 0, d, -c, w] \end{cases} \quad (3)$$

を前定理の (ろ), (は) に代入して (イ) を計算すれば, $\mathcal{R}(\theta)$ の成分が全て有理数となり, 前紀要 [定理 4] の証明と並行して, 同様な証明が可能なのである。

実際

$$(\text{ろ}) \text{ より } b_{ij} = \frac{1}{q} u_i u_j + \frac{1}{s^2} v_i v_j \quad (\text{ろ})'$$

$$(\text{は}) \text{ より } a_{ij} = -\frac{1}{s\sqrt{q}} \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} \quad (\text{は})'$$

よって, (イ) より

$$\mathcal{R}(\theta) = E_5 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \times \frac{1}{s^2 q} [s^2 u_i u_j + q v_i v_j] + \frac{p\sqrt{q}}{m} \times \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{bmatrix} - & \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{イ})'$$

で, $ms^2 q \mathcal{R}(\theta)$ の成分は整数だから, 前紀要の [定理 4] と同じように言えるのである。[証了]

〈注: $mqs^2 \mathcal{R}(\theta)$ の (i, j) 成分は

$$mqs^2 \mathcal{R}(\theta) = mqs^2 E - (m - n) \{s^2 [u_i u_j] + q [v_i v_j]\} - spq \begin{bmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{bmatrix} \quad (\text{イ})''$$

となる。(但し $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ とする。)

[例] $\cos \theta = \frac{1}{4}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ を (イ)'' を使って,

$\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{4})$ を与える 2 つの格子点ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を求めてみよう。

$\vec{u} = [1, 1, 2, 3, 0]$, $\vec{v} = [0, 0, 3, -2, 6]$ としてよい。

〈夫は $15 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$ であるから, まず $\vec{u} = [1, 1, 2, 3, 0]$ が判る。次に $\vec{v} = [0, 0, 3, -2, w]$, $s \equiv |\vec{v}|$ として $s^2 - w^2 = 3^2 + (-2)^2 = 13 = 13 \times 1 \Leftrightarrow s + w = 13$, $s - w = 1 \Leftrightarrow 2s = 13 + 1 = 14$, $2w = 13 - 1 = 12 \Leftrightarrow w = 6, s = 7$ でよい。〉

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{15}} [1, 1, 2, 3, 0]$$

$$\therefore \vec{y} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = \frac{1}{7} [0, 0, 3, -2, 6]$$

また, $m = 4, n = 1, p = 1, q = 15, s = 7$ より (い)^{*} は

$$2940\mathcal{R}(\theta) = 2940E - 147[u_i u_j] - 45[v_i v_j] - 105[(uv)_{ij}]$$

となる。(但し $(uv)_{ij} \equiv \begin{bmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{bmatrix}$ とする)

計算を実行した結果は次のようになった。

$$[u_i u_j] = \begin{bmatrix} 1, 1, 2, 3, 0 \\ 1, 1, 2, 3, 0 \\ 2, 2, 4, 6, 0 \\ 3, 3, 6, 9, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}, [v_i v_j] = \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 9, -6, 18 \\ 0, 0, -6, 4, -12 \\ 0, 0, 18, -12, 36 \end{bmatrix}$$

$$[(uv)_{ij}] = \begin{bmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 0, 3, -2, 6 \\ 0, 0, 3, -2, 6 \\ -3, -3, 0, -13, -12 \\ +2, +2, 13, 0, 18 \\ -6, -6, -12, -18, 0 \end{bmatrix}$$

を, まず確定してから, (い)^{*} を決定するのである。

その結果, (い)^{*} の右辺は次の通りとなる。

$$2940\mathcal{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 2793, -147, -609, -231, -630 \\ -147, 2793, -609, -231, -630 \\ 21, 21, 1947, 753, -2070 \\ -651, -651, -1977, 1437, -1350 \\ 630, 630, 450, 2430, 1320 \end{bmatrix}$$

よって

$$\mathbf{a}' = [1, 1, 2, 3, 0] \times 2940 \text{ を } \mathcal{R}(\theta) \text{ (但し } \theta = \cos^{-1}$$

$(\frac{1}{4})$) に右から施すと, 次の $\mathbf{b}'$ を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= [735, 735, 6195, -945, 9450] \\ &= 105[7, 7, 59, -9, 90] \end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{a} = [1, 1, 2, 3, 0] \times 28, \mathbf{b} = [7, 7, 59, -9, 90] \text{ を得る。}$$

$$\text{実際, } |\mathbf{a}| = 28\sqrt{15} = \sqrt{28^2 \times 15} = \sqrt{11760} = |\mathbf{b}|。$$

$$\text{また, } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 28 \times (7+7+118-27) = 28 \times 105$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{28 \times 105}{28 \times 28 \times 15} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \text{ で良い。}$$

また, $\mathbf{a}' = [0, 0, 3, -2, 6] \times 2940$ を $\mathcal{R}(\theta)$ の右から掛けると, 次の $\mathbf{b}'$ を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= [-5145, -5145, -8085, -16905, 4410] \\ &= 735[-7, -7, -11, -23, 6] \end{aligned}$$

よって,

$$\mathbf{a} = 4[0, 0, 3, -2, 6], \mathbf{b} = [-7, -7, -11, -23, 6]$$

$$\text{実際, } |\mathbf{a}| = 4\sqrt{49} = 4 \times 7 = 28 = \sqrt{28^2} = \sqrt{784}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 11^2 + 23^2 + 6^2} = \sqrt{784} = 28 \text{ でよい。}$$

$$\text{また, } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 \times (0+0-33+46+36) = 4 \times 49$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4 \times 49}{28 \times 28} = \frac{2 \times 2 \times 7 \times 7}{4 \times 4 \times 7 \times 7} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ で良い。}$$

〈注: 他の [例] として

$$\cos \theta = \frac{3}{11}, \sin \theta = \frac{\sqrt{11^2 - 3^2}}{11} = \frac{\sqrt{112}}{11} = \frac{\sqrt{16 \times 7}}{11}$$

$$= \frac{4\sqrt{7}}{11}; \cos \theta = \frac{11}{19}, \sin \theta = \frac{\sqrt{19^2 - 11^2}}{19} = \frac{\sqrt{240}}{19}$$

$$= \frac{\sqrt{16 \times 15}}{19} = \frac{4\sqrt{15}}{19} \text{ 等も取り上げたかったのだが,}$$

紙数の関係で読者に研究課題として残すことにする。〉

6. 注意すべき事柄

まず, 定理4.1の $\sin \theta$ に係わる行列の成分は $n = \infty$ のとき, 無限行列式となることである。また, 軸の作る線型空間の余次元は2という制限が入ることである。これが n が有限のときとの大きな違いである。

$$\text{また, } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \times |\vec{b}|}$$

が有理数のとき, $|\vec{a}| = p\sqrt{q}, |\vec{b}| = s\sqrt{t}$ と $\sqrt{\quad}$ の外に平方数を追い出せば, q, t を構成する単一素数の組は完全に一致するから, $q = t$ となる。(∵ 分母 = 整数より)

よって, $\vec{a}, \vec{b}$ の代わりに $\vec{a}' \equiv s\vec{a}, \vec{b}' \equiv p\vec{b}$ とすれば, $|\vec{a}'| = |\vec{b}'|$, かつ $\vec{a}', \vec{b}'$ のなす角は $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角と同じである。従って, 最初から $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ の仮定をつけても一般性を失わなかった訳である。

$$\begin{aligned} \text{最後に, } \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} \\ &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} \end{aligned}$$

分子 c は3つ以下の平方数の和で表わされることを注意する。

$$\text{それは } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Leftrightarrow c = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \text{ であるからである。}$$

— 以 上 —

＜参考文献＞

1. 河島 博: 小山高専紀要(No.27) 1995
2. 佐武 一郎: 線型代数学 1974
3. 古屋 茂: 行列と行列式 1959
4. 杉浦 光夫: 解析入門 I, II 1980, 1985
5. 高橋 礼司: 複素解析 1990

(受理年月日 1997年9月30日)