プロセス制御系設計用CADソフト（その11）
—2自由度ロバストPIDコントローラの調整—

黒須　茂，　笠原雅人，小山善廣*

CAD Software for Designing Process Control System
—Tuning Method of Robust PID Controller—

Shigeru KUROSU. Masato KASAHARA, Yoshihiro KOYAMA*

1．はじめに

空調制御において，部屋の温度制御は1入力1出力の制御系として考えられる。部屋は常に外乱にさらされているため，外乱抑制特性，目標値追従特性の2つが応答特性を1つのPIDコントローラで同時によくすることは困難である。これら2つの特性を適切にするには，2自由度PIDコントローラが不可欠となる。また，部屋のモデルは，干渉，分布定数といった複雑さから数学モデルを得ることは至難である。したがって、数学モデルと実際のモデルとの差であるモデル化誤差の影響を考慮したロバストPIDコントローラの設計法が重要となる。

著者らは，すでに1入力1出力の2自由度PIDコントローラを取り上げ，プラントを一次おくれ＋むだ時間系とし，その調整法を検討した。調整法の中で部分的モデルマッチング法がロバスト性に優れていることを明らかにした[1)]。ロバスト性を考慮に入れたPIDコントローラの設計法に関しては，佐伯による2ディスク型混合感度問題として定式化され，実用性の観点から興味深い研究である[2)]。

＊平成8年度機械工学科卒業生（現ニッサンエアロスペースエンジニアリング㈱）

本報告では，プラントの伝達関数を一次おくれ＋むだ時間系として部分的モデルマッチング法による2自由度PIDパラメータを求め，その調整値を基に2ディスク型混合感度問題を解き，ロバスト性を考慮に入れたPIDコントローラの簡易調整法を提案する。提案した調整法と部分的モデルマッチング法により2自由度PIDコントローラを設計し，シミュレーションにより応答特性を比較検討する。

2．2自由度PID制御系の構成

Fig. 1に2自由度PID制御系のブロック線図を示す。プラントの伝達関数 $G_p(s)$ は一次おくれ＋むだ時間

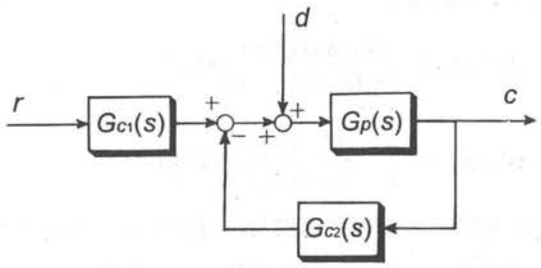


Fig.1:Two degrees of freedom PID controller

系とし，

$$G_p(s)=\frac{e^{-L_p s}}{1+T_p s} \tag{1}$$

時定数 T_p，むだ時間 L_p で与えられるものとする。

コントローラの伝達関数 $G_{c1}(s)$, $G_{c2}(s)$ はつぎのように与える。

$$G_{c2}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \frac{s}{1+\tau s} \tag{2}$$

$$G_{c1}(s) = c_p K_p + c_i \frac{K_i}{s} + c_d K_d \frac{s}{1+\tau s} \tag{3}$$

ただし, K_p, K_i, K_d は比例, 積分, 微分, ゲイン, c_p, c_i, c_d は2自由度化パラメータ[3], T_i, T_d は積分, 微分時間である。D動作は高周波域でゲインが高くなるので不完全微分として, $\tau = 0.1\ T_d = 0.1(K_d/K_p)$ としている。コントローラ $G_{c1}(s)$ における c_i は, オフセットをなくすために $c_i = 1$ と固定している。

3．部分的モデルマッチング法による2自由度PID制御系の設計

PIDパラメータの調整法としては昔から多くの方法が提案されているが, ロバスト性の高いことから部分的モデルマッチング法を用いることにし, 次の手順にしたがって1自由度PIDの設計から拡張を行い, 2自由度PIDパラメータを求めることにする。

1. 外乱が最適に抑制されるようにPIDパラメータを調整し, $G_{c2}(s)$ を定める。
2. $G_{c2}(s)$ を不変にし, 目標値への追従性が最適になるようにコントローラ $G_{c1}(s)$ を調整する。

Fig. 1において目標値 r, 外乱から制御量 c にいたるそれぞれの閉ループ伝達関数 W_{cr}, W_{cd} を求めると, つぎのようになる。

$$W_{cr}(s) = \frac{G_{c1}(s)G_p(s)}{1+G_{c2}(s)G_p(s)} r(s) \tag{4}$$

$$W_{cd}(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_{c2}(s)G_p(s)} d(s) \tag{5}$$

上式を参照モデルの伝達関数に部分的に一致させるように, PIDコントローラを調整する。参照モデルは, 北森モデルを採用し, つぎのように与える。

$$G_m(s) = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 \sigma s + \alpha_2 \sigma^2 s^2 + \alpha_3 \sigma^3 s^3 + \cdots} \tag{6}$$

ここに $\{\alpha_i\} = \{1, 1, 0.5, 0.15, 0.03, 0.003, \cdots\}$ 式(6)において, σ は時間スケールであり, 単位ステップ応答の60%に至る立ち上がり時間に該当する。2自由度PIDコントローラの設計は, 式(5)を式(6)×(s/K_i) に等置することにより $G_{c2}(s)$ が求まり, 式(4)を式(6)に等置することにより $G_{c1}(s)$ が機械的に求められる((文献1)に詳しく導いている)。北森により, 制御系のループからむだ時間を追い出し制御系を設計する方法[4]が提案されているが, プラントのむだ時間 L_p が時定数 T_p に比べ大きくない ($L_p/T_p < 1$) と仮定し, むだ時間 L_p に対して *Padē* 近似を用いることにする[1]。*Padē* 近似における誤差については附録1を参照。

プラントの時定数 $T_p = 10$〔min〕に固定し, むだ時間 $L_p = 1 \sim 10$〔min〕に対して, 部分的モデルマッチング法によって求めたPIDパラメータをTable 1に示す。L_p/T_p に対してPIDパラメータをプロットしたのがFig. 2である。

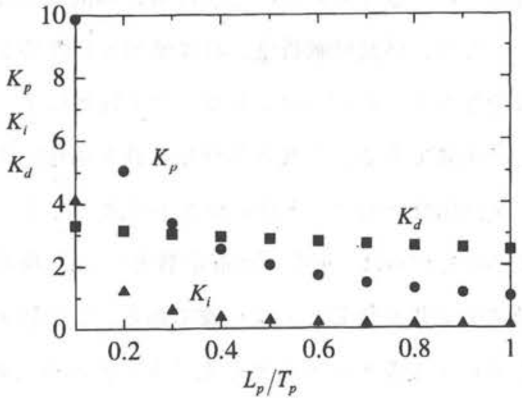


Fig.2 (a)

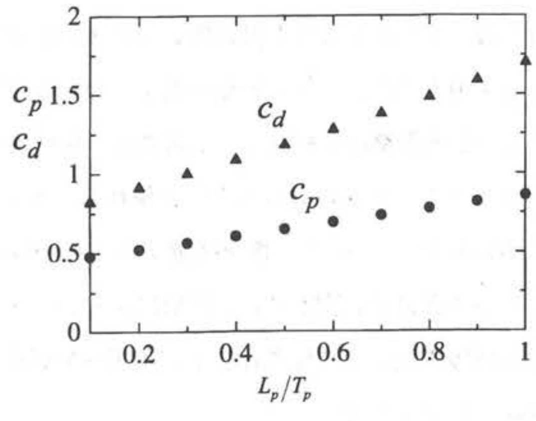


Fig.2 (b)

Table 1　Values of PID parameters

L_p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_p	9.87	5.05	3.38	2.54	2.03	1.69	1.45	1.27	1.13	1.02
K_i	4.11	1.20	0.60	0.37	0.26	0.19	0.15	0.12	0.10	0.090
K_d	3.26	3.13	3.04	2.95	2.86	2.77	2.70	2.63	2.57	2.50
C_p	0.48	0.52	0.56	0.60	0.65	0.69	0.73	0.77	0.81	0.86
C_d	0.82	0.91	0.99	1.09	1.18	1.28	1.38	1.48	1.58	1.70

4．2自由度ロバストPIDコントローラの設計

部分的モデルマッチング法により求められたPIDコントローラに基づき，ロバスト性を考慮しパラメータの修正を行う。Fig. 1の2自由度PID制御系において，プラントの伝達関数とコントローラとでつくられる閉ループ系の感度関数$S(s)$と相補感度関数$T(s)$は

$$\left.\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1+G_{c2}(s)G_p(s)} \\ T(s) &= \frac{G_{c2}(s)G_p(s)}{1+G_{c2}(s)G_p(s)} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

である。ここに，フィードフォワードループの$G_{c1}(s)$は$S(s)$, $T(s)$に関与していない。したがって，ロバストに関する設計問題はフィードバックループの$G_{c2}(s)$だけを考慮すればよい。

感度特性，外乱抑制特性，ロバスト安定性の観点から$S(s)$, $T(s)$のゲイン特性がある値以下であることを設計仕様とした，つぎのような2ディスク型混合感度PID設計問題が定式化できる。

1．$|S(j\omega)| < \alpha(j\omega)$

2．$|T(j\omega)| < \beta(j\omega)$

を満たすフィードバックループのコントローラ$G_{c2}(s)$を求める。佐伯[2]は条件1，2以外に，閉ループ系は安定である条件3を付加しているが，プラントに安定な系を想定しているので，条件3を設計仕様から除外して考える。

本報告では，部分的モデルマッチング法で求めた積分ゲインK_iを固定し，残りの2つのパラメータK_p，K_dについて周波数ごとに条件1，2を満たすパラメータ集合$K_s(\omega)$, $K_T(\omega)$を定義し，それらの共通集合Kを求めることでパラメータの存在を評価し，Kが空集合になる寸前のパラメータを最適とする図的処理による方法をそのまま継承する[2]。$\alpha(\omega)$と$\beta(\omega)$の設定の仕方について述べると，まず$\alpha(\omega)$は次のように与える。

$$\alpha(\omega) = \left|\frac{s+\alpha_1/10}{s+\alpha_1}\right| P_s(s=j\omega) \tag{8}$$

$S(s)$は低周波数域において$s/K_iG_p(0)$で与えられるので，この形状からこのゲインが0［dB］を切る点から離れた周波数α_1を決め，P_sをやや大きめの値に選定する。P_sは制御系のM_p値に関連するが，2自由度系では$G_{c1}(s)$によって改善できるので大きくても差し支えない。次に$\beta(\omega)$は，プラントのモデル化誤差$\triangle(s)$の逆数$1/\triangle(j\omega)$によって与えられる。つまり，$G_p(s)$においてT_pとL_pの変動分δ_T，δ_Lとしたとき，T_p'とL_p'は$T_p' = T_p(1+\delta_T)$, $L_p' = L_p(1+\delta_L)$となり

$$\begin{aligned} \triangle &= \frac{G_p'(s)}{G_p(s)} - 1 \\ &= \frac{(T_ps+1)e^{-L_p\delta_Ls} - \{T_p(1+\delta_T)s+1\}}{T_p(1+\delta_T)s+1} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。こうして，$\beta(\omega)$が決まれば，高周波数域における$T(s)$は，

$$\lim_{s\to\infty} T(s) = \left(K_p + \frac{K_d}{\tau}\right) G_p(\infty) \tag{10}$$

となり，$T(s)$の限界が大雑把に決まるもので，それから$S(s)$の形状，すなわち$\alpha(\omega)$も決まってくる。

5．ロバストPIDコントローラの調整値

モデル化誤差$\triangle(j\omega)$を計算するにあたり，時定数T_pとむだ時間L_pの変動分δ_T，δ_Lが減少させたときに$\triangle(j\omega)$が減少する傾向にある[1]。したがって，δ_T，δ_Lが負の値に変動したときのみを考える。（附録2を参照）

このときロバストPIDパラメータを求める手順は次のようになる。

1. 部分的モデルマッチング法で求めた積分ゲイン K_i を固定し，周波数 ω が0.1～19の範囲において $\beta(\omega)$ を計算し，集合 $K_T(s)$ を描く。
2. 部分的モデルマッチング法で求めた積分ゲイン K_i より $s/K_iG_p(0)$ が0dBを切る周波数より $\alpha(\omega)$ の α_1 および P_s を初期推定する。
3. $\alpha(\omega)$ を計算し，集合 $K_S(\omega)$ を描く。
4. 共通集合 $K(\omega)$ が得られ，かつ消滅寸前ならば，そのときの K_p , K_d をもって最適値とする。$K(\omega)$ が大きければ，P_s を減少させて再度計算する。$K(\omega)$ が空集合ならば，P_s を大きくして再度計算する。

手順にしたがい，δ_T , $\delta_L=-20\%$，-30%，-40% と変動させ，$T_p=10[\mathrm{min}]$ に対して $L_p=1\sim10[\mathrm{min}]$ と変化させた場合のPIDパラメータを求める。

Table 1 で求めた積分ゲイン K_i より $S/K_iG_p(0)$ が0［dB］を切る周波数より，$\alpha(\omega)$ の α_1 , P_s を初期推定し，試行錯誤によって α_1 と P_s を動かしてPIDパラメータを求める。δ_T , δ_L を20%減少させた場合に求められたPIDパラメータと α_1 , P_s の一覧表をTable 2 に示す。ここで部分的モデルマッチング法で求めた値に対するロバストコントローラを考慮して修正した値との相対比率を示したのがFig. 3 である。ここに，部分的モデルマッチング法によって求めたパラメータ(K_p , K_d)とロバスト性を考慮に入れたパラメータ(K_p' , K_d')との相対比率 δ_p , δ_d をつぎのように定義する。

$$\left.\begin{aligned}\delta_p&=\frac{K_p'}{K_p}\times100\ [\%]\\ \delta_d&=\frac{K_d'}{K_d}\times100\ [\%]\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Fig. 3 における◇，□，△はそれぞれ δ_T , δ_L が－20%，－30%，－40%のときの結果である。L_p/T_p に対し修正率がばらついているのは，視覚による試行錯誤によって探索していることに起因していると考えられる。

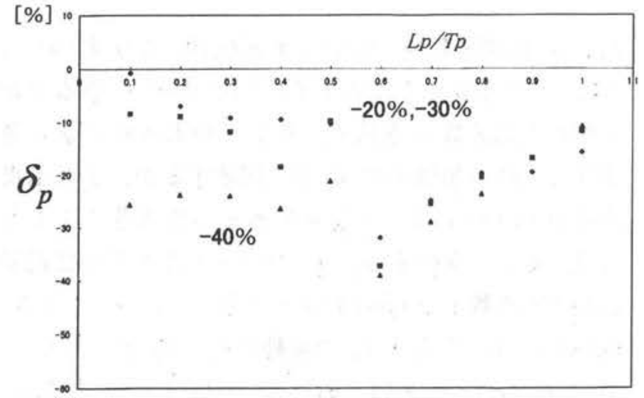


Fig.3 (a)

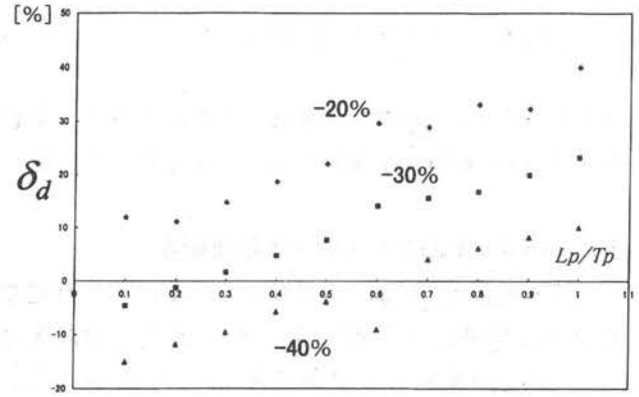
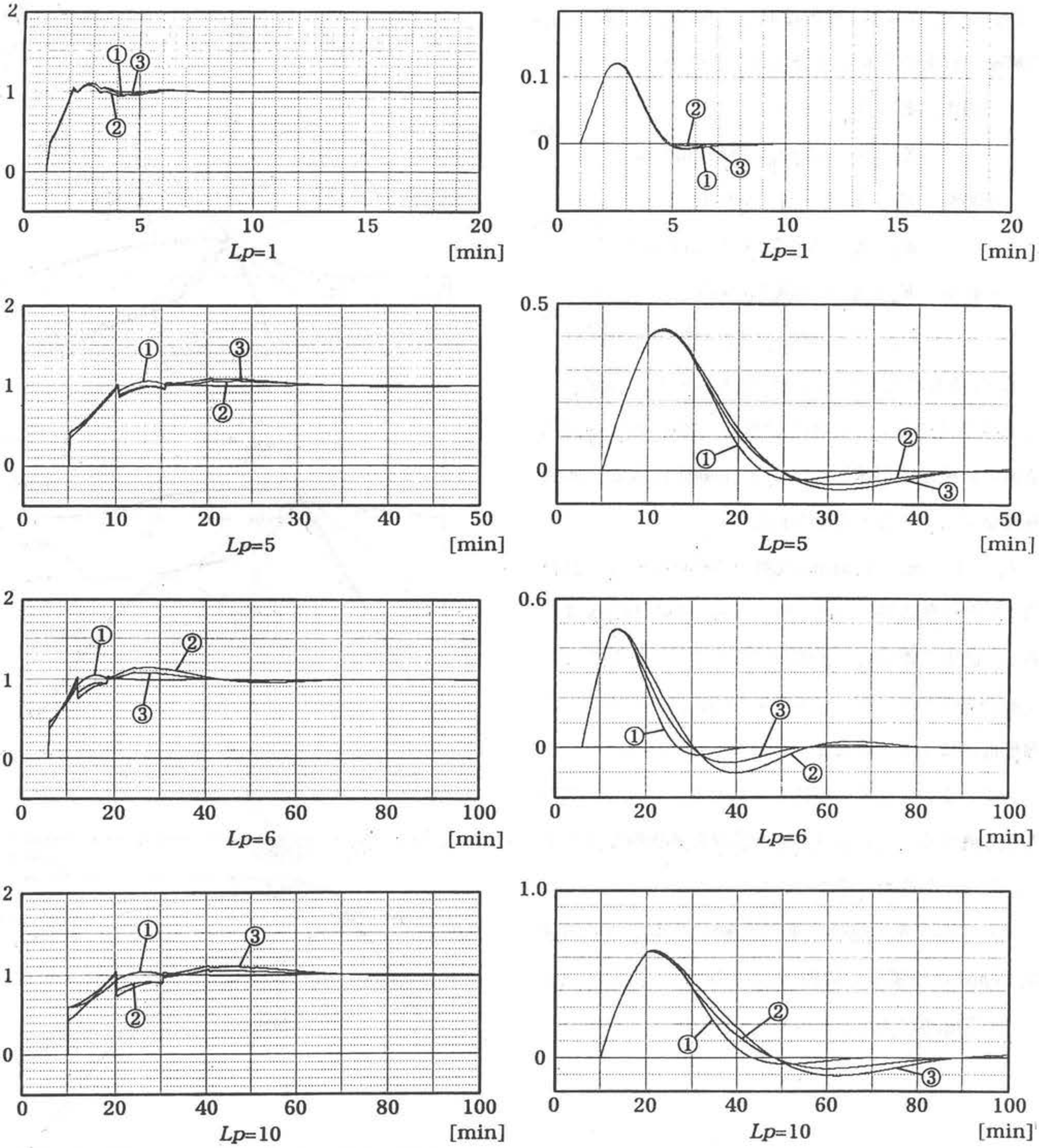


Fig.3 (b)

Table 2　Values of robust PID parameters

L_p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_p	9.80	4.70	3.07	2.30	1.84	1.15	1.09	1.02	0.91	0.86
K_i	4.11	1.20	0.60	0.37	0.26	0.19	0.15	0.12	0.10	0.090
K_d	3.65	3.48	3.49	3.50	3.50	3.59	3.48	3.50	3.40	3.50
P_s	6.30	3.90	3.19	2.65	2.37	2.05	1.90	1.75	1.71	1.61
α_1	4.00	1.10	0.59	0.36	0.25	0.18	0.14	0.10	0.08	0.05



(a) Reference tracking characteristics (b) Disturbance suppression characteristi

① responses tuned by the partial model matching method
② responses obtained by the two disk type mixed sensitivity problem
③ responses modified by the linear approximation

Fig.4 Comparison of closed—loop responses

Fig.3 (a), (b)より，線形近似して相対比率（δ_p , δ_d）の概略の目安を求めると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} -20\%\quad & K_p : \delta_p = -14.8\,[\,\%\,] \\ & K_d : \delta_d = 30(L_p/T_p) + 10\,[\,\%\,] \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} -30\%\quad & K_p : \delta_p = -17.1\,[\,\%\,] \\ & K_d : \delta_d = 30(L_p/T_p) - 5\,[\,\%\,] \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

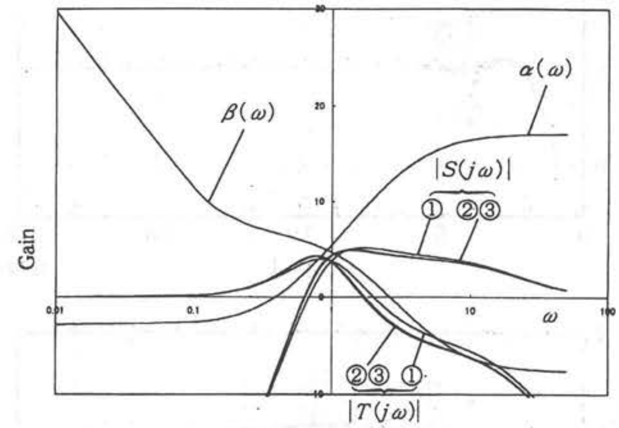
$$\left.\begin{aligned} -40\%\quad & K_p : \delta_p = -24.2\,[\,\%\,] \\ & K_d : \delta_d = 30(L_p/T_p) - 17\,[\,\%\,] \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

L_pの増大にともなってK_dを大きくとる理由は，L_pが大きくなると，ゲインは低下しないのに低周波領域で位相だけが遅れてしまい，D動作による位相進み補償をしていると考えられる。

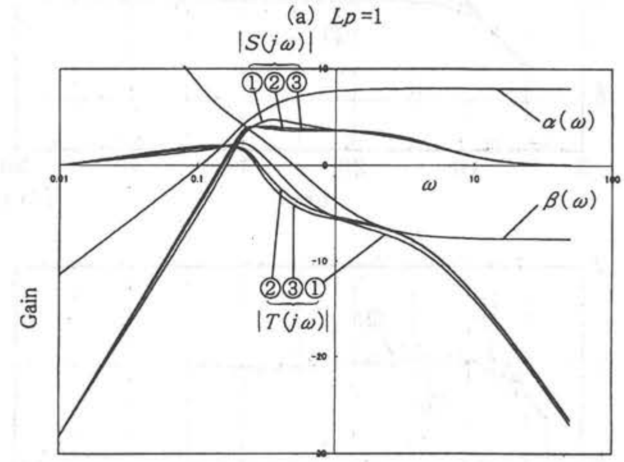
$L_p = 1$，5，10 [min] に対して目標値応答（目標値1）と外乱応答（外乱1％）を示したのがFig. 4である。図中の番号は，①部分的モデルマッチング法によるPIDパラメータ，②ロバストPIDパラメータ，③線形近似によって修正したロバストPIDパラメータを示している。これらの応答よりわかることはロバスト性を考慮することにより，制御性能を多少損なうものの，たいした差異は認められない。

また，δ_T , δ_Lが30%，40%変動した場合の感度関数$S(j\omega)$と相補感度関数$T(j\omega)$のゲイン特性を示したのがFig. 5である。

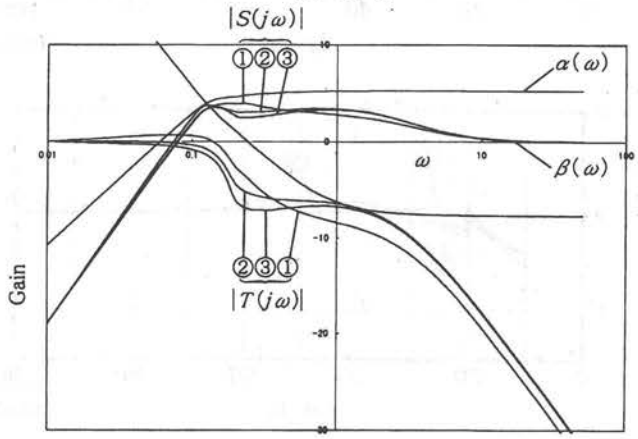
$\delta = -30\%$



(a) $Lp=1$



(b) $Lp=5$

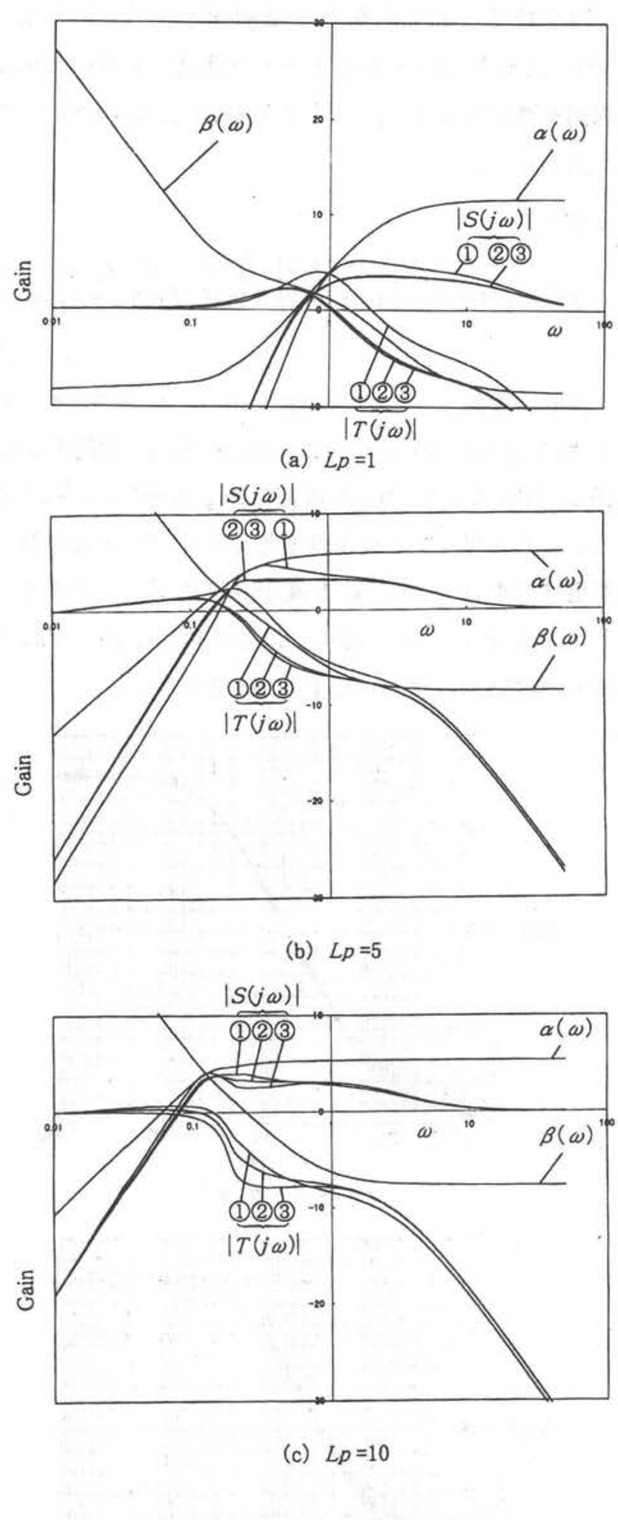


(c) $Lp=10$

①Partial model matching method.
②Two disk type mixed sensitivity method.
③Linear approximation method.

Fig.5—1 Gain diagrams of optimal | $S(j\omega)$ | and | $T(j\omega)$ | .Dotted lines designates $\alpha(\omega)$ and $\beta(\omega)$.

$\delta = -40\%$



(a) Lp =1

(b) Lp =5

(c) Lp =10

Fig.5－2

6．おわりに

一次おくれ＋むだ時間系のプラントを取り上げ部分的モデルマッチング法により２自由度PIDコントローラを求め，その調整値を基にロバスト性を考慮した簡易調整法を提案した。シミュレーションをみたところ，制御性能を損なうもののたいした差異はないことを確認した。現在，実用規模の実験プラントに適用し，有効性を確認中である。

参考文献

1．M. Kasahara et al.: A Tuning Method of Two Degrees of Freedom PID Controller; ASHRAE Transactions, Vol. 103, pt. 1, pp 278－289(1997)

2．佐伯正美：２ディスク型混合感度問題の最適PID制御器の設計法；システム制御情報学会論文誌，Vol. 7, No.12, pp. 520－527(1994)

3．須田信英：PID制御の高度化，システム／制御／情報，Vol. 38, No.10, pp539－544(1994)

4．北森ほか：むだ時間をループ外に追い出したPIDおよびI-PD制御系の設計法；第35回SICE学術講演予稿集(鳥取)，pp. 107－108(1996)

5．伊藤正美：自動制御概論，昭晃堂，pp. 206－208 (1968)

附　録　1

Padē の近似によると、むだ時間系はつぎのようなＳの有理関数で与えられる。

$$e^{-L_pS} = \frac{1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n}{1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ns^n} \qquad (\text{A}-1)$$

係数 a_1，a_2，$\cdots b_1$，$b_2\cdots$ は次数 n に応じて，Table A－1のように与えられる[5]。

むだ時間系 e^{-L_pS} と *Padē* の近似をBode線図で比較すると、Fig. A－1のようになる。ここに，ゲインは１のままで不変であり，位相だけが誤差をもつ。

位相の誤差が５％，10％，20％以下の ωL_p の値はTableA－2に示すとおりである。

Table A−1 *Padē* 近似

$n=1$	$a_1=-b_1=\frac{1}{2}L_p$
$n=2$	$a_1=-b_1=\frac{1}{2}L_p$, $a_2=b_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!}L_p^2$
$n=3$	$a_1=-b_1=\frac{1}{2}L_p$, $a_2=b_2=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2!}L_p^2$ $a_3=-b_3=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3!}L_p^3$
$n=4$	$a_1=-b_1=\frac{1}{2}L_p$, $a_2=b_2=\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{2!}L_p^2$ $a_3=-b_3=\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{3!}L_p^3$, $a_4=b_4=\frac{1}{70}\cdot\frac{1}{4!}L_p^4$
$n=5$	$a_1=-b_1=\frac{1}{2}L_p$, $a_2=b_2=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2!}L_p^2$ $a_3=-b_3=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3!}L_p^3$, $a_4=b_4=\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{4!}L_p^4$ $a_5=-b_5=\frac{1}{252}\cdot\frac{1}{5!}L_p^5$

Table A−2 Alowable range of phase

n	5%	10%	20%
1	$\omega L_p<0.8$	$\omega L_p<1.2$	$\omega L_p<1.9$
2	$\omega L_p<2.7$	$\omega L_p<3.5$	$\omega L_p<4.8$
3	$\omega L_p<4.9$	$\omega L_p<6.0$	$\omega L_p<7.9$
4	$\omega L_p<7.1$	$\omega L_p<8.5$	$\omega L_p<11.1$
5	$\omega L_p<9.4$	$\omega L_p<11$	$\omega L_p<14$

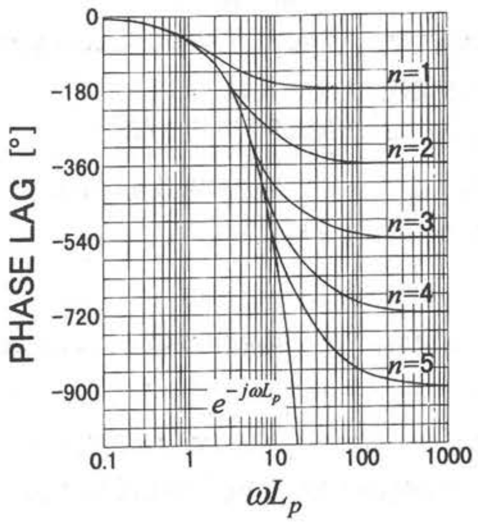


Fig.A−1

付　録　2

時定数 T_p，むだ時間 L_p の変動分 δ_T，δ_L を５％，10％，20％としたときのモデル化誤差 $\triangle(S)$ のBode線図を画いてみよう。(9)式より *Padē* 近似（$n=1$）を代入すると，

$$\triangle(s)=-\frac{(T_p\delta_T+L_p\delta_L)s+0.5L_pT_p\delta_L(2+\delta_T)s^2}{1+\{T_p(1+\delta_T)+0.5L_p\delta_L\}s+0.5L_pT_p\delta_L(1+\delta_T)s^2} \tag{A-2}$$

となる。変動分 $\delta_T>0$（増加），$\delta_L<0$（減少）としたときに(A−2)式を $\triangle_{+-}$ と表示した場合，変動率５％，10％，20％のときのBode線図はFig. A−2(a)〜(c)である。この結果，モデル化誤差としてロバスト安定性に影響するのは，δ_T，δ_L も減少させた $\triangle_{--}$ であることがわかる。５％，10％，20％に対して $\triangle_{--}(s)$ のBode線図を示したのが，Fig.A−3である。

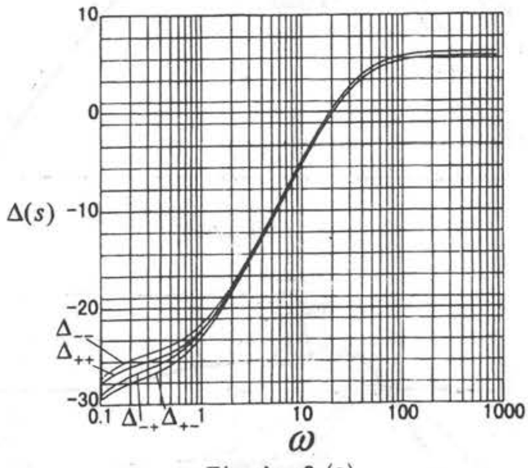


Fig.A−2 (a)

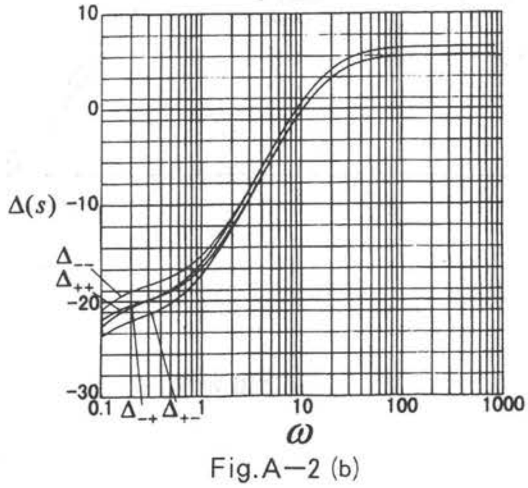


Fig.A−2 (b)

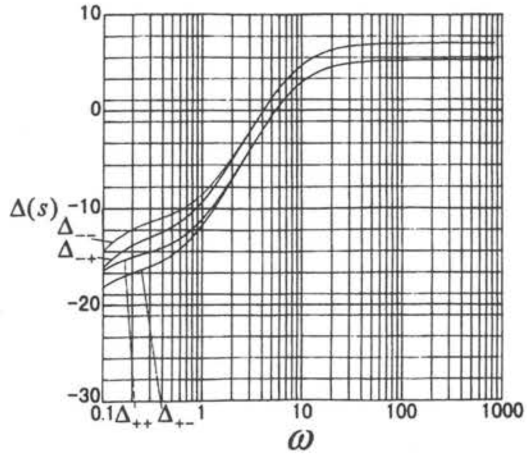


Fig.A—2 (c)

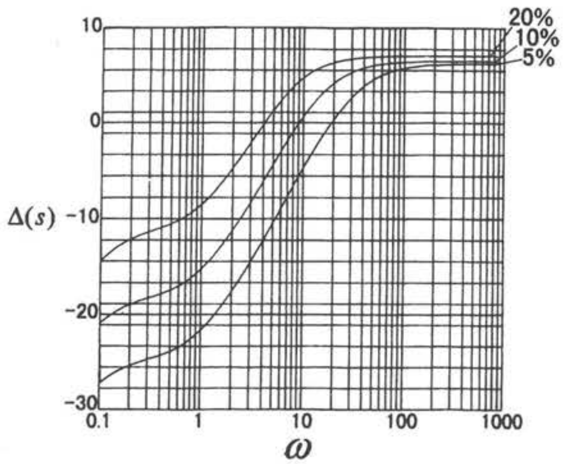


Fig.A—3

（受理年月日 1997年 9 月24日）