プロセス制御系設計用ＣＡＤソフト(その１２)
−むだ時間をもつ双線形系の安定解析−

渡利久規，黒須　茂，青柳洋平*，葛生克明**

CAD Software for Designing Process Control System −Stability Analysis of Bilinear System with Time Delayed Feedback−

Hisaki WATARI, Shigeru KUROSU, Yohei AOYAGI*, Yoshiaki KUZUU**

１．はじめに

省エネルギ効果に期待を寄せたVAV(Variable Air Volume) システム[1]は，近年多くの現場で用いられ，一般的なものとなっている。VAVによる室温制御は，個々の給気風量を変化させることで実現されるが，前提として給気温度が一定でなければならない。しかし，風量の変化は空調機における熱交換に直接影響するため，VAV制御とは独立に行われている給気温度制御系にとっては外乱となってしまう。現状では，給気風量変化が給気温度制御におよぼす影響などについて制御工学の観点からの研究が不十分なため，各制御系の間の干渉などがVAV制御を難しいものにしている。給気温度のハンティングはこうした状況下で生じており，理論的に裏付けられた解決法が求められている。

本研究は，既報[2~4]につづき，VAV制御により給気温度と室温との差に給気風量を乗じたものとして表わされる熱量が変化することで成り立っている点に着目し，集中定数化した空調機，および制御対象である部屋を，VAVの特性を考慮した双線形系として定式化を行い，その安定領域を求めることを目的としている。現実には，この積の項，すなわち双線形項が存在することで，VAV制御系の安定領域は解析的には容易に求められない[5]。そこで，筆者らはシミュレーションによる数値解析の結果を用いて双線形項の影響と系の安定領域との関係を求め，図形的特徴としての表現をおこなった。

２．ＶＡＶ制御系

双線形系とは，操作量と制御量の積による項が現われるシステムであり，操作量または制御量が一定のときそれぞれに関して線形関係を与える。たとえば，熱交換器において入力として流量を調整したり，機械振動系において入力としてダンパーの抵抗を調整したり，原子核分裂において反応係数が入力に比例する場合など双線形方程式がえられる。

検討するVAV制御はFig. 1に示すような給気温度制御系と室内温度制御系を併せもつ構造のシステムと

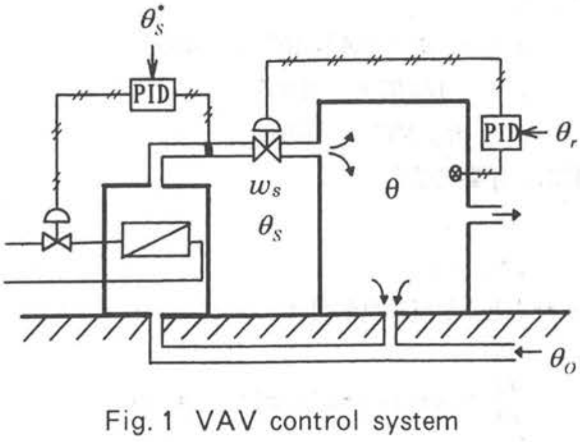


Fig. 1 VAV control system

＊平成８年度機械工学科卒業生（現長岡技術科学大学）
＊＊平成７年度機械工学科卒業生（現東京農工大学）

して表現できる。

ここでは，温度に関するダイナミクスにのみ注目し，湿度についてはふれないものとする。また，VAVの開度変化による圧力変動は無視する。

3．双線形系の定式化

室内の熱収支を用いると，温度に関してつぎの式が成り立つ。

$$MC\frac{d\theta}{dt} = w_s(\theta_s - \theta) + UA(\theta_o - \theta) \tag{1}$$

ここに，

MC：総熱容量［kcal/℃］

U：熱貫流率［kcal/(m²・min・℃)］

A：熱交換面積［m²］

w_s：給気熱量［kcal/(min・℃)］

θ_s：給気温度［℃］

θ_o：外気温度［℃］

基準温度の定義：

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \theta - \theta_o \\ \eta_s &= \theta_s - \theta_o \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

とおき，動作点の基準を外気温度におくことにすると，式(1)はつぎのように表わせる。

$$MC\frac{d\eta}{dt} = w_s(\eta_s - \eta) - UA\eta \tag{3}$$

さらに，定常状態 $\bar{w}_s$，$\bar{\eta}_s$ まわりで

$$\left.\begin{aligned} w_s &= \bar{w}_s + \Delta w_s \\ \eta &= \bar{\eta} + \Delta\eta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

とおき，微分変分 Δw_s，$\Delta\eta$ を立てなおすと，つぎの双線形系のモデルがえられる。

$$\frac{d\Delta\eta}{dt} = a\Delta\eta + n\Delta w_s\Delta\eta + b\Delta w_s \tag{5}$$

ただし

$$a = -(\bar{w}_s + UA)/MC = -0.093$$

$$n = -1/MC = -0.006$$

$$b = \Delta\eta_s/MC = -0.042$$

新しい定数の定義：

$$\left.\begin{aligned} \Delta\eta &\to x \\ \Delta w_s &\to u \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

とおくと，部屋の動特性モデルがつぎのようにえられる

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + nu(t)x(t) + bu(t) \tag{7}$$

制御方式

制御動作は，(ⅰ)P動作，(ⅱ)PI動作を考える。双線形系として問題を単純化するため，むだ時間 L_p は，制御入力 $u(t)$ に含めて[4]考察する。

(ⅰ)P動作

$$u(t) = k_c e(t - L_p) \tag{8}$$

ここで，

k_c：冷房ゲイン［kcal／(min・℃²)］

e：制御偏差 $(= x(t-L_p) - x_r(t-L_p))$

ただし目標値 x_r を 0 とおいて話を進める。したがって，(7)式は

$$u(t) = k_c x(t - L_p) \tag{8'}$$

(ⅱ)PI動作

P動作と同様に

$$u(t) = k_c\left\{x(t-L_p) + \frac{1}{T_i}\int_0^t x(t-L_p)dt\right\} \tag{9}$$

ここで，新しい変数，パラメータを導入して正規化を行う。

$$\left.\begin{aligned} &at = \tau,\ aL_p = l_p, \\ &aT_i = \tau_i,\ nk_c/a = p,\ bk_c/a = q \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(ⅰ)P動作

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(\tau) - px(\tau)x(\tau - l_p) - qx(\tau - l_p) \tag{11}$$

(ⅱ)PI動作

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = &-x(\tau) - px(\tau) \\ &\left\{x(\tau-l_p) + \frac{1}{\tau_i}\int_0^\tau x(\tau-l_p)d\tau\right\} \\ &-q\left\{x(\tau-l_p) + \frac{1}{\tau_i}\int_0^\tau x(\tau-l_p)d\tau\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

各定数の意味は，a：プラント時定数の逆数，q：プラントのゲイン定数，p：双線形項の影響指標，である。$p = 0$ のときは，双線形項を無視した一次おくれ＋むだ時間系を表わす。ここでは，$p > 0$ で冷房，$p < 0$ で暖房となる。

さて，(11)式，(12)式は双線形系であるから，平衡点 x^* が2つ存在することになる。つまり

P動作：

$$-x^* - px^{*2} - qx^* = 0 \tag{13}$$

より

$$x^* = 0 \quad \text{または} \quad -\frac{1+q}{p} \tag{14}$$

をえる。

PI動作：(12)式を一回微分すると，つぎのようになる。

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{dx}{d\tau} - p\frac{dx}{d\tau}\left\{x(\tau-l_p) + \frac{1}{\tau_i}\int_o^\tau x(\tau-l_p)d\tau\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&-px(\tau)\left\{\frac{dx}{d\tau}+\frac{1}{\tau_i}x(\tau-l_p)\right\} \\
&\quad -q\left\{\frac{dx}{d\tau}+\frac{1}{\tau_i}x(\tau-l_p)\right\}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

(15)式において，$\dfrac{d^2x}{d\tau^2}=0$，$\dfrac{dx}{d\tau}=0$とおくと，

$$
-px^*\frac{1}{\tau^i}x^*-q\frac{1}{\tau^i}x^*=0
$$

となり，

$$
x^*=0\text{ または }-\frac{q}{p} \tag{16}
$$

をえる。

この場合，目標値x_rを０とおいているから，平衡点は０として，そのまわりでの安定解析を行うことにする。しかしながら，もう片方の平衡点での挙動も将来的には検討しなければならない。

安定解析を行うにあたって，p，qの実用範囲を検討しておこう。(7)式，(2)式，(3)式を用いると，q/pはつぎのようになる。

$$
\begin{aligned}
q/p &= (\frac{b}{a}k_c)/(\frac{n}{a}k_c)=\frac{b}{n}=\varDelta\eta_s \\
&= \bar{\eta}-\eta_s=\bar{\theta}-\theta_s
\end{aligned}
\tag{17}
$$

部屋の平均温度$\bar{\theta}=25.16$［℃］，給気温度$\theta_s=18$［℃］として計算すると，q/pは7.16［℃］となる。したがって，q/pは実用的にはつぎの範囲を考えておけばよい。

$$
0\leq q/p\leq 20 \tag{18}
$$

３．安定解析の結果

まず，双線形系に対する安定の定義をしておこう。(11)式，(12)式において，軌跡$x(\tau)$が初期条件$x(0)=1.84$［℃］に対して，$\tau=100$のとき$|x(\tau)|<0.01$ならば安定であるとする。ここで，$\tau=100$ということは実時間で時定数の100倍であり，$\tau=100$で全体的には減衰振動の様相を呈していても，持続振動を繰り返しているときには不安定としている。

双線形項の影響指標pが非常に大きくなったとき，安定領域の一例（p動作，$l_p=0.05$）と（PI動作，$l_p=0.1$，$\tau_i=0.1$）を示すと，Fig. 2のようになる。これより，$p<5$の実用範囲であれば安定領域はqが一定であることを示唆していることがわかる。

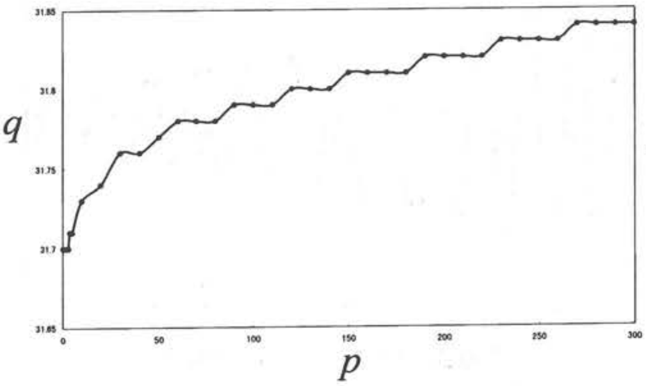
（ｉ）P動作

l_pをパラメータにとった安定限界をp，qの関係で示すと，Fig. 3のようになる。Fig. 3において，l_pに対して$q=$一定の直線を描いているが，直線より下の部分が安定領域である。これより明らかなように，qはpに対して不変であり，l_pが大きくなるにしたがって安定領域が狭まることがわかる。

l_pとqの関係を示したのがFig. 4であり，これよりつぎの式がなりたつ。

$$
q=1.88l_p^{-0.94} \tag{19}
$$

ここで，$l_p=0.1$のとき，$p=1,2$に固定してqを可変にしたさいの過渡応答を示すと，Fig. 5のようになる。(p，q)はTable 1に示す。これより，qの値は微小であるが，pとともに増加していることがわかる。



(a) P—action($l_p=0.05$)
Fig. 2 Global stability region

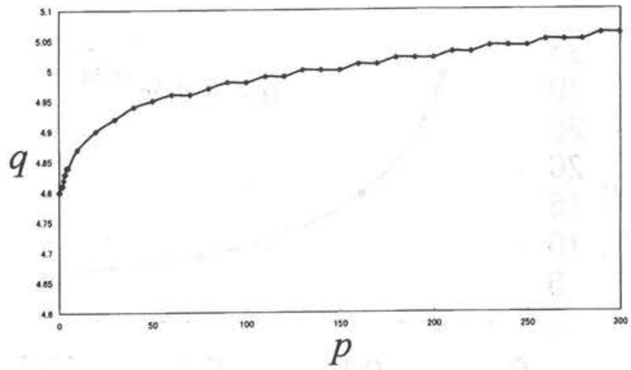


Fig. 2 (b) PI—action($l_p=0.1$, $\tau_i=0.1$)

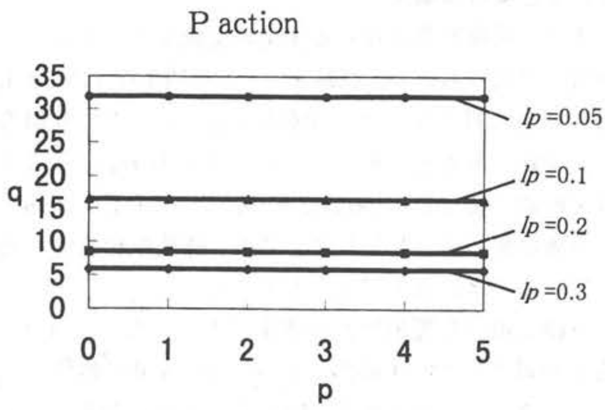


Fig. 3 Stability region on a parameter space(p , q)

双線形項の影響が増せば，安定領域は広がることを意味している。つまり，制御系の安定をよくすることになる。

Table 1 parameter(p,q)

p	不安定	安定限界	安　定
1	q =16.5	q =16.29	q =15.5
2	q =16.5	q =16.35	q =15.5

(ⅱ)PI 動作

l_p =0.05～0.3のときの積分時間 τ_i に対する安定限界をp, qの関係で示すとFig. 6 のようになる。τ_i と q の関係を示したのがFig. 7 である。これより，$\tau_i \geqq 0.5$ になるとP動作と同じ安定領域であることがわかる。

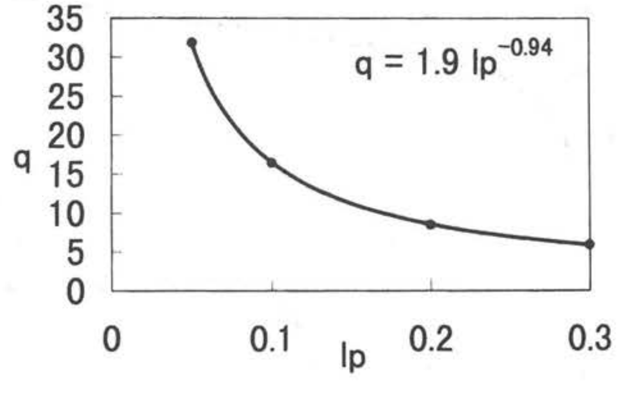
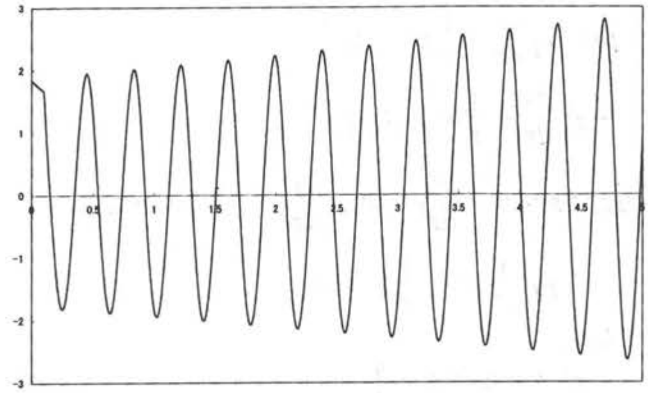


Fig. 4 Stability region for dead time l_p



(a) $p = 1$, $q = 16.5$

Fig. 5 Transient response of bilinear system

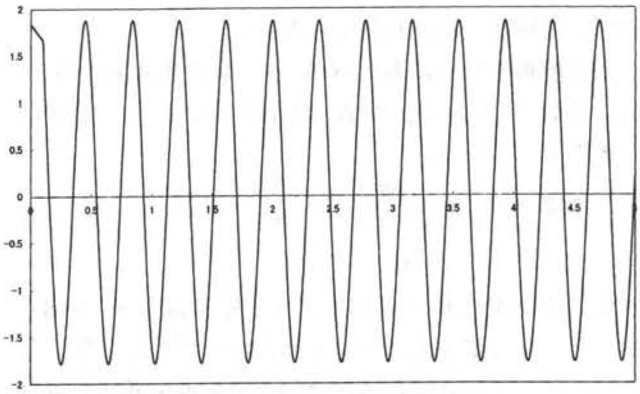


Fig. 5 (b) $p = 1$, $q = 16.29$

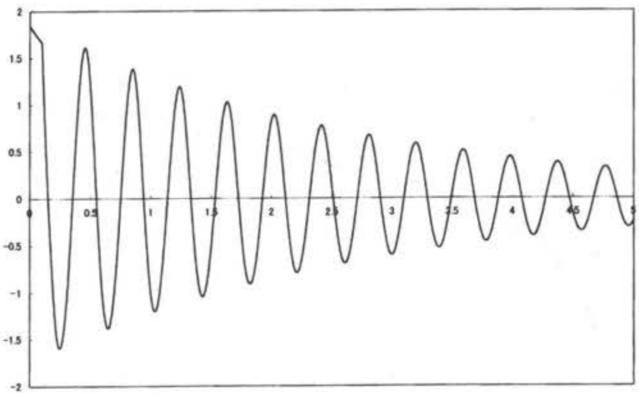


Fig. 5 (c) $p = 1$, $q = 15.5$

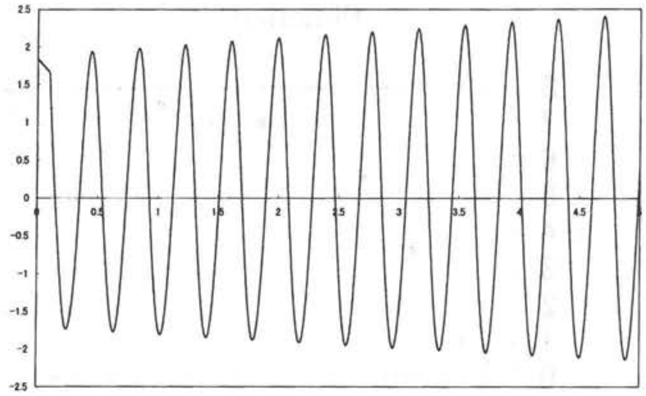


Fig. 5 (d) $p = 2$, $q = 16.5$

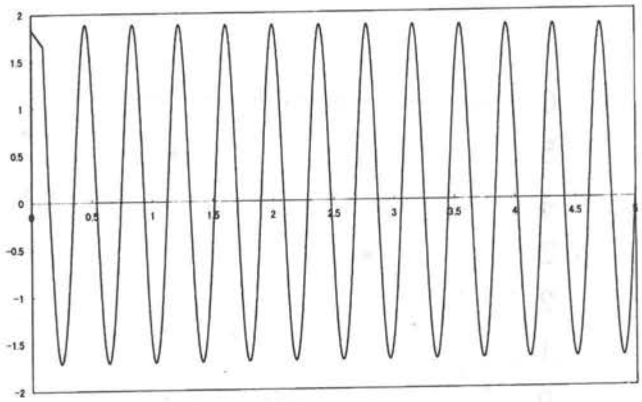


Fig. 5 (e) $p = 2$, $q = 16.35$

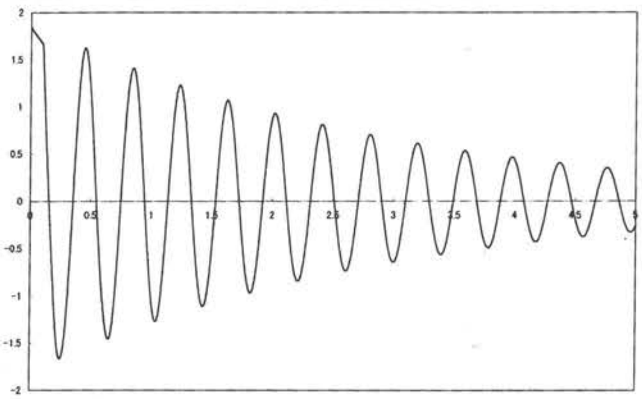
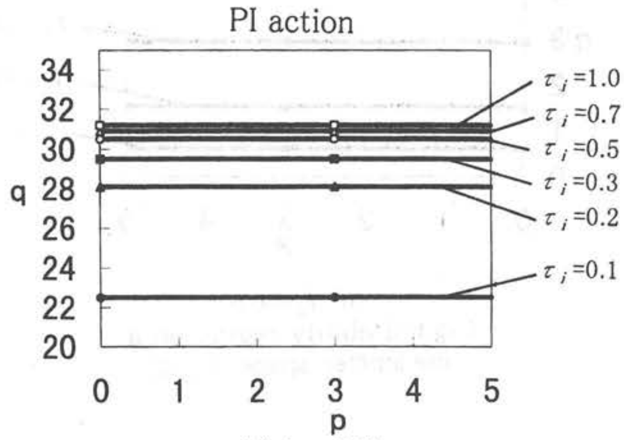
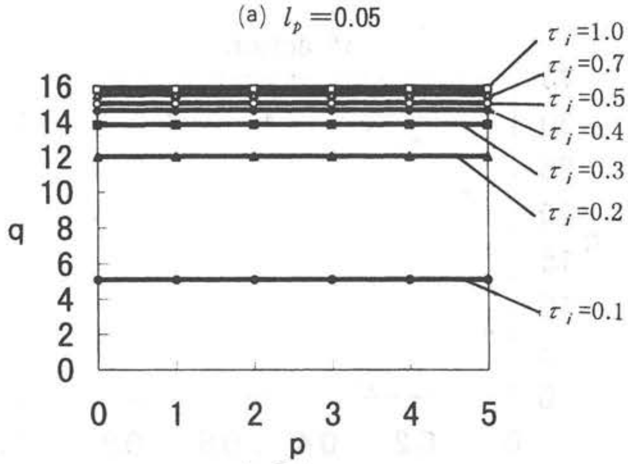


Fig. 5 (f) $p = 2$, $q = 15.5$

PI動作になると，P動作に比べ安定領域は狭くなるものの，p によらず q は一定である。これは，l_p が0.1以外の場合についても同様である。

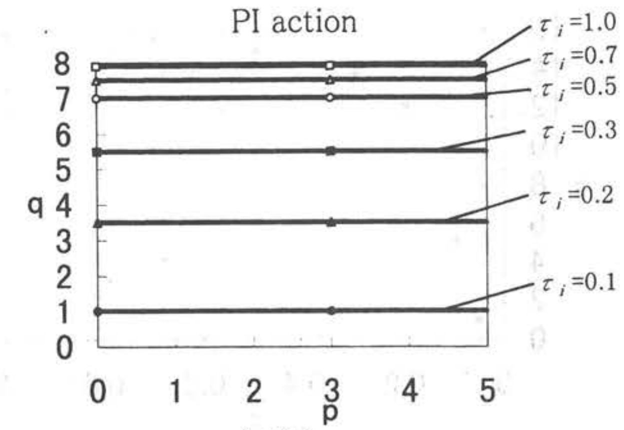


(a) $l_p = 0.05$



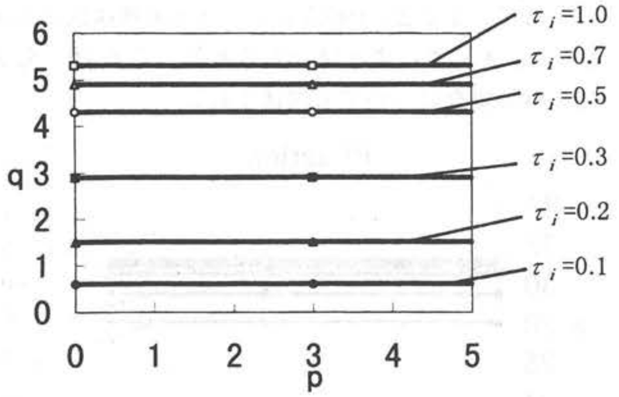
$lp = 0.1$

(b) $l_p = 0.1$

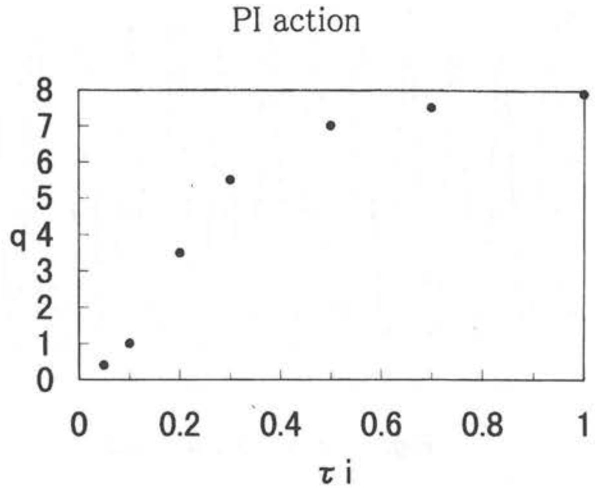


$lp = 0.2$

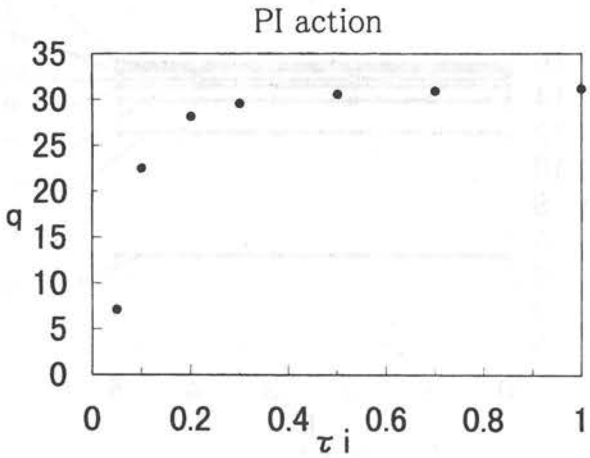
(c) $l_p = 0.2$



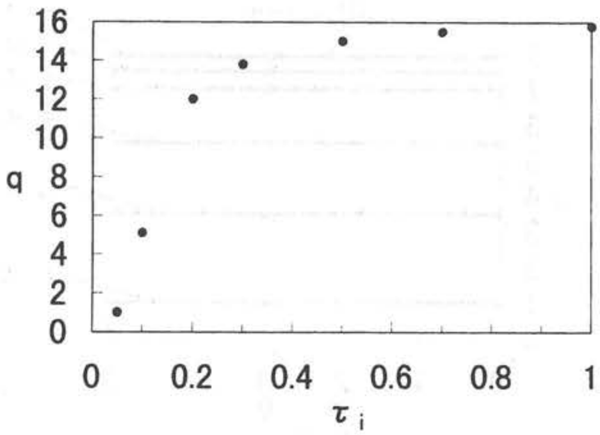
(d) l_p =0.3
Fig.6 Stability region on a parameter space (p , q)



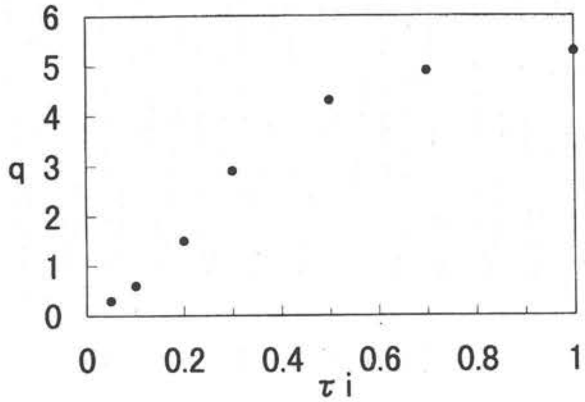
(c) l_p =0.2



(a) l_p =0.05



(b) l_p =0.1



(d) l_p =0.3
Fig.7 Stability region for reset time τ_i

4．おわりに

筆者らのこれまでの研究より，双線形系の安定化領域は，正規化された双線形パラメータ p-q の空間で閉じた図形として表現されるという見通しがあったが，数値解析の結果からは，安定限界となる正規化されたプラントゲイン q を決定するのは，正規化されたむだ時間 l_p および正規化された積分時間 τ_i であり，p には依存しないという結果を発見した。本研究はシミュレーションによる数値解析の結果であり，この性質を解析的に証明することが必要になってくるであろう。

現実のＶＡＶ制御系では，本研究では省いた給気温度リセット制御や，ゾーン別制御，ゾーン間の干渉など，多岐にわたる問題を含んでいる。それらを含めたＶＡＶ制御系の安定な調整を解析的に導出することは，これからの筆者らの重要な課題である。

文献

1) 1996 ASHRAE HVAC Systems and Equipment Handbook, 2.6, ASHRAE(1996)
2) 松葉ほか：空調システムにおけるハンティング現象の解析，空気調和・衛生工学会学術講演会 '96 名古屋(1996)
3) 松葉ほか：双線形系の安定解析，SICE'97徳島(1997)
4) 松葉ほか：ＶＡＶ制御系におけるハンティング現象の解析(その２)，空気調和・衛生工学会学術講演会 '97東京(1997)
5) 山脇ほか：離散時間双線形系の安定化，SICE'90東京(1990)

（受理年月日 1997年９月24日）