

プロセス制御系設計用CADソフト (その16) —むだ時間をもつ双線形系の安定化解析—

西脇昭雄, 黒須 茂, 石川昌宏*

CAD Software for Designing Process Control System —Stability limit of bilinear system with time delayed feedback—

Akio NISHIWAKI, Shigeru KUROSU, Masahiro ISHIKAWA*

1. はじめに

近年, 空調での室内温度制御において, 省エネルギー効果を狙ったVAV (Variable Air Volume) システム¹⁾は, 多くの現場で用いられ一般的なものとなっているにもかかわらず, その定式化や解析はほとんど行われていない。VAVシステムは, 室内に投入する熱量を給気風量により調整し, 室内温度を制御するシステムで, 室内への給気熱量が給気温度差と給気風量の積として表されるという特徴をもつ。そこで, 著者らはシステムへの制御入力が状態量との積の形で表されることに着目してVAVシステムを双線形系として定式化し, その解析を進めてきた^{2),3)}。既報につづき本研究では, VAV制御による室温制御系を取り上げ,

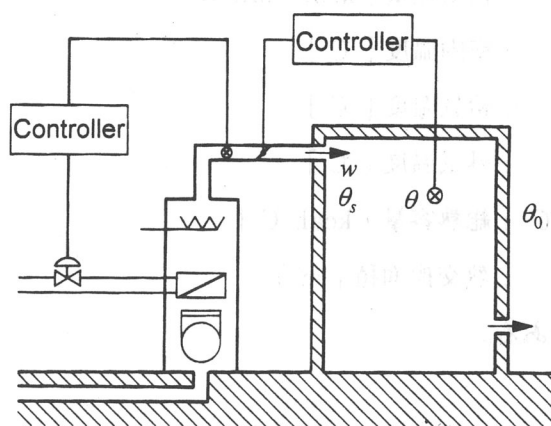


Fig.1 VAV control system

これを双線形系として定式化し, PID方式によるフィードバック制御を施したさいの安定領域の探索ならびにPIDコントローラの簡易調整則を求めることを目的とする。

2. VAV制御システムの定式化

VAV制御システムの概略をFig.1に示す。

1つの部屋からなる空調空間の温度 θ は, 給気

*平成9年度機械工学科卒業生 (現岐阜大学)

熱量 w_s を変化させて目標値 θ_r に一致するように制御されている。給気温度 θ_s は冷水コイルに冷水流量を変化させて制御されている。したがって、制御系全体では、給気温度制御と室内温度制御との2つのループが存在している。給気温度は速く応答するが、室内温度はおくれのため緩やかに応答することがわかっている。制御工学上の観点から、制御系の代表根が室内温度制御系によって支配されるということになる。したがって、本研究では空調機の中にある給気温度制御系の動特性は無視して、その静特性だけを問題とする。Fig.1 と室内の熱収支から式(1)が成り立つ。

$$MC \frac{d\theta}{dt} = w_s(\theta_s - \theta) + UA(\theta_0 - \theta) \quad (1)$$

ただし、

U : 熱貫流率 [kcal/(m²min℃)]

w_s : 給気熱量 [kcal/(min℃)]

θ : 室内温度 [℃]

θ_s : 給気温度 [℃]

θ_0 : 外気温度 [℃]

MC : 総熱容量 [kcal/℃]

A : 熱交換面積 [m²]

である。

基準温度の定義

$$\eta = \theta - \theta_0 \quad \eta_s = \theta_s - \theta_0$$

とおき、定常状態のまわりで微小変分 Δw_s , $\Delta \eta$ について

$$\left. \begin{aligned} w_s &= w_s + \Delta w_s \\ \eta &= \eta + \Delta \eta \end{aligned} \right\}$$

とおいて書き直すと、

$$\frac{d\Delta \eta}{dt} = a\Delta \eta + n\Delta w_s\Delta \eta + b\Delta w_s$$

となる。ただし、 $a = \frac{-(w_s + UA)}{MC}$, $n = \frac{-1}{MC}$,

$$b = \frac{\Delta \eta_s}{MC} \text{ である。}$$

新しい定数の定義

$$\Delta \eta \rightarrow x \quad \Delta w_s \rightarrow u$$

とおくと、つぎの部屋の動特性モデルがえられる。

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + nu(t)x(t) + bu(t)$$

さらに、 $at = \tau$, $aL_p = l_p$, $\frac{n}{a} = p$, $\frac{b}{a} = q$ として、正規化を行う、と式(2)となる。

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(\tau) - pu(\tau)x(\tau) - qu(\tau) \quad (2)$$

3. 制御方式

制御方式は、(i)P動作、(ii)PI動作、(iii)PID動作について考える。双線形問題を単純化するために、むだ時間 l_p を制御入力に含めて考察する。 k_c , τ_i , τ_d は比例ゲイン、積分時間、微分時間であり、PID制御のパラメータである。それぞれの動作に対し、つぎのような式になる。

(i) P動作

操作量 $u(\tau) = k_c x(\tau - l_p)$ を式(2)に代入すると、

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(\tau) - Px(\tau)x(\tau - l_p) - Qx(\tau - l_p) \quad (3)$$

となる。ただし、 $P = pk_c$, $Q = qk_c$, $l_p = aL_p$ である。

(ii) PI動作

$$u(\tau) = k_c \left\{ x(\tau - l_p) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^\tau x(\tau - l_p) d\tau \right\}$$

を、式(2)に代入すると、

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(\tau) - Px(\tau) \times$$

$$\left\{ x(\tau - l_p) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^\tau x(\tau - l_p) d\tau \right\}$$

$$+Q\left\{x(\tau-l_p)+\frac{1}{\tau_i}\int_0^\tau x(\tau-l_p)d\tau\right\} \quad (4)$$

となる。ただし、 $\tau_i = aT_i$ である。

(iii) PID動作

$$u(\tau) = k_c \left\{ x(\tau-l_p) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^\tau x(\tau-l_p)d\tau + \tau_d \frac{dx(\tau-l_p)}{d\tau} \right\}$$

を、式(2)に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = & -x(\tau) - Px(\tau) \times \\ & \left\{ x(\tau-l_p) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^\tau x(\tau-l_p)d\tau + \tau_d \frac{dx(\tau-l_p)}{d\tau} \right\} \\ & + Q \left\{ x(\tau-l_p) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^\tau x(\tau-l_p)d\tau + \right. \\ & \left. \tau_d \frac{dx(\tau-l_p)}{d\tau} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし、 $\tau_d = aT_d$ である。

4. 安定解析の方法と結果

4.1. 平衡点まわりでの挙動

双線形系は状態量 x の二次方程式となるから平衡点が2つ存在する。たとえばP動作では、定常状態を $\frac{dx}{d\tau} = 0$ とし、

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} x(\tau-l_p) = x^* \text{ とおくと,} \\ -x^* - Px^{*2} - Qx^* = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

となり、つぎのような定常値がえられる。

$$x_1^* = 0, x_2^* = \frac{-(1+Q)}{P} \quad (7)$$

しかし、目標値を $x_r = 0$ としたさいの定常値 x_1^* のまわりの安定領域が主眼であるが、もう一方の x_2^* についての挙動は明らかに不安定である。種々

の初期値に対する相平面上の軌跡をFig.2に示す。定常値 x_2^* の近傍を初期値とした場合にも軌跡は原点に向かっていないため、 x_2^* は不安定な平衡点である。したがって、本研究では $x_1^* = 0$ のまわりの安定判別を行えばよいことになる。

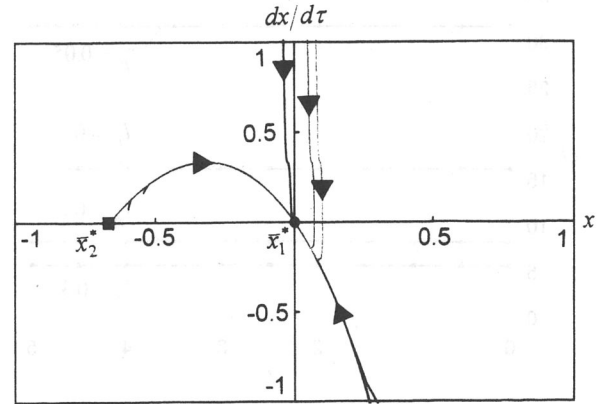


Fig.2 Phase trajectory

4.2. 双線形に対する安定の定義

双線形に対する安定解析はつぎのように定義する。

初期条件：

$$x(0) = 1.84 [^{\circ}\text{C}] \quad (\theta(0) = \theta_0 = 27 [^{\circ}\text{C}])$$

設定値：

$$x_r = 0 [^{\circ}\text{C}] \quad (\theta_r = 25.16 [^{\circ}\text{C}])$$

P, PIおよびPID動作、式(3)~(5)において軌跡 $x(\tau)$ が初期条件 $x(0) = 1.84 [^{\circ}\text{C}]$ に対して、 $\tau = 100$ のとき $|x(\tau)| < 0.01$ ならば安定であると定義する。ここで、 $\tau = 100$ ということは実時間で時定数の100倍であり、 $\tau = 100$ で全体的には減衰振動の様相を呈していても、持続振動を繰り返しているときには不安定とする。

4.3. 安定解析の結果

(i) P動作

Fig.3は l_p をパラメータとし、安定限界を P と Q の関係で示した結果である。これより、 l_p に対して Q は一定の直線を描くことがわかる。直線

より下の部分が安定領域となり、 Q は P に対して不変で、 l_p が大きくなるにしたがって安定領域が狭まることがわかる。たとえば、 $l_p = 0.05$ に対して安定領域は $Q \leq 32$ であり、 P に対して独立であることがわかる。

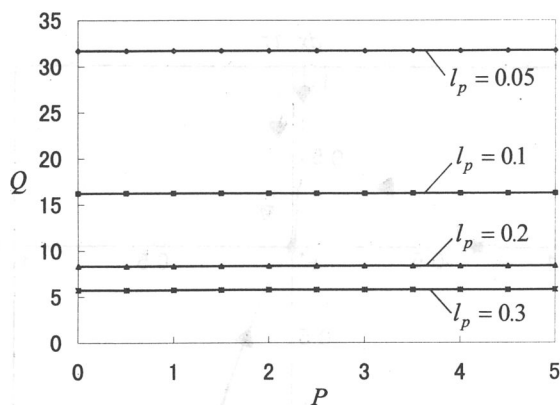


Fig.3 Stability region on a parameter space (P, Q) (P-action)

Fig.4は $l_p = 0.05$ として、双線形項の影響指標 P を非常に大きくした場合の安定領域を示した結果である。この結果は、むだ時間 l_p が一定であれば、双線形項 P の影響を大きくしても、 Q の値にはほとんど影響を与えず安定領域が一定となることを示唆している。

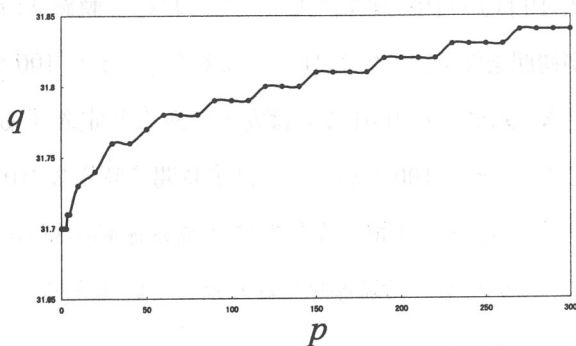


Fig.4 Global stability region (P-action)

(ii) PI動作

Fig.5は l_p を0.1に固定し、積分時間 τ_i をパラ

メータとした場合の安定限界を P と Q の関係で示した結果である。図によると l_p を固定した場合、 τ_i に対して Q は一定の直線を描くことがわかる。すなわちPI動作では l_p を固定した場合、安定領域は τ_i に左右される。

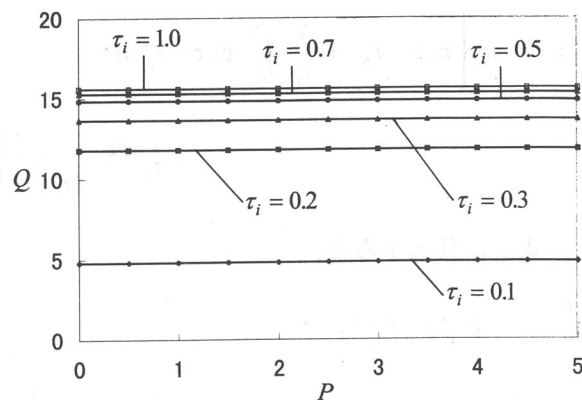


Fig.5 Stability region on a parameter space (P, Q) (PI-action)

Fig.6は $l_p = 0.1$, $\tau_i = 0.1$ として、双線形項の影響指標 P を非常に大きくした場合の安定領域を示した結果である。この結果は、むだ時間 l_p を固定し、 τ_i が一定であれば、双線形項 P の影響を大きくしても、 Q の値にはほとんど影響を与えず安定領域が一定となることを示唆している。

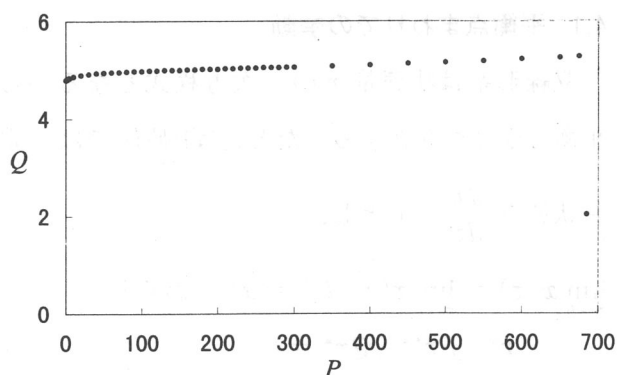


Fig.6 Global stability region (PI-action)

(iii) PID動作

$l_p = 0.1$ を固定して、PIDパラメータにおいて、

$\tau_d = \frac{\tau_i}{4}$ に対する安定領域を P - Q 平面 (Fig.7(a))

で, $\tau_d = \frac{\tau_i}{2}$ に対する安定領域を P - Q 平面 (Fig.7(b)) で示す。これより $0 < P < 5$ では安定領域 Q は一定で与えられる。安定領域を τ_i - Q 平面で示したのがFig.8であり, 実線が線形系の安定判別で求めた安定限界であり, 点によるプロットが双線形系に対するシミュレーションによって求めた結果である。さらに P が増大すると, 安定領域は拡大し, P がある値を越えると, カタストロフィ的に発散する。(Fig.9)

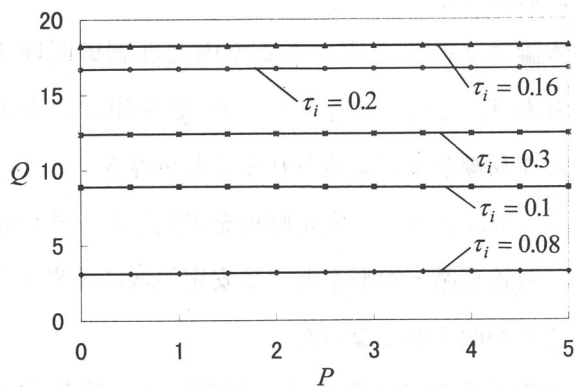


Fig.7 Stability region on a parameter space (P, Q) (PID-action) (a)

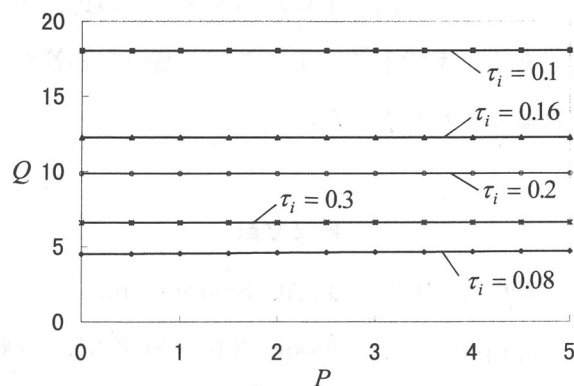


Fig.7 Stability region on a parameter space (P, Q) (PID-action) (b)

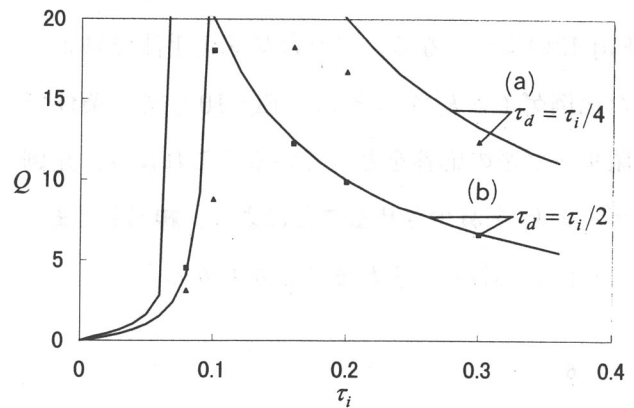


Fig.8 Stability region on a parameter space (τ_i, Q)

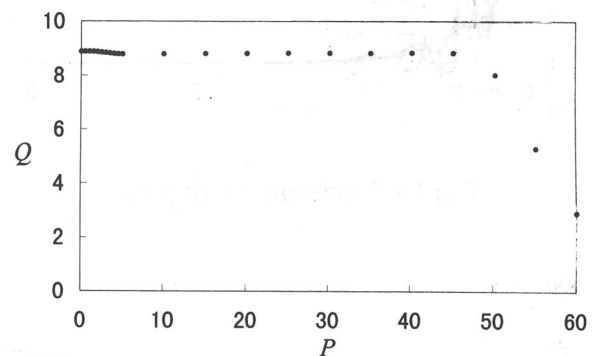


Fig.9 Global stability region (PID-action)

6. PIDパラメータの簡易調整則

$l_p = 0.1, q = 1, p = 0$ の1次おくれ+むだ時間系に対して部分的モデルマッチング法によりPIDパラメータを算出した。PIDパラメータは, $k_c = 7.56, \tau_i = 0.39, \tau_d = 0.04$ である。

この調整則が適用できるのは, $p = 0$ の場合であり, 双線形項 ($p \neq 0$) を含む場合には応答が多少が変わってくる。その様子を示したのがFig.10である。

双線形項を含む場合には応答が振動的になってしまうため, 算出したパラメータを最適化手法を使い, 修正する。 τ_i と τ_d はあまり変化がないた

め、比例ゲイン k_c の修正率 δ_c を Fig.11 に示す。修正したパラメータを用いたとき、応答を示すと、Fig.12 のようになる。これは最適化手法で修正した比例ゲイン k'_c をもとに、Fig.10 と同じ条件で閉ループ系の応答をとっている。これより、比例ゲイン k_c を減少させることにより、線形系とまったく同じ応答がえられることがわかった。

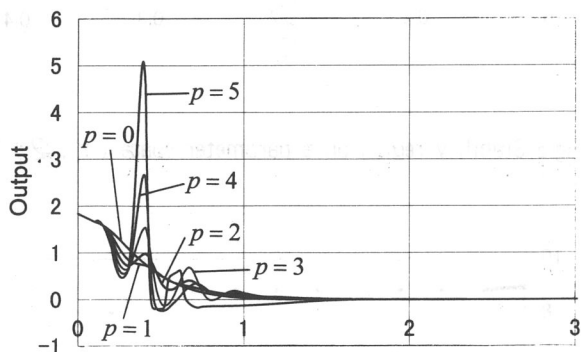


Fig.10 Transient responses

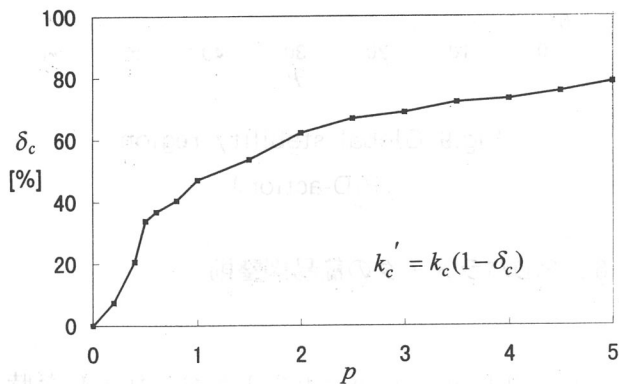


Fig.11 Modification factor

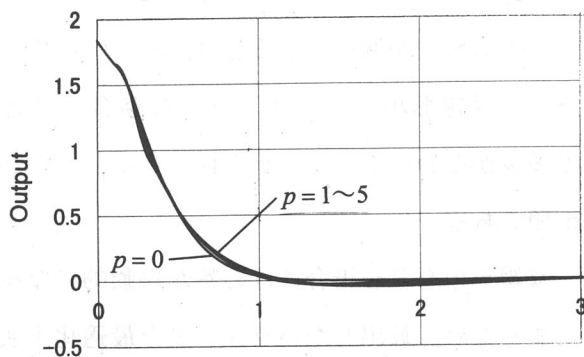


Fig.12 Transient responses

空調システムにおける部屋の数学モデルは双線形系で表わされるが、 p, q の現実的な値はつぎのように推定される。

$$\left. \begin{array}{l} 0 < p < 0.5 \\ 0 < q < 7p \end{array} \right\}$$

これより、 p が小さい領域では双線形系を線形系（1次おくれ+むだ時間系）と見做して、PIDパラメータを調整して差支えないことが明らかとなった。

7. おわりに

本論文はVAV方式による室内温度制御問題を取りあげ、2つのパラメータ P, Q を用いたかんたんな双線形系で記述されることを導き、シミュレーションによって安定解析を実施した。その結果、双線形系と線形系とは安定領域に差異のないことが明らかとなった。

双線形系の安定領域は、双線形項の係数 P に関係なくほぼ一定であり、 l_p や τ_i, τ_d により決まる。PID動作では p を大きくしたとき、部分的モデルマッチング法で求めたパラメータの比例ゲインをある比率で小さくすることで適切な応答がえられることがわかった。

参考文献

- 1) 1996 ASHRAE HVAC System and Equipment Handbook, 2.6, ASHRAE (1996)
- 2) 松葉ほか：VAV制御におけるハンチング解析，空気・調和衛生工学会学術講演会，(1996)
- 3) 松葉ほか：VAV制御系におけるハンチング解析（その2）－双線形としての定式化－，空気・調和衛生工学会学術講演会，(1997)

討 論

質問：VAV制御を双線形系でモデル化する利点は何か。

回答：VAV制御系は本来双線形系である。本研究では、外気温度 θ_0 、給気温度 θ_s は一定であると仮定して、室内温度 θ と給気熱量 w_s の微小変分をとり、パラメータ p と q を含む一般的な双線形系にしている点に特徴がある。パラメータが2つならば、その安定領域を図上で示すことができるが、パラメータが3つ以上になれば、もはや解析的な方法による以外に手に負えないと考えている。実は、その解析的な手法ではごくごく狭い安定領域しか求められないのである。

質問：数学モデル(2)式において、 $pu(\tau)x(\tau)$ を加えれば、双線形項が消去されて線形系

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(\tau) - qu(\tau)$$

の設計問題になるのではないか。

回答：確かに数学的には正しい。空調システムの場合、その数学モデルはきわめて不明確であり、双線形項を消去しようとしてもその実現性は薄いと考えた。したがって、双線形項 $pu(\tau)x(\tau)$ の入った数学モデルで考察し、その安定領域は p に依存しないことをつきとめた。この結果、ハンチング現象の原因が双線形系の特性にあるという当初の思惑は、完全にくつがえされたことになる。しかしながら、空調システムでは、プラントを1次おくれ+むだ時間系で仮定して安定性には影響しないという事実により本研究の意義がある。

（受理年月日 1998年8月20日）

