小山工業高等専門学校研究紀要
第３１号（1999），１５－２０

高速フーリエ変換とポワソン和について

玉木　正一

About on Fast Fourier Transformation and it's Poisson's sum

Masakazu TAMAKI

1．フーリエ級数

周期 $2L$ の区分的に滑らかな周期関数
$f(x+L)=f(x)$ は同一の周期 L を持つ三角関数を用いて

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\frac{2k\pi x}{2L}+b_k\sin\frac{2k\pi x}{2L}\right\}$$

ここで $a_k=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx$

$$b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

と三角関数展開する事が出来る。

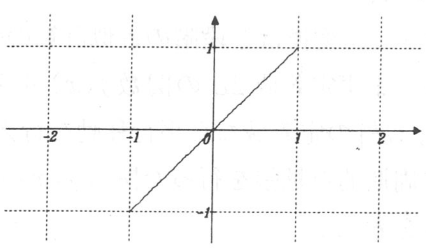
これらの三角関数は $[-L,L]$ で互いに直交する完備な基底になっている。ここで完備というのはこれらの関数のみで直交関係の基底が十分に満たされていて重複が無いことをいう。

2．フーリエ級数の収束

このフーリエ級数展開は不連続点に於いては収束性が良くないが連続な場合は一様収束する事が知られている。不連続な場合の扱いは最終的には超関数を用いる。今回の様なフーリエ変換の応用としては一パルスや一波形の搬送等が主となる。その場合近似計算や観測データが扱われるので、超関数まで踏み込む必要はない。

例１

$$y=\begin{cases}x & -1\leq x\leq 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



3．関数の周期的拡張

あるパルスなり一周期の波形を波動として搬送する場合、周期 nL をずらせた $f(x-nL)$ すべて加えた関数 $F(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x-nL)$ は周期関数を使う。これを周期的拡張という。楕円関数や三角関数（$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の逆関数）もこの方法で定義されている。$[0,L]$ で定義された関数には偶関数への周期的拡張と奇関数への周期的拡張がある。

4．奇数関数への周期的拡張

$f(x)$ 定義域が $[0,L]$ の時、対称領域 $[-L,L]$ に

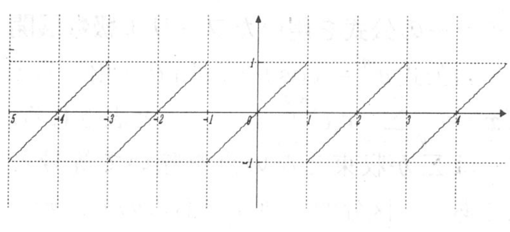
$f_e(x)=\begin{cases}f(x) & (0\leq x\leq L)\\ f(-x) & (-L\leq x\leq 0)\end{cases}$ と定める。

これを周期的拡張を行った $F_e(x)$ は周期 $2L$ の偶関数への周期的拡張となる。

次に $f_o(x)=\begin{cases}f(x) & (0\leq x\leq L)\\ -f(x) & (-L\leq x\leq 0)\end{cases}$ と定める。

これを周期的拡張を行った $F_0(x)$ は周期 $2L$ の奇関数への周期的拡張となる。

例２　例１の奇関数への周期的拡張



$F_0(x)$ は一種の鋸波になる。

5．周期的拡張のフーリエ係数

偶関数への周期的拡張のフーリエ係数は

$b_k=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$ は被積分関数が奇

関数で、対称領域での積分を行っているので $b_k=0$ となる。

$F_e(x)\cos\frac{k\pi x}{L}$ は偶関数より

$$a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx$$

x が $F_e(x)$ の連続点なら

$F_e(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{L}$ と表され

フーリエ余弦級数と呼ばれている。

奇関数への周期的拡張の場合は

$F_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{L}$ となり

フーリエ正弦級数と呼ばれる。

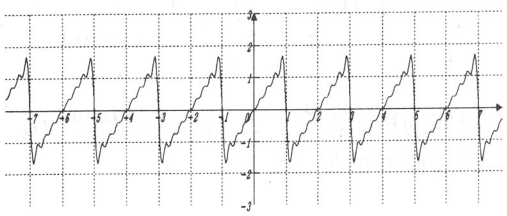
$F_0(x)$ が原点を通るときは不連続点が増えず奇関数への周期的拡張の方が便利である。

例3　例2のフーリエ正弦級数

$$F_0(x)=\sin\pi x-\frac{\sin(2\pi x)}{2}+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}\sin(n\pi x)}{n}+\cdots$$

$n=8$ のグラフ



6．オイラーの公式を用いたフーリエ級数展開

オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いると

$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}}$ と表される。

ここで～は Σ が収束しない点を除いて等号という意味である。区分的に連続であるので、殆ど至る所で等号と考えて良い。Σ 内の c_k は

$$c_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{L}}dx$$

ここで $\left\{e^{i\frac{k\pi x}{L}}\right\}_{k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$ は直交基底となる。これを複素形式のフーリエ級数という。

上記の a_k は $\cos x=\frac{1}{2}〔e^{ix}+e^{-ix}〕$ より

$$a_k=\frac{1}{2}〔c_k+c_{-k}〕$$

b_k は $\sin x=\frac{1}{2i}〔e^{ix}-e^{-ix}〕$ より

$b_k=\frac{1}{2i}〔c_k-c_{-k}〕$ と表される。

7．複素形式のフーリエ係数の減衰

$f(x)$ が周期 $2L$ の周期関数で k 階までの連続な導関数持ち $f^{(k+1)}(x)$ が区分的に連続なら

$$c_n=O〔n^{-(k+1)}〕\quad(n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$$

が成り立つ。ここで言う $O〔n^{-(k+1)}〕$ は $\frac{1}{n^{k+1}}$ 程度を意味する。

フラクタルのように極端な振動をしていなければ、フーリエ係数は急速に減衰する。

8．フーリエ変換

複素形式のフーリエ級数は $\left\{D^2+\left[\frac{k\pi}{L}\right]^2\right\}y=0$ の解 $e^{-i\frac{k\pi x}{L}}$ を基底として $f(x)$ を級数展開した物であった。

$f(x)$ が周期性を持たない時でも、

制限関数 $f_L(x)=\begin{cases} f(x) & |x|\leq L \\ 0 & |x|>L\end{cases}$ は $L\to\infty$ の時 $f(x)$ に一様収束する。

この $f_L(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}}$

$$c_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{L}}dx$$

となり $L\to\infty$ とすると連続変数積分である。フーリエ変換は $\hat{f}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx$ となる。

9．F.F.T.

高速フーリエ変換は3段階の近似計算の繰り返しとなる。まず定義域 $2L$ の関数 $f(x)$ を考える。$[0,2L]$ 以外の定義域なら平行移動を行えばよい。これに周期的な拡張を行った関数 $f(x)$ のフーリエ級数を考える.

$$f_L(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}}$$

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x) e^{-i\frac{k\pi x}{L}} dx$$

この c_k の積分を区間 $[0,2L]$ を分点 $0 = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_N = 2L$ で N 等分して台形公式を用いて行う。

$$I_T = \frac{1}{N}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{2}f[x_0]+f[x_1]e^{-i\frac{\pi x}{N}}+f[x_2]e^{-i\frac{2\pi x}{N}}+\cdots \\ \cdots+f[x_{N-1}]e^{-i\frac{(N-1)\pi x}{N}}+\frac{1}{2}f[x_N]\end{array}\right]$$

この近似を c_x に対応して γ_k とする。

$$\gamma_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f\left[\frac{2Lm}{N}\right] e^{-i\frac{2km\pi}{N}}$$

ここで $\frac{1}{2}f[x_0]+\frac{1}{2}f[x_N]$ なので $f[x_0], f[x_N]$ は Σ に組み込まれる。

$f_0 = f[x_0], f_1 = f[x_1], f_1 = f[x_2], \cdots, f_{N-1} = f[x_{N-1}]$ を標本値と呼ぶ。

実際、高速フーリエ変換が必要なのは通常の代数関数や初等関数でなく、観測値から類推する関数である。標本値と呼ぶのがふさわしい。

$e^{i\frac{2n\pi}{N}}$ を1の原始 N 乗根で、これを ω^n と表すと $\omega^{-n} = \bar{\omega}^n$ となり、γ_k は ω^m と $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1}$ の積の和である。以後 $\bar{\omega} = w$ と表す。

ここで $\gamma_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m w^m$ はCharacter Sum といわれる物になる。

フーリエ変換は $N-1$ 個のデーターから $N-1$ 個のデーターへの対応

$$\{f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1}\} \to \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{N-1},\}$$

となる。これは離散フーリエ変換と呼ばれる物である。これが連続型のフーリエ変換の近似にふさわしい事を示そう。

$f(x), f'(x)$ は絶対可積分とすると、

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

より $L > 0$ を十分大きくすると制限関数

$$f_L(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \le L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$ の評価不等式

$$\left|\hat{f}(s) - \hat{f}_L(s)\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_L(x) e^{-isx} dx\right|$$

$$\left|\int_{|x| \ge L} f(x) e^{-isx} dx\right| \le \left|\int_{|x| \ge L} |f(x)|\, dx\right| \to 0$$

が成り立ちその極限は $|x| \ge L$ より

$$f(x) \approx f_L(x)$$

（これは不連続点と $|x| \ge L$ を除いて収束して等しいことを意味する）

$f_L(x)$ に周期的な拡張をしてフーリエ級数展開すると

$$f_L(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}}$$

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\frac{k\pi x}{L}} dx$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x) e^{-i\frac{k\pi x}{L}} dx$$

他方

$$\hat{f}_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(x) e^{-isx} dx = \int_{-L}^{L} f(x) e^{-isx} dx$$

よって　$\hat{f}_L\left[\frac{k\pi}{L}\right] = 2Lc_k$

L が十分大なら　$\hat{f}\left[\frac{k\pi}{L}\right] \approx 2Lc_k$

c_k は離散フーリエ変換の γ_k で近似できる。よって十分小さい刻み $\frac{\pi}{L}$ に対する　フーリエ変換の標本値 $\left\{\hat{f}_0, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_{N-1}\right\}$ が数値計算できる。

大雑把であるが c_k と γ_k の近似を調べると

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}},$$

$$f_k = f\left[\frac{2Lk}{N}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{2mk\pi}{N}}$$

ここで1の原始 N 乗根 ω を調べると

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} = \begin{cases} 1 & p \equiv 0 \bmod N \\ 0 & \text{その他の時} \end{cases}$$ より

$$\gamma_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{2mk\pi}{N}}\right]e^{-i\frac{2nk\pi}{N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2k(m-n)\pi}{N}}\right]$$

$$=c_n+\frac{1}{N}\sideset{}{'}\sum_{p\neq 0\mathrm{mod}N} c_{n+Np}\left[\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2kp\pi}{N}}\right]$$

$$=c_n+\sideset{}{'}\sum_{p\neq 0\mathrm{mod}N} c_{n+Np} \qquad (n=0,1,2,\cdots,N-1)$$

所が$f^{(k+1)}(x)$が区分的に連続ならば

$c_n = O\left[\frac{1}{n^{k+1}}\right]$より2階までの連続導関数を持てば$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| = O\left[\frac{1}{n}\right]$より$\left|\sideset{}{'}\sum_{p\neq 0\mathrm{mod}N} c_{n+Np}\right|\to 0$となる。よって$\gamma_n \approx c_n$となる

実際は$f'(x)$が区分的に連続ならば$c_n = O\left[\frac{1}{n}\right]$であるが$\sideset{}{'}\sum|c_{n+Np}| = O\left[\frac{1}{n^{\varepsilon}}\right]$なる$\varepsilon > 0$があって、$c_n + \sideset{}{'}\sum_{p\neq 0\mathrm{mod}N} c_{n+Np}$は$\gamma_n$に収束する。

ポワソンの和公式

$ab = 2\pi$, $\sqrt{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(ak) = \sqrt{b}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(bk)$ を用いれば$\varepsilon > 0$は$\frac{1}{2}$程度になると言われている。

標本値を区分的に滑らかな関数の実現値と見ればこれに当てはまる。フラクタルの様に特別に折れ曲がった関数で無い限りこれが成立する。

10. 高速フーリエ変換の計算

1の原始N乗根$\omega, \overline{\omega} = w$を用いて

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{nk} \qquad (n=0,1,2,\cdots,N-1)$$

の計算を効率よく行う事が重要になる。まず$N = p^l$を考える。通常は$p=2$が最も効率が良いのであるが標本値が2^lの分点上にあるとは限らない。5^l等も考えられる。0.2刻み、0.04刻み、0.008刻みを採用すれば5^l分点の標本値になる。

$n,k,nk = m$をp進法で書き、それぞれのp進列を$[n_{l-1},n_{l-2},n_{l-3},\cdots,n_0][k_{l-1},k_{l-2},k_{l-3},\cdots,k_0]$

$[m_{2l-1},m_{2l-2},m_{2l-3},\cdots,m_0]$

として$F_n = F[n_{l-1},n_{l-2},n_{l-3},\cdots,n_0]$

$f_k = f[k_{l-1},k_{l-2},k_{l-3},\cdots,k_0]$と書くと

$$F_n = F[n_{l-1},n_{l-2},n_{l-3},\cdots,n_0]$$
$$=\sum_{k_0=0}^{p-1}\sum_{k_1=0}^{p-1}\sum_{k_2=0}^{p-1}\cdots\sum_{k_{l-1}=0}^{p-1} f[k_{l-1},k_{l-2},k_{l-3},\cdots,k_0]$$
$$\times w^{nk}$$

ここでw^{nk}を計算するが$w^N = 1$より$m \bmod N$で考えれば良い。F_nを内側のΣから、添え字と指数を一致させた$w^{m_{l-1}p^{l-1}}, w^{m_{l-2}p^{l-2}},\cdots$をかけて計算して行く。そのため$p$進法$l-1$位の係数$m_{l-1}$を求めてみる。それにはたたき込み(Convolution)の方法を用いる。

11. たたき込みを利用した代入

フーリエ変換の公式に$\mathcal{F}[f*g](s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$がある。ここで$*$はたたき込みで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(s-x)dx \text{ 又は } \int_{-\infty}^{\infty} f(s-x)g(x)dx$$

である。これは多項式の積の計算で一定の次数の係数を求める方法の発展形で元の方法は

$$a_0 \quad +a_1x \quad +a_2x^2+\cdots\cdots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n$$
$$b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0$$

上下に揃った係数の積の和$\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$が$x^n$の係数となる。この方法を用いて$p^l$を計算すると

$$0\cdot p^l+n_{l-1}p^{l-1}+\cdots\cdots+n_1p \qquad +n_0$$
$$k_0 \qquad +k_1p \qquad +\cdots\cdots+k_{l-1}p^{l-1}$$

上下が揃った部分の積はp^lの係数である。下の段の係数と上の段の一つ左の係数の積はp^{l+1}の係数である。上の段の一つ右の係数の積はp^{l-1}の係数で、F_nの一番内側Σの積の添え字k_{l-1}に関わるのはこのn_0k_{l-1}で、最初にこれに関する和をとる。それを

$$F^{(1)}[n_0,k_{l-1},k_{l-2},k_{l-3},\cdots,k_0]$$
$$=\sum_{k_{l-1}=0}^{p-1} f[k_{l-1},k_{l-2},k_{l-3},\cdots,k_0]\,w^{p^{l-1}\times n_0\times k_{l-1}}$$

とする。

次に内側から2番目のΣのindex変数はk_{l-2}でありp進法$l-2$桁を表す。

$$0\cdot p^l+n_{l-1}p^{l-1}+\cdots\cdots+n_2p^2 \quad +n_1p+n_0$$
$$k_0 \quad +k_1p \quad +\cdots\cdots+k_{l-3}p^{l-3}+k_{l-2}p^{l-2}$$

k_{l-2}の上の段の一つ右の係数n_1p+n_0との積はp^{l-2}の係数で、この積を指数にする Character

$w^{p^{l-2}\times[n_1p+n_0]\times k_{l-2}}$ を $F^{(1)}[n_0,k_{l-1},k_{l-2},k_{l-3},\cdots,k_0]$

にかけて和をとって $F^{(2)}[n_1,n_0,k]$ を作る。

同様に続けて

$$F^{(l)}[n_{l-1},n_{l-2},n_{l-3},\cdots,n_0]$$
$$=\sum_{k_0=0}^{p-1}F^{(l-1)}[n_{l-2},n_{l-3},\cdots,n_0,k_0]\times$$
$$w^{p^{l-1}\times[n_{l-1}p^{l-1}+\cdots\cdots+n_2p^2\ \ +n_2p^2\ \ +n_1p+n_0]\times k_0}$$

これが F_n になる。N が互いに素な p,q の積の時は2つの Σ について行えばよい。

このようにして離散フーリエ変換

$\{f_0,f_1,f_2,\cdots,f_{N-1}\}\to\{\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{N-1},\}$

を得て、これが $\hat{f}\left[\dfrac{nL\pi}{N}\right](n=0,1,2,\cdots\cdots,N-1)$

に対応している。

フーリエ級数での近似は不連続な関数や折れ曲がっている関数でも近似できる。この点Taylor展開より優っているが、滑らかな部分ではそのグラフの乱れが目立つ。これは全域的な関数の振動が縮小されて波動に現れた物である。ある程度の誤差を含んだ近似計算に最適であろう。

文献

1　解析概論

2　フーリエ解析と超関数　垣田高夫

3　数値解析　　清水留三郎

（受理年月日　1998年９月29日）