

## プロセス制御系設計用 CAD ソフト (その 14) —状態フィードバックとPIDフィードバックとの関連—

黒須 茂, 笠原雅人, 西脇昭雄

### CAD Software for Designing Process Control System —Relations between State Feedback and PID Feedback Controls—

Shigeru KUROSU, Masato KASAHARA and Akio NISHIWAKI

#### 1. はじめに

プロセス制御系においては、依然PIDコントローラが主流である。その理由は、歴史的に培われた技術的な蓄積に基づく信頼性と現場のオペレータに理解し易い点にある。周知のように、I-PDコントローラではI動作を主制御として、比例(P動作)と1階の微分値(D動作)までをフィードバックしている。したがって、2階以上の高階の微分値による補償は考えていない。それに反して、プラントに対して完全に既知なる数学モデルを前提とした現代制御理論におけるLQ制御とLQI制御では、すべての状態に関するフィードバック補償を考えている。

しかしながら、制御技術に関連する業務の8割がモデリングであるといわれているように、厳密な数学モデルによる完全補償を前提とした制御理論は、少なくともプロセス制御においては、その実用性に疑問がもたれていた。

本研究では、プラントの数学モデルを1次おく

れ+むだ時間系で与えられた場合に、そのプラントに対してI-PD制御とLQI制御を実施したときの制御性能の比較検討を行い、PIDコントローラの限界を明らかにする。

#### 2. 状態フィードバックとオブザーバ

制御系の設計を動的最適化の観点から行う方法を最適制御(optimal control)という。これは、制御系設計仕様を評価関数(performance index)とよばれるコスト関数で定量化し、制約条件を状態方程式で与えて、評価関数を最小とするような制御則を求めようとするものである。

以下では、このような制御則が状態フィードバックで求められる場合について結果のみを述べる。

##### 2.1. LQ制御

プラントの状態方程式、出力方程式をつぎのように与える。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= cx \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、状態  $x$ 、入力  $u$ 、出力  $y$  の次元は  $n$ 、 $m$ 、 $l$  であり、

$A$  :  $(n \times n)$  行列

$B$  :  $(n \times m)$  行列

$C$  :  $(l \times n)$  行列

である。(1)式で表わされるシステムに対して、評価関数

$$J(u) = \int_0^{\infty} (y^T Q y + u^T R u) d\tau \quad (2)$$

を考える。 $(A, B)$  が安定化可能かつ  $(C, A)$  が可観測であると仮定すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - C^T Q C \\ P(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

は唯一の  $(n \times n)$  半正定対称行列定常解  $P_s$  をもち、 $J(u)$  を最小にする最適制御入力  $u^0$  は

$$u^0 = Kx \quad (4)$$

$$K = -R^{-1}B^T P_s \quad (5)$$

となる。この事実により、最適制御入力は状態フィードバックの形で生成でき、Fig.1のような制御系を構成すればよいことになる。この制御則を線形2次形式最適制御 (Linear Quadratic Optimal Control) といい、単にLQ制御とよんでいる。

$J(u)$  の最小値は

$$u^0 = x^T(0)P_s x(0) \quad (6)$$

であり、Fig.1のシステムは安定であることがわかっている。つまり、

$$\frac{dx}{dt} = (A - BR^{-1}B^T P_s)x \quad (7)$$

は漸近安定となる。

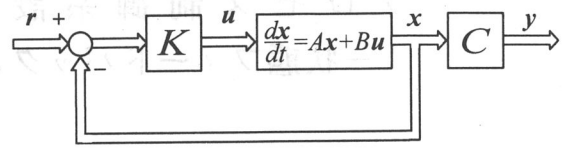


Fig.1 LQ制御

## 2.2. LQI制御

Fig.1の制御系においては、外乱があれば出力  $y$  が必ずしも  $0$  とならないし、目標値変化  $r$  に出力  $y$  が追従するようにできない。そこで、I動作を主制御とするLQI制御 (Linear Quadratic Integral Control) を考える。

(1)式で表わされるシステムに対して、目標値ベクトルを  $r$  とし、

$$e = r - y \quad (8)$$

$$v = \frac{du}{dt} \quad (9)$$

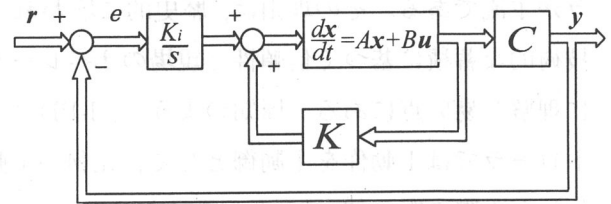


Fig.2 LQI制御

とおくと、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (10)$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & I_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} \quad (11)$$

なる拡大系を考えることができる。この拡大系に対して、評価関数をつぎのように定義する。

$$J(v) = \int_0^{\infty} (e^T Q e + v^T R v) d\tau \quad (12)$$

ここに、 $Q$  :  $(l \times l)$  正定対称行列

$R$  :  $(m \times m)$  正定対称行列

プロセス制御系設計用CADソフト（その14）—状態フィードバックとPIDフィードバックとの関連—である。評価関数  $J$  を最小にする  $v^0$  を求めると、

$$v^0 = [k, k_I] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} \quad (13)$$

の形で表わされる。これを(9)式に代入して、辺々積分すると、

$$u^0 = kx + k_I \int_0^t e d\tau + [u^0(0) - kx(0)] \quad (14)$$

をえる。この制御則は、I動作を用いてFig.2のような制御系で実現できる。ただし、 $u^0(0) - kx(0)$  は積分器の初期値と考える。

この制御系の出力  $y$  が目標値ベクトル  $r$  に追従できるためには、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix} = n+l \quad (15)$$

が成立していればよい<sup>1)</sup>。

LQ制御ならびにLQI制御においても、評価関数の中の  $Q, R$  が設計パラメータとなり、制御系の応答はこれらに強く依存する。これらの選び方に関して、現在のところ確定的な方法はない。このとき、 $Q \gg R$  とすると、応答の速応性はよくなるが、入力  $u$  は大きくなる。ある特定の入力を小さくするには、それに対応する  $Q, R$  の要素を大きくすればよいなどが、 $Q, R$  の選び方の指針となる。

### 2.3. オブザーバ

LQ, LQI制御のいずれの場合でも状態フィードバックを用いているが、全ての状態  $x$  が直接観測できないときには、プラントの入出力データから全ての状態をオブザーバにより推定し、その推定値  $\hat{x}$  をフィードバックする方法がとられる。

#### (1) 同次元オブザーバ

(1)式で表わされる可観測なプラントに対し、 $n$

次元の観測システムをつぎのように構成する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= D\hat{x} + E y + J u \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、 $D : (n \times n)$  行列

$E : (n \times l)$  行列

$J : (n \times m)$  行列

であり、つぎの式を満たしているものとする。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad A - EC &= D, J = B \\ (ii) \quad D &: \text{安定行列} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

このとき、(16)式で表わされるシステムを同次元オブザーバ (identity observer) という。

(1), (16), (17)式より

$$\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = D(x - \hat{x}) \quad (18)$$

となるので、 $\hat{x}$  と  $x$  の間には

$$\hat{x} = x - e^{Dt}(x_0 - \hat{x}_0) \quad (19)$$

なる関係がある。 $D$  は安定行列であるから、時間の経過とともに減少してしまう。この減少速度は  $D$  の固有値の負の実部の大きさに依存する。

(16)式に(17)式を代入すると、

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + E(y - C\hat{x}) \quad (20)$$

と表わせる。すなわち、単なるプラントとは異なり、出力推定誤差項  $(y - C\hat{x})$  でフィードバックされた形式になっていることがわかる。

#### (2) 低次元オブザーバ

同次元オブザーバでは、 $n$  次元の状態推定ベクトル  $\hat{x}$  により、プラントの  $n$  次元の状態  $x$  を推定したが、その内のいくつかは出力  $y$  を通じて正しく知ることができると考えてよい。その意味で、同次元オブザーバには冗長性があることになる。ここでは、そのような冗長性を取り除いた低次元オブザーバ (reduced-order observer) について述べる。

いま, (1)式において  $\text{rank } C = l$  であるとする。

そして適当な  $(n-l) \times n$  行列  $T$  を

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = n \quad (21)$$

となるように選ぶものとする。ここで  $(n-l)$  次元のオブザーバをつぎのように構成する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Dz + Ey + Ju \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここに,  $D: (n-l) \times (n-l)$  行列

$E: (n-l) \times l$  行列

$J: (n-l) \times m$  行列

であり, つぎの式を満たしているものとする。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad TA - EC &= DT, J = TB \\ (ii) \quad D &: \text{安定行列} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

この式を満たすように(22)式の係数行列を選ぶと,

$$T \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = D(Tx - z) \quad (24)$$

がなりたつ。したがって,

$$z = Tx + e^{Dt}(z_0 - Tx_0)$$

がえられる。これより

$$x = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{Dt}(z_0 - Tx_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

となる。(ii)より  $D$  は安定行列に選んでいるので, 時間の経過とともに  $y$  と  $z$  とから状態  $x$  が推定されたことになる。

### (3) カルマンフィルタ

ランダム信号を入力とする線形系の状態ベクトル  $x$  の最適推定値  $\hat{x}$  を算定するアルゴリズムをまとめると, つぎのようになる。

確定的入力  $u$  をもつ状態空間モデルがつぎのように書かれるとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu + B_w w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここで, (1)式と違うのは, 0 平均の正規性白色雑音  $w$  と  $v$  がそれぞれ入力端と出力端に印加された点である。これらの雑音ベクトルはつぎの共分散行列で表わされ, 既知とする。

$$\left. \begin{aligned} E[ww^T] &= W\delta(\tau) \\ E[vv^T] &= V\delta(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(26)式で表わされるシステムに対して, 推定誤差の2乗平均

$$J(\hat{x}) = E[\|x - \hat{x}\|^2] \quad (28)$$

を最小にする問題を考える。(A, C) が可観測かつ (A, B<sub>w</sub>) が安定化可能であると仮定すると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= AM + MA^T - MC^T V^{-1} CM + B_w W B_w^T \\ M(0) &= X_0 (\text{初期値 } x_0 \text{ の分散}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

は唯一の  $(n \times n)$  半正定対称行列定常解  $M_s$  をもち, 最適推定値  $\hat{x}$  はつぎのように与えられる。

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + M_s C^T V^{-1} (y - C\hat{x}) \quad (30)$$

(30)式を書き直すと,

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (A - M_s C^T V^{-1} C) \hat{x} + Bu + M_s C^T V^{-1} y \quad (31)$$

となる。

カルマンフィルタの構造は(20)式で示した同一次

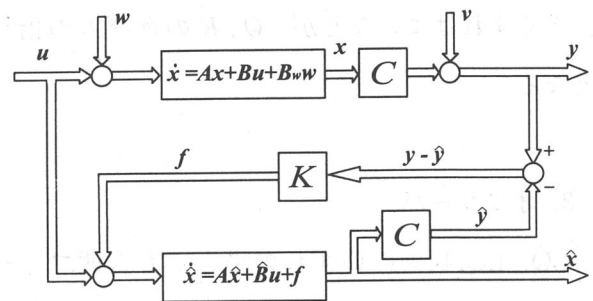


Fig.3 カルマンフィルタ

プロセス制御系設計用CADソフト（その14）—状態フィードバックとPIDフィードバックとの関連—  
元オブザーバと完全に一致している。ただし、そのフィードバックゲイン  $M_s C^T V^{-1}$  は不偏最小分散推定値と観測システムの安定性を保証する最適解として与えられる。この意味でカルマンフィルタは、同次元の最適オブザーバ（optimal observer）であるとも考えられる<sup>2)</sup>。（Fig.3）

LQ制御とカルマンフィルタとの対応関係を示すと、つぎのようになる。

| LQ制御 |                       | カルマンフィルタ |
|------|-----------------------|----------|
| $A$  | $\longleftrightarrow$ | $A^T$    |
| $B$  | $\longleftrightarrow$ | $C^T$    |
| $C$  | $\longleftrightarrow$ | $B_w^T$  |
| $Q$  | $\longleftrightarrow$ | $W$      |
| $R$  | $\longleftrightarrow$ | $V$      |
| $P$  | $\longleftrightarrow$ | $M$      |

|                                                                    |                       |                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $(A, B)$ が安定化可能<br>→ 定常解 $P_s$ が存在<br>$(A, C)$ が可観測<br>→ $P_s$ は正定 | $\longleftrightarrow$ | $(A, C)$ が可観測<br>→ 定常解 $M_s$ が存在<br>$(A, B_w)$ が可制御<br>→ $M_s$ は正定 |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------------------|

## 4. 数値計算例

### 4.1. プラントの伝達関数と状態空間モデル

本論文では、プラントの伝達関数  $G_p(s)$  を1次おくれ+むだ時間系として考える。

$$G_p(s) = \frac{e^{-L_p s}}{1 + T_p s} \quad (32)$$

ここに、 $T_p = 10$  [min],  $L_p = 1$  [min] とする。定常ゲイン  $K = 1$  で統一し、PIDゲインに定常ゲイン  $K$  を含めた形式で考える。

むだ時間要素  $e^{-L_p s}$  に関しては、つぎのようなPadeの近似が知られている。

1次近似：

$$e^{-L_p s} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} L_p s}{1 + \frac{1}{2} L_p s} \quad (33)$$

2次近似：

$$e^{-L_p s} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} L_p s + \frac{1}{12} L_p^2 s^2}{1 + \frac{1}{2} L_p s + \frac{1}{12} L_p^2 s^2} \quad (34)$$

3次近似：

$$e^{-L_p s} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} L_p s + \frac{1}{10} L_p^2 s^2 - \frac{1}{120} L_p^3 s^3}{1 + \frac{1}{2} L_p s + \frac{1}{10} L_p^2 s^2 + \frac{1}{120} L_p^3 s^3} \quad (35)$$

(33)~(35)式において、分母を分子で割って分母系列表現に直すと、つぎのようになる。

1次近似：

$$e^{-L_p s} \approx \frac{1}{1 + L_p s + \frac{1}{2} L_p^2 s^2 + \frac{1}{4} L_p^3 s^3 + \frac{1}{8} L_p^4 s^4 + \dots} \quad (36)$$

2次近似：

$$e^{-L_p s} \approx \frac{1}{1 + L_p s + \frac{1}{2} L_p^2 s^2 + \frac{1}{6} L_p^3 s^3 + \frac{1}{24} L_p^4 s^4 + \dots} \quad (37)$$

3次近似：

$$e^{-L_p s} \approx \frac{1}{1 + L_p s + \frac{1}{2} L_p^2 s^2 + \frac{1}{6} L_p^3 s^3 + \frac{1}{24} L_p^4 s^4 + \dots} \quad (38)$$

これより、 $e^{-L_p s}$  をMaclaurin展開して分母系列表現した場合、1次近似では2次の係数まで、2次近似では4次の係数まで、3次近似では6次の係数まで完全に一致していることが興味深い。この事実から、むだ時間要素  $e^{-L_p s}$  は5次のMaclaurin級数

$$e^{-L_p s} \approx$$

$$\frac{1}{1 + L_p s + \frac{1}{2} L_p^2 s^2 + \frac{1}{6} L_p^3 s^3 + \frac{1}{24} L_p^4 s^4 + \frac{1}{120} L_p^5 s^5} \quad (39)$$

で表わし、6次以上は省略して考える。

プラントの伝達関数  $G_p(s)$  を(39)式を用いて分母系列表現で表わすと、つぎのようになる。

$$G_p(s) = \frac{e^{-L_p s}}{1 + T_p s}$$

$$= \frac{1}{a'_0 + a'_1 s + a'_2 s^2 + a'_3 s^3 + a'_4 s^4 + a'_5 s^5}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} a'_0 &= 1, a'_1 = T_p + L_p, \\ a'_2 &= \left( \frac{2T_p + L_p}{2} \right) L_p, a'_3 = \left( \frac{3T_p + L_p}{6} \right) L_p^2, \\ a'_4 &= \left( \frac{4T_p + L_p}{24} \right) L_p^3, a'_5 = \left( \frac{5T_p + L_p}{120} \right) L_p^4 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

である。 $T_p = 10, L_p = 1$  とすると、係数  $a'_0, a'_1, \dots$  はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a'_0 &= 1, a'_1 = 11, a'_2 = 10.5 \\ a'_3 &= 5.167, a'_4 = 1.708, a'_5 = 0.425 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

(40)式を状態空間モデルで表わすと、つぎのようになる。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \mathbf{x}^T &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & -a'_2 & -a'_3 & -a'_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}^T &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ b] \\ \mathbf{c} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \text{および、係数は } a_0 &= a'_0/a'_5, a_1 = a'_1/a'_5, \\ a_2 &= a'_2/a'_5, a_3 = a'_3/a'_5, a_4 = a'_4/a'_5, \\ b &= 1/a'_5 \end{aligned}$$

$T_p = 10, L_p = 1$  とすると、係数  $a_0, a_1, a_2, \dots$  はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 2.353, a_1 = 25.882, a_2 = 24.706 \\ a_3 &= 12.158, a_4 = 4.019, b = 2.353 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

## 4.2. PIDコントローラ

### (1) I-PD方式

本論文は、空調プラントの温度制御をとりあげ、1入力1出力 (single input single output) 系でPID制御とLQI制御との比較検討を述べる。

### PIDコントローラの基本動作

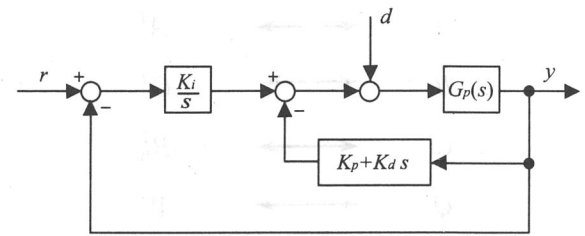


Fig.4 I—PD制御

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (44)$$

を主制御にすると、状態  $\mathbf{x}$  の次元が1つ増えてLQI制御との対応がつかなくなる。そこで、Fig.4に示すI-PD方式を採用する。Fig.4より、目標値入力  $r$  と外乱  $d$  から出力  $y$  への閉ループ伝達関数を求めると、つぎのようになる。

$$W_{yr} = \frac{\frac{K_i}{s} G_p(s)}{1 + \left( \frac{K_i}{s} + K_p + K_d s \right) G_p(s)} \quad (45)$$

$$W_{yd} = \frac{G_p(s)}{1 + \left( \frac{K_i}{s} + K_p + K_d s \right) G_p(s)} \quad (46)$$

(45)、(46)式より、PID方式とI-PD方式とでは、外乱応答は変わらないが、目標値応答には  $(K_p + K_d s)$  の項がない。

I-PD方式の利点を述べると、つぎのようになる<sup>3)</sup>。

1° プロセス制御の目的は主に外乱抑制で、目標値変化に対しては後段プロセスへの影響を緩和するために、オーバーシュートの少

プロセス制御系設計用CADソフト（その14）－状態フィードバックとPIDフィードバックとの関連－

ない緩やかな制御操作が好まれる。

2°I-PD方式が加法的補償（フィードバック補償）であるのに対して、PID方式は除法的補償（継続補償）で改善している。したがって、I-PD方式より設計が難しい。

3°PID方式では、目標値変化に対して速応性をよくしようとする。極・ゼロ点相殺を起こして可制御性を損なう欠点がある。

4°I-PD方式はLQI方式と内容的に同じものになる。LQIで状態変数を相変数にとっておけば、状態フィードバックはちょうど $y$ の0階から $(n-1)$ 階までのフィードバックに一致する。I-PD方式こそ現代制御理論への道を開いてくれる。

## (2) 外乱抑制特性

一般に、コントローラの基本機能としては、

- (a) 外乱抑制特性
- (b) 目標値追従特性

があり、(a)、(b)の双方を同時に最適化するには通常の1自由度のコントローラでは不可能であり、2自由度コントローラが必要となることを指摘してきた。すでに、プラントの伝達関数 $G_p(s)$ を与えたとき、(a)、(b)などの特性を最適にする調整法を提案した<sup>4), 5)</sup>。

そこで、とくにプロセス制御では外乱抑制を主に問題とするので、外乱 $d$ だけを入力と考えて制御系を設計する。

すでに、 $T_p = 10$  および  $L_p = 1$  のプラントに対して求められたPIDゲインはTable 1 に示すとおりである<sup>4)</sup>。

Table 1 PID gains designed

|        |     | $K_i$ | $K_p$ | $K_d$ |
|--------|-----|-------|-------|-------|
| 限界感度法  |     | 4.38  | 9.20  | 4.78  |
| 部分モデル  | 外 乱 | 4.13  | 9.9   | 3.27  |
| マッチング法 | 目標値 | 0.67  | 6.95  | 2.29  |
| 最適化手法  | 外 乱 | 7.56  | 11.24 | 7.19  |
|        | 目標値 | 0.43  | 6.5   | 1.50  |

## 4.3. LQI制御

(42)式で与えられたプラントに対して、つぎのような評価関数 $J(u)$ を定義する。

$$J(u) = \int_0^\infty [(r-y)^2 + w \left( \frac{du}{d\tau} \right)^2] d\tau \quad (47)$$

評価関数 $J(u)$ を最小にする $u^0$ を求めると、

$$u^0 = K_i \int_0^T (r-y) d\tau + \mathbf{k}^T \mathbf{x} \quad (48)$$

ここに、 $\mathbf{k}^T = [k_0, k_1, k_2, k_3, k_4]$

となり、第1項がI動作を、第2項が状態フィードバックを表わしている。

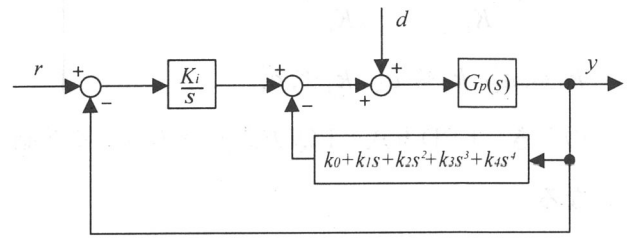


Fig.5 LQI制御

LQI制御をブロック線図に画くと、Fig.5のようになる。ここで、Fig.4で示したI-PD制御系とFig.5に示したLQI制御系において、外乱 $d$ から出力 $y$ への閉ループ伝達関数を求めると、(45)式よりつぎのようになる。

I-PD方式：

$$W_{yd}(s) = \frac{s}{K_i + (K_p + a'_0)s + (K_d + a'_1)s^2 + a'_2s^3 + \dots + a'_5s^6} = \frac{s}{K_i} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{K_p + a'_0}{K_i}s + \frac{K_d + a'_1}{K_i}s^2 + \frac{a'_2}{K_i}s^3 + \dots + \frac{a'_5}{K_i}s^6} \right\} \quad (49)$$

LQI方式：

$$\left. \begin{aligned} W_{yd}(s) &= \frac{s}{K_i + (k_0 + a'_0)s + (k_1 + a'_1)s^2} \\ &\quad (k_2 + a'_2)s^3 + (k_3 + a'_3)s^4 + (k_4 + a'_4)s^5 + a'_5s^6 \end{aligned} \right\} (50)$$

$$= \frac{s}{K_i} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{k_0 + a'_0}{K_i}s + \dots + \frac{k_4 + a'_4}{K_i}s^5 + \frac{a'_5}{K_i}s^6} \right\}$$

ここで、応答の形状だけの類似性を問題とするならば、(47)式と(48)式との間でカッコの中の参照モデルに対応し部分を等置すると、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_p + a'_0}{K_i} &\rightleftharpoons \frac{k_1 + a'_0}{K_i} \\ \frac{K_d + a'_1}{K_i} &\rightleftharpoons \frac{k_1 + a'_1}{K_i} \end{aligned} \right\} (51)$$

$$k_2 \ll a'_2, k_3 \ll a'_3, k_4 \ll a'_4$$

このとき、I-PD方式とLQI方式とはまったく等価となる。

#### 4.4. 計算結果

(42)式で示された状態空間モデルに対して、種々の重み係数  $w$  に対する状態フィードバックゲインを求めると、Table 2 のようになる。

Table 2 State feedback gains

| $w$   | $K_i$ | $k_0$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 0.001 | 31.6  | 56.7  | 41.6  | 18.5  | 5.63  | 1.07   |
| 0.01  | 10.0  | 23.2  | 18.3  | 8.40  | 2.66  | 0.568  |
| 0.1   | 3.16  | 10.2  | 8.61  | 4.05  | 1.31  | 0.299  |
| 1.0   | 1.00  | 4.58  | 4.08  | 1.96  | 0.640 | 0.152  |
| 10.0  | 0.316 | 2.02  | 1.86  | 0.906 | 0.298 | 0.0725 |
| 100.0 | 0.10  | 0.832 | 0.782 | 0.383 | 0.126 | 0.0311 |

プラントの伝達関数  $G_p(s)$  を Padé の 1 次近似および 2 次近似で状態フィードバックゲインを求めても Table 2 の結果に差異は見られなかった。また、サンプリング時間  $T = 10[s]$  が適切である。

さて、(49)式と(50)式に基づいて、参照モデルの分母の係数を求めると、Table 3 のようにまとめられる。

Table 3 Coefficients of the normalized standard form

I-PD :

|                  |       | $\frac{K_p + a'_0}{K_i}$ | $\frac{K_d + a'_1}{K_i}$ | $\frac{a'_2}{K_i}$ | $\frac{a'_3}{K_i}$ | $\frac{a'_4}{K_i}$ | $\frac{a'_5}{K_i}$ |
|------------------|-------|--------------------------|--------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 限界感度法            |       | 2.33                     | 3.60                     | 2.40               | 1.18               | 0.39               | 0.097              |
| 部分的モデル<br>マッチング法 | 外 乱   | 2.64                     | 3.46                     | 2.54               | 1.25               | 0.41               | 0.103              |
|                  | 目 標 値 | 11.87                    | 19.84                    | 15.67              | 7.71               | 2.51               | 0.634              |
| 最適化手法            | 外 乱   | 1.62                     | 2.40                     | 1.39               | 0.68               | 0.26               | 0.056              |
|                  | 目 標 値 | 17.44                    | 29.07                    | 24.42              | 12.02              | 3.97               | 0.988              |

LQI :

| $w$   | $\frac{k_0 + a'_0}{K_i}$ | $\frac{k_1 + a'_1}{K_i}$ | $\frac{k_2 + a'_2}{K_i}$ | $\frac{k_3 + a'_3}{K_i}$ | $\frac{k_4 + a'_4}{K_i}$ | $\frac{a'_5}{K_i}$ |
|-------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------|
| 0.001 | 1.81                     | 1.66                     | 0.92                     | 0.34                     | 0.09                     | 0.013              |
| 0.01  | 2.42                     | 2.93                     | 1.89                     | 0.78                     | 0.23                     | 0.043              |
| 0.1   | 3.54                     | 6.21                     | 4.60                     | 2.05                     | 0.64                     | 0.13               |
| 1.0   | 5.58                     | 15.08                    | 12.46                    | 7.13                     | 1.86                     | 0.425              |
| 10.0  | 9.56                     | 40.70                    | 39.11                    | 17.29                    | 5.63                     | 1.345              |
| 100.0 | 18.32                    | 117.82                   | 108.83                   | 52.93                    | 17.39                    | 4.25               |

これより、LQI方式で  $w$  が小さくなるにつれ  $k_2, k_3, k_4$  の影響が小さくなり、I-PD方式に近づいていくことがある。さらに形状係数  $\{\alpha_i\}$  を比較するために、参照モデルの分母系列表現

$$G_m(s) = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 \sigma s + \alpha_2 \sigma^2 s^2 + \alpha_3 \sigma^3 s^3 + \dots} \quad (52)$$

$$(\alpha_0 = \alpha_1 = 1)$$

より、時間スケール  $\sigma$  と係数列  $\{\alpha_i\}$  を求めると

Table 4 のようになる。

Table 4 Coefficients of the shape faction

I-PD :

|                  | $\sigma$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$           | $\alpha_6$           |
|------------------|----------|------------|------------|------------|----------------------|----------------------|
| 限界感度法            | 2.33     | 0.66       | 0.19       | 0.04       | 0.0057               | 0.0006               |
| 部分的モデル<br>マッチング法 | 2.64     | 0.5        | 0.138      | 0.025      | 0.003                | 0.0003               |
|                  | 11.87    | 0.141      | 0.009      | 0.0004     | $1 \times 10^{-5}$   | $2 \times 10^{-7}$   |
| 最適化手法            | 1.62     | 0.914      | 0.327      | 0.099      | 0.023                | 0.003                |
|                  | 17.44    | 0.095      | 0.005      | 0.00013    | $2.5 \times 10^{-6}$ | $3.5 \times 10^{-8}$ |

プロセス制御系設計用CADソフト（その14）－状態フィードバックとPIDフィードバックとの関連－  
LQI :

| $w$   | $\sigma$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$           | $\alpha_5$           | $\alpha_6$           |
|-------|----------|------------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0.001 | 1.81     | 0.507      | 0.155      | 0.032                | 0.005                | $3.7 \times 10^{-4}$ |
| 0.01  | 2.42     | 0.500      | 0.133      | 0.023                | 0.003                | $2.1 \times 10^{-4}$ |
| 0.1   | 3.54     | 0.496      | 0.104      | 0.013                | 0.001                | $6.6 \times 10^{-5}$ |
| 1.0   | 5.58     | 0.484      | 0.072      | 0.007                | $6.2 \times 10^{-5}$ | $1.4 \times 10^{-5}$ |
| 10.0  | 9.56     | 0.445      | 0.045      | 0.002                | $7.1 \times 10^{-5}$ | $1.8 \times 10^{-6}$ |
| 100.0 | 18.32    | 0.351      | 0.018      | $4.7 \times 10^{-4}$ | $8.4 \times 10^{-6}$ | $1.1 \times 10^{-7}$ |

Table 4 より,  $w = 0.01$  のときにえられた応答の形状が, 部分的モデルマッチング法で提案された参照モデルに近いことがわかる。

(Computer Aided Tuning) Software for PID Controllers, ASHRAE Transactions, Vol.100-Part I, 180/190 (1994)

- 5) Kasahara, M., T. Matsuba et al. : A Tuning Method of Two Degrees of Freedom PID Controller, ASHRAE Transactions, Vol. 103-Part I (1997)

(受理年月日 1998年8月20日)

## 5. おわりに

与えられたプラントの伝達関数は1次おくれ＋むだ時間系であるから, オブザーバを用いて出力  $y$  から状態推定値  $\hat{x}$  を求める必要がある。そのさいには, LQ制御(7)式と同一次元オブザーバ(16)式の特性根の配置が問題となる。つまり, オブザーバがLQ制御系より速く減衰しなければ, 推定値に基づいたフィードバックはなりたたなくなる。

応答実験によりPIDフィードバックと状態フィードバックとの類似性や差異が明確になれば, 最適制御理論の適切な貢献への新しい道が開かれるように思う。

## 参考文献

- 1) 木村, 藤井, 井上 : 多変数制御系の理論と応用, システムと制御, vol.22, No.5~12, 1978
- 2) 岩井, 井上, 川路 : オブザーバ (現代制御シリーズ3), コロナ社, 18/22 (1988)
- 3) 北森俊行 : PID, I-PD制御からの発展の道, システムと制御, vol.27, No.5, 287/294 (1983)
- 4) Kamimura, K., T. Matsuba et al. : CAT

the present study, however, and further  
the correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.

the present study, however, and further  
the correlation of the two variables  
in the present study is not high.

the present study, however, and further  
the correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.

the present study, however, and further  
the correlation of the two variables  
in the present study is not high.

the present study, however, and further  
the correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.

the present study, however, and further  
the correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.  
The correlation of the two variables  
in the present study is not high.

the present study, however, and further  
the correlation of the two variables  
in the present study is not high.