小山工業高等専門学校研究紀要
第３１号（1999)，　１－８

２つの格子点ベクトルのなす角の三角関数の値と次元との関わりについて（Ⅱ）

河 島　　博

On the relation of the value of a trigonometric function of the angle between two lattice vectors to the dimension (Ⅱ)

Hiroshi KAWASHIMA

１．はじめに

この紀要は、Ｈ７年('95)の小山高専紀要第27号とＨ10年('98)の小山高専紀要第30号に引き続くものである。

前の２つの論文では、n 次元の実数ユークリッド空間で、$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$（但し $\vec{a},\vec{b}$ は成分が有理整数とする）　(1)

を考えたとき、$\cos\theta$ を－１と１との間の任意の有理数を取らせるための最小次元数はどうなるかを調べた。その結果、最小次元数＝５を得た。

つまり、(1)の左辺の $\cos\theta = \dfrac{n}{m}$（$m,n$ は互いに素の有理整数で、$m > |n| > 0$）のとき、(1)の式が成立する２つの格子点ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ がいつでも見つかるためには、５次元の実数ユークリッド空間が必要十分となる訳である。

この論文では、まず、第１に“ユニタリ空間”〈注：別名は複素内積有限次元空間。無限次元のときが、複素ヒルベルト空間となる〉のときの最小次元数の解と、第２に“ミンコフスキー空間”〈注：ノルムを $x^2+y^2+z^2-t^2$ 等で与える〉のときの最小次元数の解とを与える。また、いくつかの未解決の予想定理と問題も取り上げる予定である。

２．ユニタリ空間の場合

まず、コーシー・シュヴァルツの不等式をユニタリ空間の場にも使えるよう拡張しよう。

［定理2.1］n 次元ユニタリ空間の内積 $\langle x,y\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j$、ノルム $\|x\| \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\langle x,x\rangle}$ と定義すれば、次の不等式が成り立つ。

$$\|x\|\|y\| \geqq |\langle x,y\rangle| \quad (\text{但し} = \Leftrightarrow y = cx) \tag{2}$$

つまり、等号の成り立つのは、x,y が比例関係にあるときが必要十分である。（勿論、x,y の一方が０ベクトルのときは、等号は明らかであるから、x,y は共に０でないとしてよい。）

［証］行列式を使って、

$$\begin{vmatrix} \|x\|^2, & \langle x,y\rangle \\ \langle\bar{x},\bar{y}\rangle & \|y\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{x}_j, & \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j \\ \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k, & \sum_{k=1}^{n} y_k\bar{y}_k \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_j\bar{x}_j, & x_j\bar{y}_j \\ \bar{x}_k y_k, & y_k\bar{y}_k \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j<k}^{n}\left(\begin{vmatrix} x_j\bar{x}_j, & x_j\bar{y}_j \\ \bar{x}_k y_k, & y_k\bar{y}_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k\bar{x}_k, & x_k\bar{y}_k \\ \bar{x}_j y_j, & y_j\bar{y}_j \end{vmatrix}\right)$$

$$\equiv \qquad\qquad \equiv$$

$$x_j y_k\begin{vmatrix} \bar{x}_j, & \bar{y}_j \\ \bar{x}_k, & \bar{y}_k \end{vmatrix} \qquad x_k y_j\begin{vmatrix} \bar{x}_k, & \bar{y}_k \\ \bar{x}_j, & \bar{y}_j \end{vmatrix}$$

〈注：≡は横出しの項が、対応する項に等しいという意味である〉から $\begin{vmatrix} x_j, & y_j \\ x_k, & y_k \end{vmatrix}$

$$/\!/\!/$$

$$\left(\quad\right) = \begin{vmatrix} \bar{x}_j, & \bar{y}_j \\ \bar{x}_k, & \bar{y}_k \end{vmatrix}(x_j y_k - x_k y_j) \quad = \left\|\begin{vmatrix} x_j, & y_j \\ x_k, & y_k \end{vmatrix}\right\|^2$$

（但し $|z|^2 = z\bar{z}$ を表わす）となり、言えた。何となれば、

左辺 $= (|x||y|)^2 - |\langle x, y\rangle|^2 =$
$(|\vec{x}||\vec{y}|)^2 - |\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle|^2$

右辺 $= \sum_{j<k}\left\|\begin{vmatrix} x_j, & y_j \\ x_k, & y_k \end{vmatrix}\right\|^2$

であるから。

また $= \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_j, & y_j \\ x_k, & y_k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_j y_j = y_j x_k \Leftrightarrow$

$\dfrac{y_j}{x_j} = \dfrac{y_k}{x_k} \Leftrightarrow \dfrac{y_j}{x_j} = c \Leftrightarrow \vec{y} = c\vec{x}$ であるから。

（但し j,k は1から n までの任意の整数（$j<k$）、また、c はある複素定数となる。）　［了］

〈注：共役複素の記号－(バー)を取り去ったものが、本来のコーシー・シュヴァルツの不等式で、これも後で使う〉

次に、いよいよ本論に這入る訳であるが、ここで必要になる言葉を用意しておく。まず、“G－整数”〈注：複素整数のこと。つまり、複素数の実部、虚部が共に有理整数になるときをいう〉、また、“G－有理数”〈注：これは複素有理数のことで、実部、虚部が共に有理数のときをいう〉という術語を用意しておく。（注：GはGaussの頭文字から取ってある。）

［定理2.2の（Ⅰ）］1次元ユニタリ空間の0でない2つの格子点ベクトル x, y に対して、次の(3)

$$C_\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \tag{3}$$

で決まる C_θ は、絶対値が1である。そして C_θ がG－有理数になるときに限って、ピタゴラス数 $U^2+V^2=W^2$（但し、U, V, W は整数で、W は正とする）より定まる $(U+iV)/W$ に一致する。

［証］1次元であるから $y = cx$ (イ)とかける。

$$\therefore C_\theta = \frac{x\cdot\bar{y}}{|x||y|} = \frac{x\bar{c}\bar{x}}{|x||cx|} = \frac{\bar{c}x\bar{x}}{|c||x|^2} = \frac{\bar{c}}{|c|}$$

(ロ)

(ロ)より $|C_\theta| = 1$ がいえた。さらに C_θ がG－有理数より、$C_\theta = u+iv$（但し u,v は有理数）とかける。u,v を通分して $u = \dfrac{U}{W}, v = \dfrac{V}{W}$ とかける。

そして

$$|C_\theta| = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{U}{W}\right)^2 + \left(\frac{V}{W}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow U^2+V^2 = W^2$$

で後半も言えた。　［了］

〈注：C は(イ)よりG－有理数であるから $C = \dfrac{P+iQ}{R}$ とかける。（但し P,Q,R は整数で $R>0$ とする）、よって、(ロ)に代入して $C_\theta = \dfrac{P+Qi}{|P+Qi|} = \dfrac{P+iQ}{\sqrt{P^2+Q^2}}$ となる。(一般形)〉

［定理2.2の（Ⅱ）］2次元ユニタリ空間の0でない x,y ベクトルに対して

$$C_\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}, S_\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}}{|x||y|}, T_\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{S_\theta}{C_\theta} \tag{5}$$

と定義したとき、T_θ がG－有理数なることが、かかる x,y が格子点ベクトルになるための必要十分条件である。

〈注：これは紀要第27号の［定理1］に対応すると見られる〉

［証］定理2.1の証明の保証する恒等式で $n=2$ のときを考えれば、

左辺 $= (|x||y|)^2 - |\langle x,y\rangle|^2$,

右辺 $= \left\|\begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}\right\|^2$ である。よって、

$|C_\theta|^2 + |S_\theta|^2 = |C_\theta|^2 + |S_\theta|^2 = 1$ である。〈注：$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$ であるから、S_θ が虚数のときは、$\sin z$ と同一視することが出来ないから上記の定義式を与えた訳である。〉

よって、(5)式により、x,y が格子点ベクトル、つまり、x,y の成分がG－整数のとき、C_θ の分子 $= x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$, S_θ の分子 $= x_1y_2 - x_2y_1$ より、これらは共にG－整数、よって T_θ はG－有理数でよい。〈注：$x \perp y$ のときは有り得るが、自明のCaseなので省いてある。また、C_θ の分子、S_θ

の分子が共に0だと $|x||y|=0$ になるが、これは仮定に反するので有り得ない〉

逆に、T_θ がG－有理数のとき、$T_\theta=u+iv$ とおこう。(但し、u,v は有理数)、よって、分母を通分して

$T_\theta=\dfrac{U}{W}+i\dfrac{V}{W}$（但し、$U,V,W$ は有理整数、$W\geqq 1$）とおく。

一方、(5)式により

$$T_\theta=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2}=\frac{-x_2}{x_1}$$

（但し $y_1=1,\ y_2=0$ とおいた。）

よって、$x_2=U+iV,\ x_1=-W$ とおけば、両者は一致する。よって、言えた。［了］

［定理2.2の(Ⅲ)］3次元ユニタリ空間では絶対値が1未満のG－有理数 $\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}p+iq$（但し p,q は有理数）を任意に与えても、それに対応する $C_\theta=\langle x,y\rangle/(|x||y|)$（但し x,y は0でない格子点ベクトル）が存在する。つまり、

$$p+iq=\frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|} \qquad (イ)$$

が成り立つ x,y が常に見出せる。

［証］これも定理2.1の証明で使われた恒等式が証明を解く鍵を提供して呉れる。$n=3$ のとき、

$$右\ 辺\ =\left\|\begin{vmatrix}x_1, & x_2\\ y_1, & y_2\end{vmatrix}\right\|^2+\left\|\begin{vmatrix}x_1, & x_3\\ y_1, & y_3\end{vmatrix}\right\|^2+\left\|\begin{vmatrix}x_2, & x_3\\ y_2, & y_3\end{vmatrix}\right\|^2=$$

$$|x_1y_2-x_2y_1|^2+|x_1y_3-x_3y_1|^2+|x_2y_3-x_3y_2|^2 \qquad (ロ)$$

より、添字の煩わしさとベクトル外積に結びつけるために $x\to X\overset{\mathrm{def}}{=}[x,y,z],\ y\to U=[u,v,w]$ と置き直してやると、

$$右辺=|yw-zv|^2+|zu-xw|^2+|xv-yu|^2 \qquad (ハ)$$

となる。

一方、左辺 $=|x|^2|y|^2-|\langle x,y\rangle|^2$ で、左辺は正の整数 N を表すから、(何となれば0となれば、$|C_\theta|=1$ となり仮定に反するから)、左辺 $=a^2+b^2+c^2+d^2$（但し、a,b,c,d は0を含む正の整数）とかける。

よって、(ハ)の第3項 $=0\Leftrightarrow xv=yu\Leftrightarrow$

$$x=ku,y=kv\ （但し\,k\,は0でない複素数） \qquad (0)$$

と取ってやると、

$$yw-zv=v(kw-z)=a+ib \qquad (1)$$

$$zu-xw=u(z-kw)=c+id \qquad (2)$$

を満たすG－整数 $u,\ v,\ w;k$ が以下のように取れるのである。〈注：正確には k のみG－有理数〉

但し $z=kw-\varepsilon$（ε は単数） (3)

と取るのである。

特に $\varepsilon=1$ として

(1)から　$v=a+ib$ (1)′

(2)から　$u=(-c)+i(-d)$ (2)′

よって、(0)から

$$\begin{cases}x=ku=-k(c+id)\\ y=kv=+k(a+ib)\\ z=kw-1\end{cases} \qquad (4)$$

（但し、k は虚数でも可）となる。

故に $\alpha\equiv p+iq=(P+iQ)/R$（但し P,Q,R は整数で、$R>0$）を与えたとき、$C_\theta=\alpha$ なる格子点ベクトル X,U が以下のように求まる。〈但し $C_\theta\equiv\langle X,U\rangle/(|X||U|)$〉 $N=(|X||U|)^2-|\langle X,U\rangle|^2=(|X||U|)^2(1-|C_\theta|^2)=$ (ロ)の右辺に注意して

$$N=分子=R^2-(P^2+Q^2)=a^2+b^2+c^2+d^2=|a+bi|^2+|c+di|^2 \qquad (ニ)$$

（但し、分母 $=(|X||U|)^2$ で、N は $1-|C_\theta|^2$ の分子を意味する）とかけることより、(1)′、(2)′、(4)より

$$R^2=|U|^2|X|^2=(N+|w|^2)\times(N|k|^2+|kw-1|^2) \qquad (ホ)$$

となる。特に $w=0$ とおくと、$z=-1$ で

$$\begin{aligned}R^2&=N(N|k|^2+1)=N^2|k|^2+N\Leftrightarrow N^2|k|^2\\&=R^2-N=P^2+Q^2=|P+Qi|^2\Leftrightarrow|Nk|^2\\&=|P+Qi|^2\end{aligned} \qquad (ヘ)$$

(ヘ)より　$k=\dfrac{P+Qi}{N}$ (ト)

と取れてよい。

実際、このとき

$$|X|^2=|x|^2+|y|^2+|z|^2=|k|^2N+1=\frac{P^2+Q^2+N}{N}=\frac{R^2}{N}$$

$|U|^2=N$　より

$$\therefore\ |X||U|=\sqrt{\frac{R^2}{N}}\sqrt{N}=R$$

また

$$\langle X,U\rangle=x\times\bar{u}+y\times\bar{v}+z\times\underset{=0}{\bar{w}}$$

$$=-k(c+di)\times(-c+di)+k(a+bi)\times(a-bi)$$

$$=k(c^2+d^2)+k(a^2+b^2)=kN=P+Qi$$

であるから $C_\theta=\dfrac{\langle X,U\rangle}{|X||U|}=\dfrac{P+Qi}{R}$ (チ)

となりよい。［了］

≪注：前の定理2.2の(Ⅱ)を考慮すると N の平方

数の数は3個ないし4個と考えてよい。(それは $c=0$, $d=0$ だと、X,U の第1成分が0となり、よって、2次元空間と退化して見られるから)。また、定理2.2の(Ⅰ)では N の平方数の数は、2個ないし1個である。

1個の例は $C_\theta=\dfrac{4+20i}{21}$ のとき、$k=\dfrac{4+20i}{25}$ で、$a=5, b=0, c=0, d=0$ ($\because N=R^2-(P^2+Q^2)=5^2$ 〈注：$R=21, P=4, Q=20$〉より) により

$$\left.\begin{array}{lll} x=0, & y=(4+20i)/5, & z=-1 \\ u=0, & v=5, & w=0 \end{array}\right\} \text{であるから}$$

$$|X|^2=|y|^2+|-1|^2=\frac{441}{25}=\left(\frac{21}{5}\right)^2,$$

$|U|^2=25=5^2$

$\langle X,U\rangle=4+20i$ より

$C_\theta=\dfrac{4+20i}{21}$, $|S_\theta|^2=1-|C_\theta|^2=\dfrac{25}{441}$ で、$N=5^2$ となる。

ここで、$|S_\theta|=\dfrac{5}{21}$ であるが $S_\theta=\dfrac{\pm5}{21}, \dfrac{\pm5i}{21}, \dfrac{\pm1\pm2i}{21}$ の可能性があるが、そのうちのどれかは、一意に決めることは出来ない。≫

[例] $C_\theta=\dfrac{4+20i}{21}$ (但し $P=4$, $Q=20$, $R=21$) と考えると、$N=R^2-(P^2+Q^2)=25=3^2+4^2$ と見て、$a=3$, $b=4$, $c=d=0$ と取ると

$$\left.\begin{array}{lll} x=0, & y=kv=\dfrac{-68+76i}{25}, & z=-1 \\ u=0, & v=3+4i, & w=0 \end{array}\right\} \text{であるから}$$

$|X|^2=\left(\dfrac{21}{5}\right)^2$, $|U|^2=25=5^2$, $\langle X,U\rangle=4+20i$ でよい。

[例] $N=7, P=2, Q=5, R=6$ とおくと、$C_\theta=\dfrac{2+5i}{6}$, $k=\dfrac{2+5i}{7}$, また $7=1^2+1^2+1^2+2^2$ により $a=1, b=1, c=1, d=2$ と取ることにより $X=\left[\dfrac{8-9i}{7}, \dfrac{-3+7i}{7}, -1\right]$, $U=[-1-2i, 1+i, 0]$ が出て $|X|=6/\sqrt{7}$, $|U|=\sqrt{7}$, $\langle X,U\rangle=2+5i$ でよい。

上の定理2.2の(Ⅰ)から(Ⅲ)までにより、次の定理2.2が出た。

[定理2.2] 格子点ユニタリ空間において、絶対値1未満のG－有理数 C_θ を与えたとき、次の方程式

$$C_\theta=\frac{\langle X,U\rangle}{|X||U|} \tag{1}$$

がいつでも解ける最小次元数は3である。

いよいよ、ミンコフスキ空間の場合に這入る訳であるが、我々は次の事実を確認しておく。

$\vec{x}=[x,y,z,it]$, $\vec{X}=[X,Y,Z,iT]$ として普通に内積をつくれば

$$\vec{x}\cdot\vec{X}=x\cdot X+yY+zZ-tT \tag{1}$$

となる。これが、これからの基礎となる。また、第4成分は物理的には時間成分と見られるが、ここでは純粋に数学的に扱う。また、第4成分が0なら、ユークリッド空間そのものだから $|\vec{x}|^2$, $|\vec{X}|^2$ は0以上のものしか扱わないことにする。

3．三角余弦で見る場合

コーシ・シュヴァルツの不等式の証明を保証する公式で $n=2$ のときを考えると

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2=\begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}^2 \tag{2}$$

となる。ここで、$x_2=it$, $y_2=iT$ とおくと、(2)の右辺は0以下となる。

よって、(2)を $\vec{x}=[x,it]$, $\vec{y}\equiv\vec{X}=[X,iT]$ とかきなおして

$$|\vec{x}|^2|\vec{X}|^2-(\vec{x}\cdot\vec{X})^2=-\begin{vmatrix} x, & t \\ X, & T \end{vmatrix}^2 \tag{2$'$}$$

(2)′ により、$\cos\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{X}}{|\vec{x}||\vec{X}|}$ は、2次元のミンコフスキ空間では、実質的な意味を持たないことが分かった。(何となれば $|\cos\theta|<1 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2|\vec{X}|^2>(\vec{x}\cdot\vec{X})^2$ であるから)。

まとめて、次の定理を得る。

[定理3.1] 2次元のミンコフスキ空間では、

$$\cos\theta=\frac{\vec{x}\cdot\vec{X}}{|\vec{x}||\vec{X}|} \quad \text{(但し } |\vec{x}|^2, |\vec{X}|^2 \text{ は共に正とする)} \tag{3}$$

をみたす、0でないベクトル $\vec{x}, \vec{X}$ は $\cos\theta=\pm1$ のときのみ意味を持ち、向きが同じか反対になる。そして $-1<\cos\theta<1$ ではかかる $\vec{x}, \vec{X}$ は存在しない。

この定理3.1を踏まえて、次の定理3.2を証明する。そのときの基礎になるのが、紀要第30号の定理5.1である。

［定理3.2］3次元格子点ミンコフスキ空間では $|\cos\theta| < 1$ なる有理数の $\cos\theta$ について

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{X}}{|\vec{x}||\vec{X}|} \tag{3}$$

なる方程式がいつでも解ける。つまり、$\frac{n}{m}$（m,n は互いに素の整数で、$m > |n| > 0$）に対して、

$$\frac{n}{m} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{X}}{|\vec{x}||\vec{X}|} \tag{3)$'$}$$

をみたす格子点ベクトル $\vec{x},\vec{X}$ が存在する。

［証］まず、次の等式に注意しよう。

$$4N = (N+1)^2-(N-1)^2 \tag{イ}$$

$$\Leftrightarrow N = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2-\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 \tag{イ)$'$}$$

(イ)$'$ は任意の奇数は、平方数の差で表されることを意味する。

［定理5.2］に合わせて

$$\cos\theta = \frac{n}{m},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m} = \frac{p\sqrt{q}}{m} \tag{ロ}$$

としてよい。そして q には平方数は含まれないとしてよい。つまり $\sqrt{q}$ は無理数とみてよい。（それは紀要第27号の［定理1］から $\sin\theta$ が有理数だと、$\tan\theta$ も有理数で、2次元ユークリッド空間で解けるから。）

Case1. q が奇数のとき、(イ)$'$ により $a = \frac{q+1}{2}$, $b = \frac{q-1}{2}$ とおけば、

$$q = a^2-b^2 \tag{ハ}$$

とかける。よって

$$\vec{u} = [a,0,bi],\vec{v} = [b,a,ai] \tag{ニ}$$

となる格子点ベクトル $\vec{u},\vec{v}$ をつくれば、全てがうまく行く。

まず $\vec{u}\perp\vec{v}$（$\because \vec{u}\cdot\vec{v} = a\times b+0\times a+ bi\times ai = 0$ より）また、$|\vec{u}| = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{q}$, $|\vec{v}| = \sqrt{b^2+a^2+(ai)^2} = b$

よって

$$\begin{cases} \vec{x} \equiv \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{q}}[a,0,bi] \\ \vec{y} \equiv \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{b}[b,a,ai] \end{cases} \tag{ヘ}$$

とおいて、紀要第30号の［定理5.2］にならって計算すると、(い)$''$ の式より第 (j,k) 成分表示で

$$mqs^2\mathcal{R}(\theta) = mqs^2E-(m-n)\{s^2[u_ju_k]+q[v_jv_k]\}-spq\left[\begin{vmatrix} u_j, & u_k \\ v_j, & v_k \end{vmatrix}\right] \text{（但し } s = b \text{ となる）} \tag{ト}$$

（但し、$\vec{u} = [u_1,u_2,u_3],\vec{v} = [v_1,v_2,v_3]$ とする）

となるので、(ト)の右辺が整数でよい。〈注：添字 j,k を使ったのは、虚数単位 i との競合をさけるため〉

Case2. q が偶数のとき、a,b は正の半整数〈注：2倍すると整数になるという意味〉になるが、本質的にはCase1. に準じて扱えるので、同じことが言えるのでよい。〈注：(ト)の4倍を取れば、整数計算になる。〉［了］

ここで、ユニタリ空間の定理2.2の（Ⅲ）の証明を見ると、次の公式が得られる。

［公式Ⅰ］$C_\theta \equiv \frac{P+Qi}{R}$（但し P,Q,R は(有理)整数で、$R > \sqrt{P^2+Q^2}$ とする）を与えたとき、$N = R^2-(P^2+Q^2)$ として、$k = \frac{P+Qi}{N}$ を決めて、また N を表わす4つの平方数の元 a,b,c,d（但し0以上）をこの順で決めたとき、$u = (-c)+i(-d), v = a+ib, x = ku, y = kv, z = -1$ で決めたベクトル $\vec{X}, u,v,w = 0$ で決めたベクトル $\vec{U}$ を取ってやれば、$C_\theta = \frac{\vec{X}\cdot U}{|\vec{X}||\vec{U}|}$ が成り立つ。

これより少し難しくなるが、定理3.2も公式化してみよう。まとめると、次のようになる。

［公式Ⅱ］$\cos\theta = \frac{n}{m}$（但し、m,n は互いに素な整数で、$m > |n| > 0$ とする）、$\sin\theta = \frac{p\sqrt{q}}{m}$ とするとき、（但し、p,q は正の整数で、q には平方数は入っていないとする）、この場合 $a = \frac{q+1}{2}$、$b = \frac{q-1}{2}$ として、a,b を決めて、ベクトル $\vec{u} = [a,0,bi]$, $\vec{v} = [b,a,ai]$ をつくると、$|\vec{u}| = \sqrt{q}$, $|\vec{v}| = b$ である。

そのとき、(ト)を計算することより

$$mqb^2\mathcal{R}(\theta) = mqb^2\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}-(m-n)\left\{b^2\begin{bmatrix} a^2, & 0, & abi \\ 0, & 0, & 0 \\ abi, & 0, & -b \end{bmatrix}+q\begin{bmatrix} b^2, & ab, & abi \\ ab, & a^2, & a^2i \\ abi, & a^2i, & -a^2 \end{bmatrix}\right\}-bpq\begin{bmatrix} 0, & a^2, & qi \\ -a^2, & 0, & -abi \\ -qi, & abi, & 0 \end{bmatrix} \tag{ト)$'$}$$

を得る。

そして、(ト)$'$ に右から $\downarrow u = {}^t[a,0,bi]$ を施すと

$\downarrow U = qb[b(na+pq), paq, i(nb^2+paq)]^t$ を得る。〈注：転置行列のしるしである t は左右どちらの肩につけても可〉。そのとき、$|\downarrow U|^2 = m^2b^4q^3 \Leftrightarrow |\downarrow U| = mb^2q\sqrt{q}$ となる。

その上

$\vec{u}\cdot\vec{U} = \downarrow u \cdot \downarrow U = qb \times \{ab(na+pq) - b(nb^2 + paq)\} = qb^2 \times n(a^2-b^2) = nb^2q^2$

で有るから

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{U}}{|\vec{u}||\vec{U}|} = \frac{nb^2q^2}{mb^2q^2} = \frac{n}{m} = \cos\theta$$

が出てよい。

［例］$\cos\theta = \frac{1}{4}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\theta = \frac{2}{7}$, $\sin\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$; $\cos\theta = \frac{3}{7}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{40}}{7} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ 等については、読者各自が検討して欲しい。

4．おわりに

本当は $\cosh\theta$（双曲線関数）についても、$\cos\theta$ と同様に出来るのだが〈注：ミンコフスキ空間の場合〉、時間切れの関係で次回に回すことにする。

ただ、コンピュータによる計算結果までを考慮すると、完全に $\cosh\theta$（注：$|\vec{u}\cdot\vec{U}|/(|\vec{u}||\vec{U}|) > 1$ のとき）の場合も分かっている。それらを定理4.1、定理4.2として、次に掲げる。そして、これらをささえるプログラムもそれぞれにそえる。

［定理4.1］$\cosh\theta = \frac{n}{m}$（但し、$m, n$ は正の整数で $n > m$）とするとき、$\sinh\theta = \sqrt{\cosh^2\theta - 1} = \frac{p\sqrt{q}}{m}$（注：$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ より、よって $p^2q = n^2 - m^2$）を用意するとき、分子 $\equiv (|\vec{u}||\vec{U}|)^2 - (\vec{u}\cdot\vec{U})^2 < 0$ で、$\frac{\vec{u}\cdot\vec{U}}{|\vec{u}||\vec{U}|} = \cosh\theta$ が2次元のミンコフスキ空間で存在するための必要十分条件は、分子 $\equiv -1 (mod8)$ である。（但し、分子 $\equiv 0, -4 (mod8)$ は除く）

［定理4.2］定理4.1での式の分子 $\equiv -2, -3, -5, -6, -7 (mod8)$ のときは、2次元では存在しない。

そして、3次元ミンコフスキ空間で $\cosh\theta > 1$ なる $\cosh\theta$ が有理数であるならば、

$$\cosh\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{U}}{|\vec{u}||\vec{U}|}$$

となる格子点ベクトル $\vec{u}, \vec{U}$ はつねに存在する。

次に、今の所は予想定理であるが、それを掲げる。そのために、実 n 次元空間に次の内積を導入して、“超ミンコフスキ空間”という。

$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1} - \lambda x_ny_n$

（但し λ は正の整数）

と定義する。

［予想定理］上の超ミンコフスキ空間では、

(イ) λ が1個ないし2個の平方和で表わされるならば、その最小次元数は3である。

(ロ) λ が3個ないし4個の平方和で表わされるならば、その最小次元数は4である。

なお、下に掲げるプログラムは山下　進教官に作成して頂き、そのもとにチェックしたものである。先生のご協力なければ、ここまで深く掘り下げられませんでした。ここに深く感謝します。

```
C      FILE NAME REAL2D1.F
       INTEGER X,Y,U,V,N,C1,C2,C3,BUNSI
       READ(5,*) N
       DO 100 U=-N,N
        DO 110 V=-N,N
          DO 120 X=0,N
           DO 130 Y=0,N
             C1=X*X-Y*Y
             C2=U*U-V*V
             C3=X*U-Y*V
             BUNSI=C1*C2-C3*C3
             IF(C1.LT.0) THEN
              GOTO 130
             ELSEIF(C2.LT.0) THEN
              GOTO 130
             ELSEIF(BUNSI.GT.0) THEN
              GOTO 130
             ELSEIF(MOD(BUNSI,8).EQ.-1) THEN
              WRITE(6,*) 'X=',X,' ','Y=',Y
              WRITE(6,*) 'U=',U,' ','V=',V
              WRITE(6,*) 'BUNSI=',BUNSI
              GOTO 999
             ELSE
              GOTO 130
             ENDIF
  130      CONTINUE
  120     CONTINUE
  110    CONTINUE
  100   CONTINUE
  999  STOP
       END
```

（2次元の判例がある場合のリスト）

```
C       FILE NAME REAL2D1.F
        INTEGER X,Y,U,V,N,C1,C2,C3,BUNSI
        READ(5,*) N
        DO 100 U=-N,N
         DO 110 V=-N,N
           DO 120 X=0,N
            DO 130 Y=0,N
              C1=X*X-Y*Y
              C2=U*U-V*V
              C3=X*U-Y*V
              BUNSI=C1*C2-C3*C3
              IF(C1.LT.0) THEN
               GOTO 130
              ELSEIF(C2.LT.0) THEN
               GOTO 130
              ELSEIF(BUNSI.GT.0) THEN
               GOTO 130
              ELSEIF(MOD(BUNSI,8).EQ.-5) THEN
               WRITE(6,*) 'X=',X,' ','Y=',Y
               WRITE(6,*) 'U=',U,' ','V=',V
               WRITE(6,*) 'BUNSI=',BUNSI
               GOTO 999
              ELSE
               GOTO 130
              ENDIF
 130         CONTINUE
 120        CONTINUE
 110       CONTINUE
 100      CONTINUE
 999    STOP
        END
```

（2次元の判例がない場合のリスト）

```
C       FILE NAME REAL3D3.F
        INTEGER X,Y,Z,U,V,W,N,C1,C2,C3,RAM,BUNSI
        READ(5,*) N
        REAL(5,*) RAM
        DO 100 U=0,N
         DO 110 V=-N,N
          DO 120 W=-N,N
           DO 130 X=0,N
            DO 140 Y=0,X
             DO 150 Z=0,Y
              C1=X*X+Y*Y-RAM*Z*Z
              C2=U*U+V*V-RAM*W*W
              C3=X*U+Y*V-RAM*Z*W
              BUNSI=C1*C2-C3*C3
              IF(C1.LT.0) THEN
               GOTO 150
              ELSEIF(C2.LT.0) THEN
               GOTO 150
              ELSEIF(BUNSI.LT.0) THEN
               GOTO 150
              ELSEIF(MOD(BUNSI,8).EQ.7) THEN
               WRITE(6,*) 'X=',X,' ','Y=',Y,' ','Z=',Z
               WRITE(6,*) 'U=',U,' ','V=',V,' ','W=',W
               WRITE(6,*) 'C1=',C1,' ','C2=',C2,' ','C3=',C3
               WRITE(6,*) 'BUNSI=',BUNSI
               GOTO 999
              ELSE
               GOTO 150
              ENDIF
 150         CONTINUE
 140        CONTINUE
 130       CONTINUE
 120      CONTINUE
 110     CONTINUE
 100    CONTINUE
 999    STOP
        END
```

（3次元のチェックリスト）

参考文献

〔1〕河島　博：2つの格子点ベクトルのなす角の三角関数の値と次元との関わりについて（Ⅰ）．小山工業高等専門学校研究紀要（27号）1995

〔2〕河島　博：等角写像の一般化とその応用について　小山高専紀要（第30号）1998

〔3〕A．ヴェイユ：初学者のための整数論（片山・田中・丹羽・長岡　訳）現代数学社　1995

〔4〕大石　彰：代数学のすすめ．牧野書店1997

（受理年月日　1998年9月30日）