

プロセス制御系設計用CADソフト(その20) — LQI制御とI-PD制御の関連性 —

笠原 雅人・黒須 茂・佐藤 隆太*・百武 康弘**

CAD Software for Designing Process Control System — Relations between LQI Control and I-PD Control —

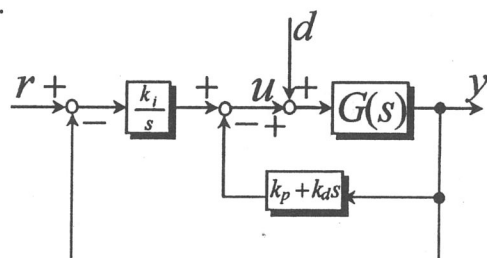
Masato KASAHARA・Shigeru KUROSU・Ryuta SATO*・Yasuhiro HYAKUTAKE**

1. はじめに

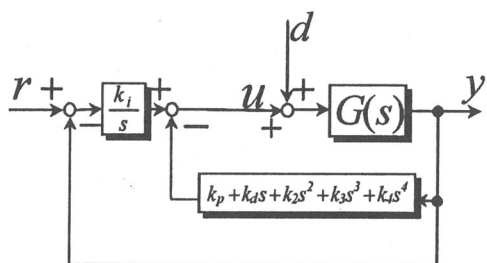
異なった背景をもつI-PD制御とLQI制御は、構造的に類似性をもっている。本研究では、1次おくれ+むだ時間系のプラントを取り上げ、目標値変化に対する追従特性と評価関数の観点から両者の関連性を検討している。

2. 制御方式

Fig.1にI-PD方式、LQI方式のブロック線図を示す。



(a) I-PD制御



(b) LQI制御

Fig.1 I-PD方式とLQI方式

このように、両者のブロック線図は類似している。(a)のI-PD方式は、古典制御理論によるPID制御系の発展したものであり、PID制御ではP動作を主制御としているのに対して、I-PD制御ではI動作を主制御としている。このことにより、目標値が変化した場合の追従特性を緩やかにすることに成功している。

I-PD方式では、操作量 u とプラントの入出力特性はつぎのように与えられる。

* 平成10年度機械工学科卒業生(現 岩手大学)

**平成10年度機械工学科卒業生(現 アダモンド工業(株))

$$\left. \begin{aligned} u &= -k_d \left(\frac{dy}{dt} \right) - k_p y + k_i \int (r-y) dt \\ y &= G(s) \cdot (u+d) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

古典制御理論の特徴は、システムをブラックボックスとして考えていることにある。システム内部の状態を計測することができなくても、出力 y とその微分値、そして目標値と出力との偏差 $(r-y)$ の積分値から制御できるように考えられている。

(b)のLQI方式は、現代制御理論から生まれた制御方式である。システムは一階の連立微分方程式(状態方程式)で表現でき、システムの状態がすべて測定できるものとしているのが、現代制御理論の特徴である。LQI方式ではすべての状態をフィードバックするが、プラントの伝達関数を1次おくれ+むだ時間系として近似した場合、状態方程式で記述することができない。

そこで本研究では、パデの近似を用いてむだ時間を近似し、プラントを5次の有理関数として表現することにする。むだ時間を近似しているので、オブザーバ(観測器)を用いて状態を推定する必要がある。これらの推定方法については、あとに詳しくのべる。

3. プラントの伝達関数

本研究では、プラントの伝達関数は

$$G(s) = \frac{e^{-L_p s}}{1 + T_p s} \quad T_p = 10 \text{ min}, L_p = 1 \text{ min} \quad (2)$$

であり、パデの近似を用いて分母系列表現すると、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{1 + (T_p + L_p)s + \left(\frac{2T_p + L_p}{2} \right) L_p s^2 + \left(\frac{3T_p + L_p}{6} \right) L_p^2 s^3 + \left(\frac{4T_p + L_p}{24} \right) L_p^3 s^4 + \left(\frac{5T_p + L_p}{120} \right) L_p^4 s^5 \dots} \\ &= \frac{b'_0}{a'_0 + a'_1 s + a'_2 s^2 + a'_3 s^3 + a'_4 s^4 + a'_5 s^5} \quad (3) \end{aligned}$$

本研究では、システムを一般化制御対象として考えるさいに、プラントの伝達関数を、つぎのように与えた。

$$G(s) = \frac{a_5}{s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5} \quad (4)$$

式(3)と比べると

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a'_4}{a'_5}, \quad a_2 = \frac{a'_3}{a'_5}, \quad a_3 = \frac{a'_2}{a'_5} \\ a_4 &= \frac{a'_1}{a'_5}, \quad a_5 = \frac{a'_0}{a'_5} = \frac{b'_0}{a'_5} \end{aligned} \quad (5)$$

であることがわかる。

4. 一般化制御対象

式(4)のような伝達関数は、Fig.2のようなブロック線図で表すことができる。

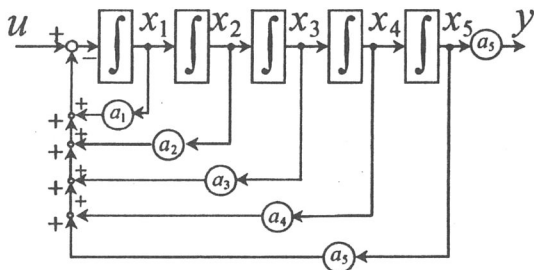


Fig.2 プラントのブロック線図

Fig.2のプラントに積分器とコントローラを付け加えると、Fig.3(a)と(b)のようになる。ここで、(a)と(b)は等価である。

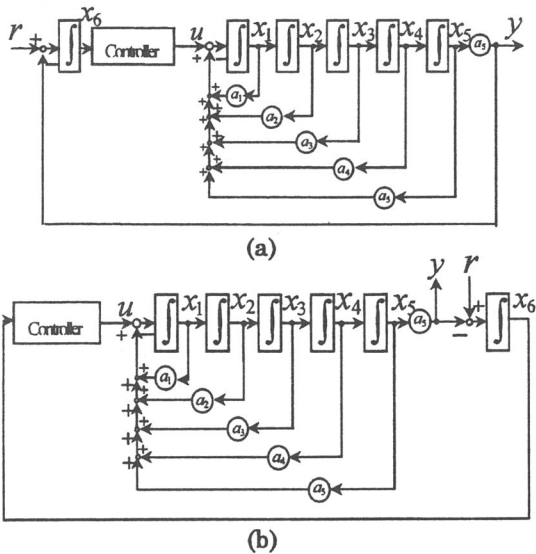


Fig.3 一般化制御対象

Fig.3のブロック線図より、微分方程式で表すと

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - a_4 x_4 - a_5 x_5 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \\ \dot{x}_4 &= x_3 \\ \dot{x}_5 &= x_4 \\ \dot{x}_6 &= r - a_5 x_5 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となり、式(6)は、つぎのような状態方程式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 r + \mathbf{B}_2 u \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a_5 \ 0]$$

である。このように、積分器も含めて一般化した状態方程式を一般化制御対象とよんでいる。

5. LQI制御

制御系の設計を動的最適化の観点から行う方式を最適制御(optimal control)という。これは、制御系の設計仕様を評価関数(performance index)と呼ばれるコスト関数で定量化し、システムを状態方程式で与えて、評価関数を最小とするような制御則を求めようとするものである。最適制御理論については、多くの文献^{1), 2), 3)}が紹介されているが、ここでは、その結果についての説明する。

制御系に一定の目標値 r が入った場合、定常偏差なく目標値に追従するには、制御系の一巡伝達関数に、目標値と同じ極をもっていなければならない(内部モデル原理)³⁾。入力 r がステップ入力ならば、制御系に積分器を加えることで解決できる。積分器を含んだ一般化制御対象

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 r + \mathbf{B}_2 u \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を一回微分すると、 r は一定値であるからつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \dot{u} \\ \dot{y} &= \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで新しく

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \mathbf{z}, \quad \dot{u} = v \quad (10)$$

とすると, 式(9)はつぎのように書ける.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}_2 v \\ y = \mathbf{c}\mathbf{z} \end{cases} \quad (11)$$

この制御系に対して, つぎのような2次形式の評価関数を与える.

$$J = \int [\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + v^T \mathbf{R} v] dt \quad (12)$$

この J を最小にする操作量の微分値 v は, つぎのようにして求めることができる.

$$\begin{cases} v = -\mathbf{F}\mathbf{z} \\ \mathbf{F} = [\mathbf{k} \quad -k_i] = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X} \end{cases} \quad (13)$$

ただし $\mathbf{X}$ は, つぎのRiccati方程式の正定解を用いる.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} - \mathbf{X} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (14)$$

式(13)の v を積分することにより, 式(12)を最小にする操作量 u を求める.

$$\begin{aligned} u &= \int v dt = -\mathbf{F} \int \mathbf{z} dt = -\mathbf{F}\mathbf{x} \\ &= -k_4 \left(\frac{d^4 y}{dt^4} \right) - k_3 \left(\frac{d^3 y}{dt^3} \right) - k_2 \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \\ &\quad - k_d \left(\frac{dy}{dt} \right) - k_p y + k_i \int (r - y) dt \end{aligned} \quad (15)$$

となる. 式(12)の評価関数において

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = w \quad (16)$$

とした場合, 式(12)は

$$J = \int \left[(r - y)^2 + w \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] dt \quad (17)$$

であることがわかる. ここで w は重み係数であり, w を大きく与えると操作量の微分値が小さくなるように制御系が設計される. 逆に, w を小さく与えると, 目標値にできるだけ速く追従するように制御系が設計される.

また, 式(9), (10), (11)を考えずに, 式(7)の制御系に対してつぎのような評価関数を与えても, 結果は同じとなる. なぜなら, I動作を考慮にいた一般化制

御対象として, 式(7)を導いたからである.

$$J = \int [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u] dt \quad (18)$$

このような制御系を, LQI (Liner Quadratic Integral) 制御とよぶ.

6. フィードバックゲインと応答特性

6.1 LQI制御

LQI制御によるフィードバックゲインをTable1に示し, シミュレーション結果をFig.4に示す. このとき, 1次おくれ+むだ時間系のプラント(式(2))では, すべての状態量を知ることができないので, パデ近似による一般化制御対象(式(7))に対してシミュレーションを実施している.

Table 1 LQI制御のフィードバックゲイン^{注)}

w	k_i	k_p	k_d	k_2	k_3	k_4
0.001	31.6	56.7	41.6	18.5	5.62	1.07
0.01	10.0	23.2	18.3	8.40	2.66	0.57
0.1	3.16	10.2	8.60	4.05	1.31	0.30
1.0	1.00	4.58	4.08	1.96	0.64	0.15
10.0	0.32	2.02	1.86	0.91	0.30	0.07

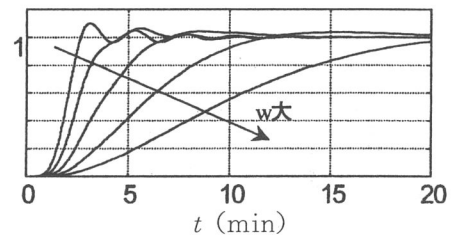


Fig.4 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

Fig.4より, 重み係数 w を大きくしていくと, 目標値への追従性が緩慢になっていく. 重み係数 w をこれ以上大きくすることは, 実用的ではない.

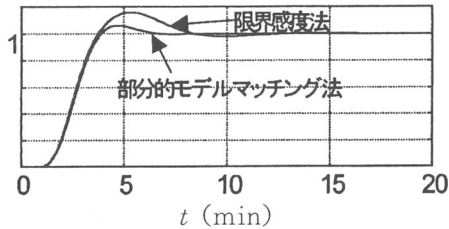
6.2 I-PD制御のPIDゲインと応答特性

限界感度法と部分的モデルマッチング法によりPIDゲインを計算し, I-PD方式における応答を求めている. PIDゲインと応答特性をTable2とFig.5に示す. このとき, プラントは1次おくれ+むだ時間系(式(2))である.

Table 2 I-PD制御のPIDゲイン

	k_i	k_p	k_d
限界感度法	5.06	9.77	4.72
部分的モデルマッチング法	4.66	10.52	3.23

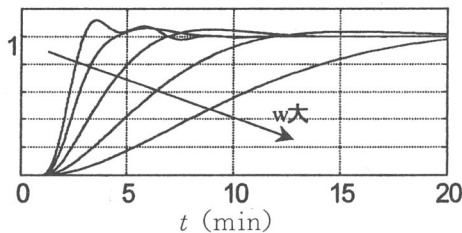
注) Table.1のフィードバックゲインは, 式(8)において, $\mathbf{B}_2 = [a_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ として計算したものである. 過年度の文献⁴⁾と結果を合わせたことによる.

Fig.5 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

LQI方式の応答特性Fig.4のなかで、上の2つの応答に最も近いのは、重み係数 $w=0.01$ のときである。よって、I-PD方式とLQI方式を比較するさいには、重み係数 w は0.01とする。I-PD制御において、式(17)の評価関数を用い、最適化手法によりPIDゲインを決定した。計算結果とシミュレーション結果を、Table 3とFig.6に示す。プラントは式(4)である。

Table 3 I-PD制御のPIDゲイン

w	k_i	k_p	k_d
0.001	7.67	13.8	6.37
0.01	4.72	10.7	4.66
0.1	2.15	6.59	2.85
1.0	0.83	3.65	1.61
10.0	0.27	1.56	0.00

Fig.6 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

このように、LQI方式とほとんど変わらない応答を得ることができる。応答特性の観点からみると、I-PD制御とLQI制御のあいだに違いはみられない。

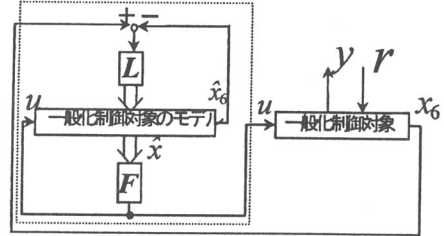
7. オブザーバ (観測器)

5章に述べたLQI制御では、プラントの状態変数をすべて利用できるという前提で話を展開している。しかしながら、状態変数として設定した物理量の中には、測定が困難または不可能な物理量があったり、センサのコストの点から多くの状態変数を使用することを避けたい場合が多い。このようなときには、状態変数を時々刻々推定する機構、すなわちオブザーバを使用することになる。

オブザーバとは、制御動作中のプラントの操作量、出力、そしてプラントの状態変数モデルから状態変数の推定を行う機構である。この機構は、最初に推定のずれがあっても、時間の経過とともに真の状態値に限りなく近づく性質をもつ動的システムである。

7.1 状態推定のためのシステム

本研究では、Fig.7のようなシステムを用いて状態量を推定した。点線で囲まれた部分がオブザーバであり、Fig.3におけるコントローラである。



(ここで、 L はオブザーバゲイン、 F はフィードバックゲイン)

Fig.7 状態推定システム

式(7)で表わされる一般化制御対象

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 r + \mathbf{B}_2 u \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases} \quad (7)$$

において、つぎのようなオブザーバをつくる。

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 u + \mathbf{L}(x_6 - \hat{x}_6) \quad (19)$$

真の出力 x_6 とその推定値 $\hat{x}_6$ との偏差をフィードバックしていることがわかる。制御則はオブザーバの状態を用いて

$$u = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} \quad (20)$$

とする。このように、 n 次の状態変数を推定するために、プラントモデルを基礎とした次のモデルを必要とするオブザーバは、**同次元オブザーバ**とよばれる。しかしながら、出力 y も状態変数となりうるので、出力 y を推定する必要はないという事実を考慮すればオブザーバの次数を低下することができ、オブザーバの構成に際し有利となる。これらのうち最小の次数となるものは**最小次元オブザーバ**とよばれているが、その説明については省略する。以下では同次元オブザーバについてのみ述べる。

7.2 極配置によるオブザーバゲインの決定

オブザーバとコントローラを含んだ、Fig.7のブロック線図は、つぎのような状態方程式で表わすことができる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

$$(e = x - \hat{x})$$

ここで、システム行列は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (22)$$

であるから、特性方程式はつぎのようになる。

$$\det[(Is-A+Lc)(Is-A+B_2F)] = 0 \quad (23)$$

式(23)から明らかなように、Fig.7の制御系の特性多項式は、フィードバック系の特性多項式 $\det(Is-A+B_2F)$ と、オブザーバの特性多項式 $\det(Is-A+Lc)$ との積となっている。よって、LQI制御系の設計とオブザーバの設計を独立して行えることになり、このことを「分離定理」とよぶ。分離定理はオブザーバのもつ際立った性質の一つである。また分離定理とはオブザーバとフィードバック系が独立して設計できることを示したものであり、オブザーバを使用した制御系の特性は、純粋な状態フィードバック系の特性とは異なる。

式(23)の解を極という。複素平面上においてすべての極が原点より左側にあれば、そのシステムは安定であり、より左側に遠くなるほど収束が速いことが知られている。オブザーバを使用する場合、オブザーバはフィードバック系よりも速く収束しなければならない。これは、オブザーバの極配置がフィードバック系の極配置よりも左側になるようにオブザーバゲインを決めることにより実現できる。ここでは、Fig.8に示す三種類の極配置を検討する。フィードバックの重み $w = 0.01$ である。また、Fig.9にはシミュレーションによる応答特性を示す。プラントは1次おくれ+むだ時間

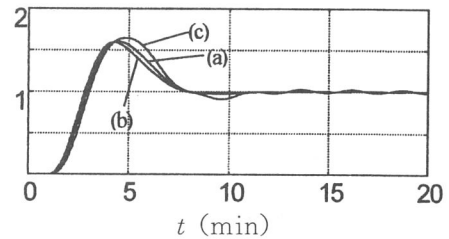
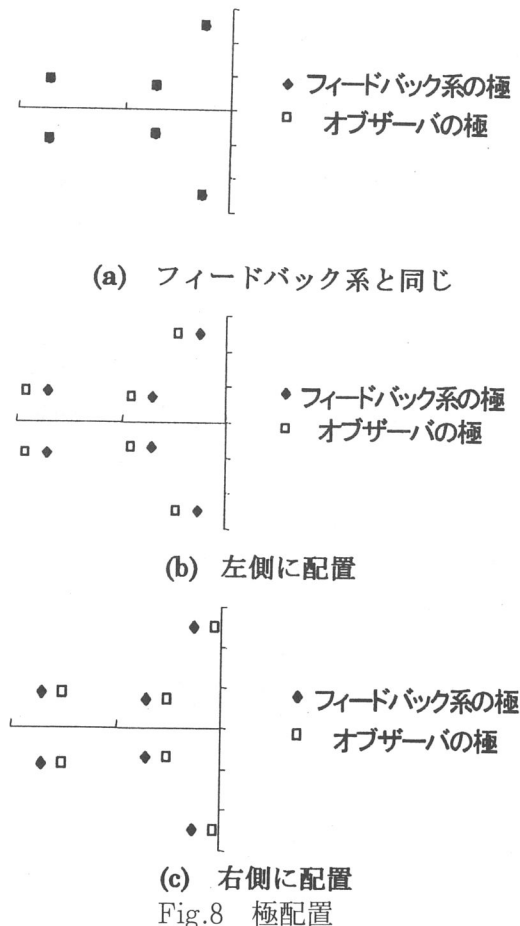


Fig.9 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

系である。

このように、オブザーバを使うと応答特性が悪化する。オブザーバの極をフィードバック系の極より左側に配置しても、応答特性に大きな改善はみられない。また、オブザーバの極を右側に配置した場合の応答特性(c)には、持続振動がみられる。これより、オブザーバの極は制御対象の極よりも左側に配置しなければならないが、極端に左側に配置することはコントローラに負担を与えるだけで無意味である。また、オブザーバの収束をあまり速くすると、観測ノイズなどの外乱の影響が強くなるので、そのことを考慮して設定することも重要である。

オブザーバを考えるさいに注意しなければならないのは、実際には制御系の初期値とオブザーバの初期値がちがっているという点である。これについては、あとに詳しく述べる。

7.3 最適オブザーバ

フィードバック系において最適なフィードバックゲインを求めることができるように、オブザーバにおいても最適なオブザーバゲインを求めることを考える。これについては、種々の文献が紹介^{1), 2), 3)}されているが、ここではその結果についてのみ説明する。

最適なオブザーバゲイン L は、つぎの式を解くことによって求められる。

$$L = Yc^T \quad (24)$$

ただし Y はつぎのRiccati方程式の正定解を用いる。

$$AY + YA^T - Yc^T c Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (25)$$

本研究で考えているオブザーバはFig.7のように x_6 を問題としているので、オブザーバを設計するさいには

$$c = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (26)$$

とする。

7.4 オブザーバの重み係数

一般にオブザーバを用いたフィードバック制御系(LQG制御系)は、すべての状態が測定可能であるとして設計されたフィードバック制御系(LQI制御系)とは応答特性が変化する。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 r + \mathbf{B}_2 u \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (7)$$

式(7)の一般化制御対象に対して、つぎのようなオブザーバをつくる。一般化して式(19)をつぎのように表現する。

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 u + \mathbf{L}(\mathbf{c}\mathbf{x} - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}) \quad (27)$$

ここに、操作量 u は式(20)とする。

すべての状態が測定できる場合の閉ループ系伝達関数は、式(7)から

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 r + \mathbf{B}_2 u \\ u &= -\mathbf{F}\mathbf{x} \\ \mathbf{s}\mathbf{l}\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 r - \mathbf{B}_2 \mathbf{F}\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^{-1} \mathbf{B}_1 r \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (28)$$

$$\frac{y}{r} = \mathbf{c}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^{-1} \mathbf{B}_1$$

となる。オブザーバを使用した場合の閉ループ系伝達関数は、式(27)より

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 u + \mathbf{L}(\mathbf{c}\mathbf{x} - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}) \\ u &= -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{s}\mathbf{l}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}_2 \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{c}\mathbf{x} - \mathbf{L}\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{c})^{-1} \mathbf{L}\mathbf{c}\mathbf{x} \\ u &= -\mathbf{F}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{c})^{-1} \mathbf{L}\mathbf{c}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (29)$$

この u を式(7)に代入すると、閉ループ系伝達関数はつぎようになる。

$$\frac{y}{r} = \mathbf{c}\{\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{c})^{-1} \mathbf{L}\mathbf{c}\}^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (30)$$

この閉ループ系伝達関数を、式(28)の閉ループ系伝達関数に近づけるには

$$(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{c})^{-1} \mathbf{L}\mathbf{c} \rightarrow 1 \quad (31)$$

とすればよいことがわかる。理解を助けるために、式(31)がスカラであると考え、つぎのように書ける。

$$\frac{\mathbf{L}\mathbf{c}}{\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{c}} \rightarrow 1 \quad (32)$$

$\mathbf{L}$ を限りなく大きくすれば、式(31)は1に漸近することがわかる。

式(25)のRiccati方程式に、重み係数をつぎのようにつづける。

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T - \mathbf{Y}\mathbf{c}^T \mathbf{c}\mathbf{Y} + w_o \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = 0 \quad (33)$$

w_o を大きく与えることにより、 $\mathbf{Y}$ を大きくすることができる。オブザーバゲイン $\mathbf{L}$ は式(24)であるから、 $\mathbf{Y}$ を大きくすることはオブザーバゲインを大きくすることである。 w_o をオブザーバの重み係数とよぶ。 w_o を変化させたときの応答の変化をFig.10に示す。

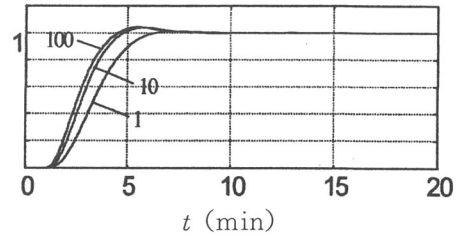


Fig.10 w_o による応答の変化

オブザーバの重み係数 w_o を大きくするにしたがって、すべての状態が測定できる場合の応答に近づいていく。 $w_o = 100$ とした場合、その応答はすべての状態が測定できる場合の応答とほとんど差異はない。オブザーバの重みをそれ以上に大きくすることが無意味である。

7.5 最適オブザーバの極配置

制御系を伝達関数で表現したときに、分母を0とする解を極、分子を0とする解を零点とよぶ。

オブザーバを使用した閉ループ系の極は、式(23)の解である。一般に、 n 次のオブザーバを構成すると、一般に $n-1$ 個の零点が生じることが知られている。最適オブザーバを使用したときの極と零点の配置をFig.11に示す。

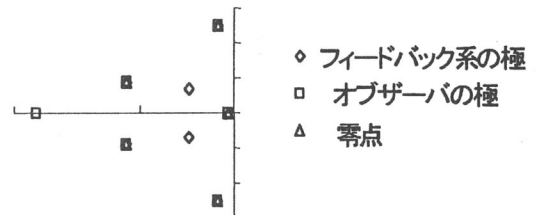


Fig.11 極と零点

極とゼロ点は、お互いに相殺される。Fig.11において、極と零点が重なっているところは相殺され、Fig.12のようになる。

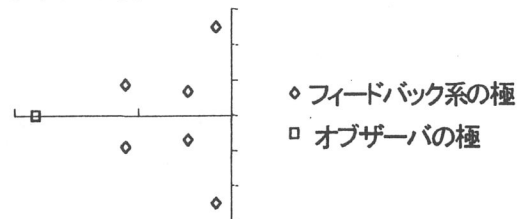


Fig.12 極配置

オブザーバの極は、このように一つを残して相殺される。また、オブザーバの極と零点が、うまく極零相殺するようにオブザーバゲインを決めたものが、最適オブザーバであるといえる。

制御系の極を $p_{c1}, p_{c2}, p_{c3}, p_{c4}, p_{c5}, p_{c6}$,

オブザーバの極を $p_{o1}, p_{o2}, p_{o3}, p_{o4}, p_{o5}, p_{o6}$,

構成系の零点を z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 ,

とすると、オブザーバを含んだ伝達関数は、つぎのよ

うに考えることができる。

$$\frac{y}{r} = \frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)(s-z_4)(s-z_5)}{(s-p_{c1})(s-p_{c2})(s-p_{c3})(s-p_{c4})(s-p_{c5})(s-p_{c6}) \cdot (s-p_{o1})(s-p_{o2})(s-p_{o3})(s-p_{o4})(s-p_{o5})(s-p_{o6})} \quad (34)$$

最適オブザーバを使用した場合には

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= p_{o1} \\ z_2 &= p_{o2} \\ &\vdots \\ z_5 &= p_{o5} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

となり、式(34)の伝達関数は、つぎのようになる^{注)}。

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{(s-p_{c1})(s-p_{c2})(s-p_{c3})(s-p_{c4})(s-p_{c5})(s-p_{c6})(s-p_{o6})} \quad (36)$$

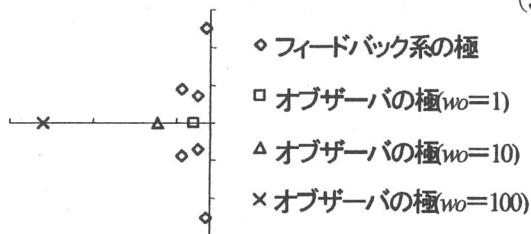


Fig.13 極配置の変化

オブザーバの重みを変化させたときの極配置の変化をFig.13に示す。このように、オブザーバの重みを大きくしていくと、オブザーバの極が原点から離れていく。 $w_o=100$ のときの極配置では、オブザーバの極の影響は消失するといえる。

7.6 最適オブザーバの極配置と伝達関数

最適オブザーバ($w_o=10$)を使用したときの閉ループ系伝達関数はつぎのようになる。

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{1+2.73s+3.70s^2+2.82s^3+1.38s^4+0.48s^5+0.11s^6+0.01s^7} \quad (37)$$

閉ループ系伝達関数はこのような7次系となる。

6個あるオブザーバの極(Fig.14)において、オブザーバの重み係数を変化させると極(1)が移動することをすでにのべた。本研究では、極(2)を最適なものから故意に移動させ、閉ループ系の特性がどのように変化するかを検討した。

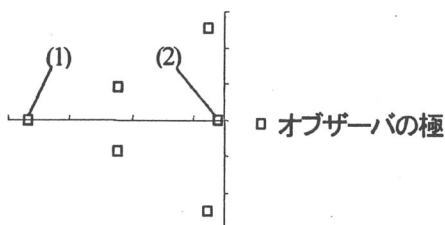


Fig.14 最適オブザーバの極配置

注) 最適オブザーバを設計する際に極零相殺がおこる事実を数理的に追求したが、筆者らの能力を超えていた。

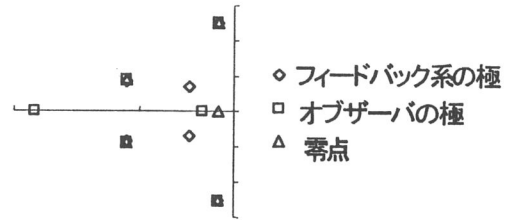


Fig.15 左側に移動

極と零点が重なっているところは相殺され、Fig.16のようになる。最適オブザーバの極配置では相殺された極(2)が相殺されずに残っている。

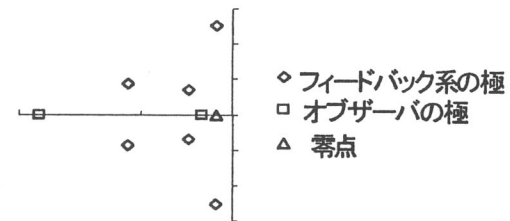


Fig.16 極と零点

極(2)を移動した場合の伝達関数は、つぎのようになる。

$$\frac{y}{r} = \frac{3.92s+1}{1+4.74s+9.03s^2+10.22s^3+7.02s^4+3.24s^5+1.07s^6+0.24s^7+0.03s^8} \quad (38)$$

目標値追従特性をFig.17に示す。最適オブザーバを使用した場合に比べ、応答が悪化している。相殺されずに残った極と零点の影響を示している。

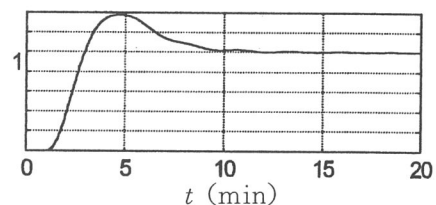


Fig.17 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

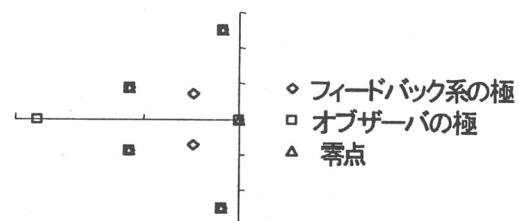


Fig.16 原点に移動

極(2)を原点に移動(Fig.16)した場合、原点上において極と零点が相殺され、極配置は最適オブザーバを使用した閉ループ系の極配置(Fig.12)と同じになる。しかしながら、伝達関数はつぎのようになる。

$$\frac{y}{r} = \frac{0.76}{1+2.73s+3.70s^2+2.82s^3+1.38s^4+0.48s^5+0.11s^6+0.01s^7} \quad (39)$$

これより、出力 y は目標値に到達しないことがわかる。伝達関数の分母をみると、最適オブザーバを使用したときの伝達関数、式(37)と同じであることが興味深い。目標値追従特性をFig.18に示す。

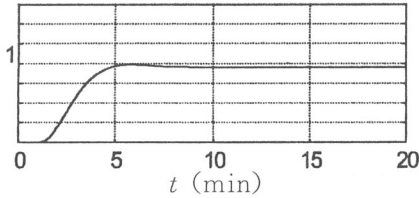


Fig.18 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

Fig.18より、出力は目標値に到達していない。また、極(2)を(-0.01, 0.0)などして、原点から僅かに離れた場合、極零相殺は起こらず、出力は緩やかに目標値に到達する(Fig.19)。

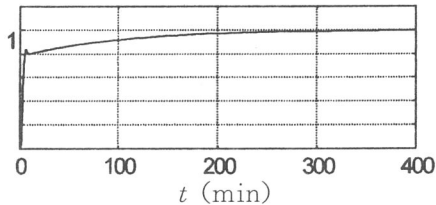


Fig.19 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

7.7 オブザーバの初期値

これまでの、制御系の真の初期値とオブザーバの初期値は同じであるとして扱ってきたが、実際にはちがっている。ここでは、とくに

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

であるとして検討した。最適オブザーバを使用し、フィードバックの重み $w=0.01$ 、オブザーバの重み $w_o=100$ としたときの目標値追従特性をFig.20に示す。

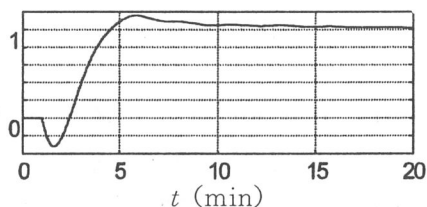


Fig.20 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

Fig.20より、応答特性は悪化する。真の状態 $\mathbf{x}_5$ とその推定値 $\hat{\mathbf{x}}_5$ の時間的变化を示す。ここでの真の状

態とは、式(7)の一般化制御対象の $\mathbf{x}_5$ であることに注意しよう。Fig.21より、状態の推定値 $\hat{\mathbf{x}}_5$ が、真の状態 $\mathbf{x}_5$ に近づいていく様子がわかる。

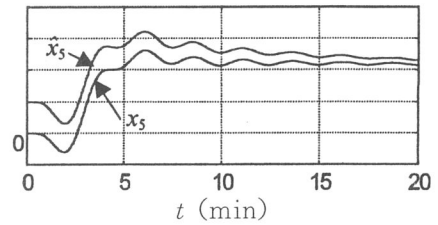


Fig.21 状態の追従

また本研究では、1次おくれ+むだ時間系のプラントを5次の有理関数によって近似することにより状態量の推定を行なっている。両者のステップ応答を比較すると、Fig.22に示すようにほとんど差異がみられない。

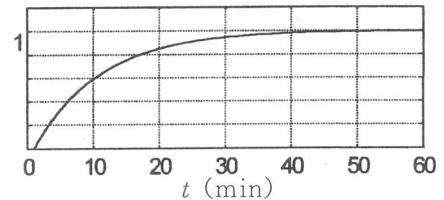


Fig.22 真のプラントと近似プラント

このような事実から、Fig.7の状態推定システムを単純化した、Fig.23に示すような状態推定システムを考えた。Fig.23のシステムは、オブザーバの最も原始的な姿といえるだろう。

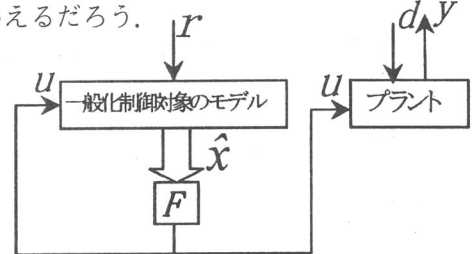


Fig.23 状態推定システム

このようなシステムを考えた場合の制御則は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_1 r + \mathbf{B}_2 u \\ y &= G(s) \cdot (u + d) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

となる。ここで各ベクトルは式(8)、プラントの伝達関数 $G(s)$ は式(2)に示してある。目標値追従特性をFig.24に示す。ここでは初期値のちがいについては考慮していない。

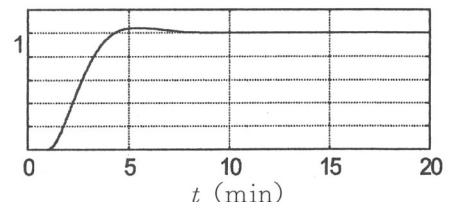


Fig.24 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

このように、純粋な状態フィードバックに近い応答を得ることができる。また、初期値のちがいを考慮にいい、初期値を式(40)とした場合の目標値追従特性をFig.25に示す。

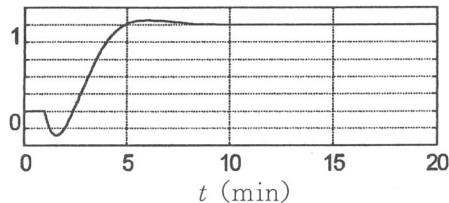


Fig.25 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

Fig.7に示したオブザーバを使用した場合に比べて、目標値に到達するまでの時間が短い。真の状態 x_5 とその推定値 $\hat{x}_5$ の時間的変化をFig.26に示す。Fig.25とFig.26を見る限り、真の状態 x_5 とその推定値 $\hat{x}_5$ は完全に一致する必要はないといえる。

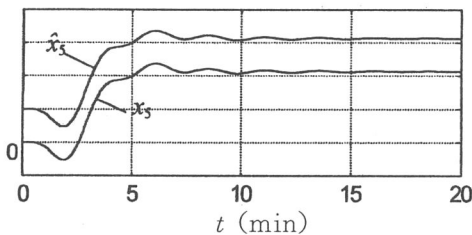


Fig.26 状態量と推定値

このようなことから考えると、目標値 r があらかじめわかっており、制御対象のプラントに外乱 d がはいらなければ、Fig.23に示した方法のほうがFig.7のオブザーバよりもよい応答を得ることができるといえる。しかしながら、プラントに外乱がはいる場合や目標値が既知でない場合には、Fig.7に示すオブザーバを用いなければならない。また、プラントのモデルが正確に近似されていない場合などには、オブザーバが有効であろう。

8. I-PD制御とLQI制御の比較

つぎの5つの制御方式を比較した。

- (1) LQI制御(オブザーバなし, $w=0.01$)
- (2) LQI制御(オブザーバあり, $w=0.01, w_o=100$)
- (3) I-PD制御(限界感度法)
- (4) I-PD制御(部分的モデルマッチング法)
- (5) I-PD制御(最適化手法, $w=0.01$)

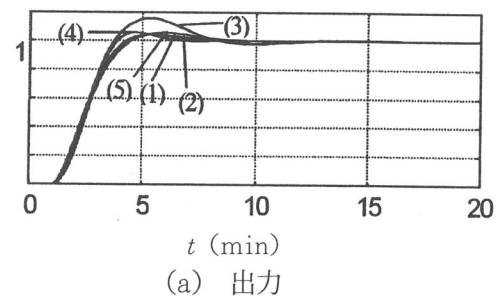
ただし、(2)は最適オブザーバを使用し、(5)は(3)のPIDゲインを初期値として、式(17)を最小にするPIDゲインを求めている。また、LQI制御では、式(15)、式(20)を用いて求めた操作量 u を式(2)に印加している。

8.1 フィードバックゲインと応答特性

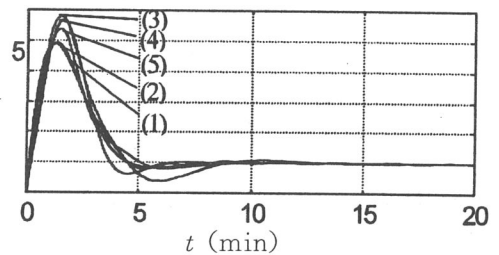
制御方式(3)、(4)と立ち上がり時間がほぼ等しくなるように制御方式(1)、(2)、(5)の重み w を定めた。そのときのフィードバックゲインと応答特性をつぎに示す。

Table 4 フィードバックゲイン

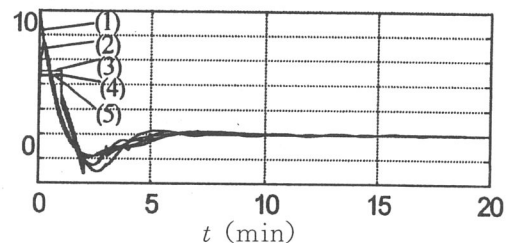
方法	k_i	k_p	k_d	k_2	k_3	k_4
(1)	10.0	23.2	18.3	8.40	2.66	0.57
(2)	10.0	23.2	18.3	8.40	2.66	0.57
(3)	5.06	9.77	4.72			
(4)	4.66	10.5	3.23			
(5)	4.72	10.7	4.66			



(a) 出力



(b) 操作量



(c) 操作量の微分値

Fig.27 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

Fig.27(a)によると、オーバーシュートの大きい方法(3)を除いて、似たような応答を示している。Fig.27(b)の操作量をみると、LQI制御の操作量が小さいことがわかる。また、Fig.27(c)の操作量の微分値が、LQI制御とI-PD制御で大きく異なっていることが興味深い。

Table 3によると、LQI制御とI-PD制御ではフィードバックゲインが大きく異なっている。しかしながら、各フィードバックゲインを、積分ゲインとの比として表わした場合、Table 5 のようになる。

Table 5 積分ゲイン基準

方法	k_i	k_p	k_d	k_2	k_3	k_4
(1)	1	2.32	1.83	0.84	0.27	0.06
(2)	1	2.32	1.83	0.84	0.27	0.06
(3)	1	1.93	0.93			
(4)	1	2.25	0.69			
(5)	1	2.27	0.99			

8.2 評価関数による比較

5つの制御方式を、式(17)に加えて、つぎの3種類の評価関数を用いて比較した。

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \int_0^{20} (r-y)^2 dt \\ J_2 &= \int_0^{20} (u-u_0)^2 dt \\ J_3 &= \int_0^{20} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式(42)における u_0 とは、目標値に対する操作量である。計算結果をTable 6に示す。

Table 6 評価関数

方法	J	J_1	J_2	J_3
(1)	2.42	2.06	26.4	35.6
(2)	2.46	2.15	25.8	31.3
(3)	2.55	2.18	36.4	36.5
(4)	2.54	2.18	32.5	35.7
(5)	2.51	2.20	28.1	31.4

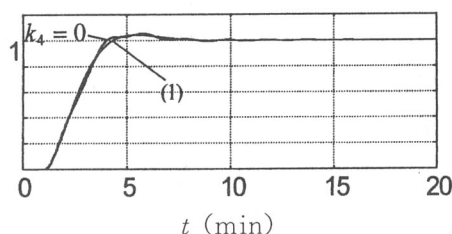
評価関数 J は方法(1)が最も小さいが、制御方式によって大きな違いはみられない。

8.3 LQ I 制御ゲインの I-PD 制御への利用

評価関数の結果をみると、LQ I 制御(1)が最も制御成績がよいので、このフィードバックゲインから高次の項を省略することによりPIDゲインを決定できないかを検討した。高次のゲインから順に0を代入したところ、 $k_3=0$ とした段階で不安定となってしまった。評価関数をTable 7に、目標値追従特性をFig.28に示す。

Table 7 評価関数 J

方法	J	J_1	J_2	J_3
(1)	2.42	2.06	26.4	35.6
$k_4=0$	2.61	2.07	27.4	54.1

Fig.28 目標値追従特性 ($r=1, d=0$)

また、ベクトル軌跡^(注)をもちいて安定判別をおこなった。結果をFig.29に示す。

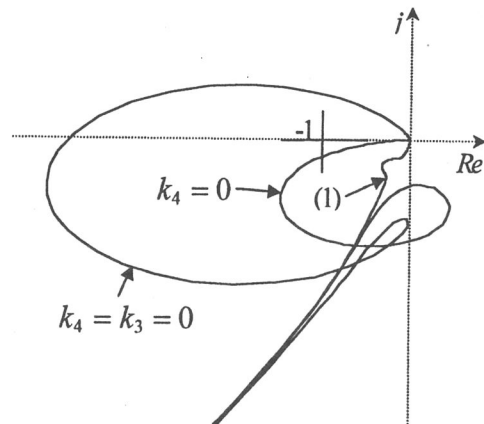


Fig.29 ベクトル軌跡

このように、LQ I 制御の高次のゲインは、安定性に大きな影響を与えていることがわかる。またTable 7をみると、高次ゲインを省略することによって評価関数が増加している。

9. おわりに

異なる背景をもつI-PD制御とLQ I制御は、目標値追従特性と評価関数の観点からみれば確かに類似しており、概してLQ I制御のほうがI-PD制御よりも制御成績がよい。しかし、LQ I制御では高次のフィードバックゲインが安定性に大きく影響しており、高次項を考えないとするI-PD制御の考え方とは逆行するものである。数学モデルを厳密に求めることができないプロセス制御系において、なかなかLQ I制御に市民権が与えられないのは、このような点に原因があるのかも知れない。

数学モデルを正確に与えることができるならば、LQ I制御が有効であろう。しかし、I-PD制御を用いたとしても目標値追従特性に大差はない。また、I-PD制御の場合にはシステム内部の状態を計測することができなくても制御することが可能であり、このようなところが古典制御理論であるI-PD制御の利点である。

このような事実から、1次おくれ+むだ時間系のようなプロセス制御系におけるI-PD制御の有用性が明らかとなった。

参考文献

- 1) 野波ほか：MATLABによる制御系設計，電機大出版局
- 2) 早勢：H₂制御入門，オーム社
- 3) 浜田ほか：現代制御理論入門，コロナ社
- 4) 黒須ほか：プロセス制御系設計用CADソフト(その14)，小山工業高等専門学校研究紀要，第31号 別刷(1999)
- 5) 原：PID形制御系とI-PD形制御系の特性比較と設計指針，計測自動制御学会論文集，20-8，691/697(1984)

「受理年月日 1999年7月30日」

注) LQ IまたはI-PD制御の一巡伝達関数⁵⁾を求めるさいには、注意が必要である。