

# プロセス制御系設計用CADソフト(その18) —多変数系における部分的モデルマッチング法の適用—

渡利 久規, 黒須 茂, 長浜 照夫\*)

## CAD Software for Designing Process Control System —Application of Partial Mode-Matching Method to Multivariable Systems—

Hisaki WATARI, Shigeru KUROSU, Teruo NAGAHAMA\*)

### 1. はじめに

本研究は, 温度と湿度を制御量とする多変数空調制御系に対し, 部分的モデルマッチング法を適用して, PIDコントローラを設計し, 非干渉化の可能性を検討する.

### 2. 制御条件

制御系としては, PID制御系(Fig.1), I-PD制御系(Fig.2)を考え, 冷房モードで運転している.

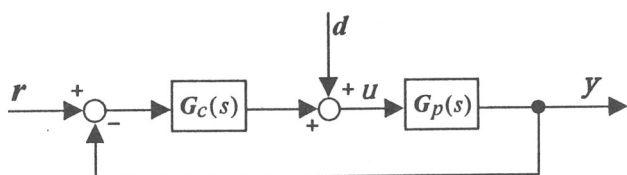


Fig.1 PID制御系

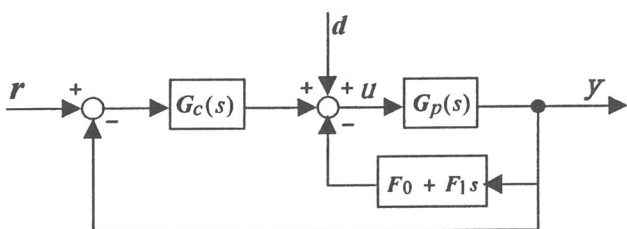


Fig.2 I-PD制御系

### 3. 部分的モデルマッチング法

部分的モデルマッチング法とは, 制御系の目標値から制御量までの閉ループ系の伝達関数を, 望ましい応答特性をもつ参照モデルに部分的に一致させることによりPIDゲインを求める方法である.

多変数系における参照モデルは, 目標値および制御量のベクトルを  $R(s)$  および  $Y(s)$  とすると,

2入力2出力の場合, つぎのような形式で書ける.

$$M(s)Y(s) = R(s) \quad (1)$$

ここに,

$$M(s) = \alpha_0 I + \alpha_1 \Sigma s + \alpha_2 \Sigma^2 s^2 + \alpha_3 \Sigma^3 s^3 + \dots,$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

であり. ここで応答形状係数  $\{\alpha_i\}$  は, つぎのように与える.

オーバーシュート10%の参照モデル:

$$\{\alpha_i\} = \{1, 1, 0.5, 0.15, 0.03 \dots\}$$

オーバーシュート0%の参照モデル:

$$\{\alpha_i\} = \{1, 1, 0.375, 0.00625, 0.003906 \dots\}$$

#### 3.1 PID系方式

PID制御系におけるコントローラの伝達関数はつぎのように与えられる.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{s}$$

ここに,  $c_0 = K_i$ ,  $c_1 = K_p$ ,  $c_2 = K_d$  あり,  $c_1$ : 比例ゲイン  $c_0$ : 積分ゲイン  $c_2$ : 微分ゲインとよぶ.

Fig.1より目標値に対する伝達関数を求め, 参照モデル(式(1))と等置し, コントローラについて解くと, つぎのように求まる.

$$c_0 = H_0 \Sigma^{-1} \quad (2)$$

$$c_1 = H_0 \Sigma^{-1} - \alpha_2 H_0 \quad (3)$$

$$c_2 = H_2 \Sigma^{-1} - \alpha_2 H_1 + (\alpha_2^2 - \alpha_3) H_0 \Sigma$$

$$c_3 = H_3 - \alpha_2 H_2 \Sigma + (\alpha_2^2 - \alpha_3) H_1 \Sigma^2 - (\alpha_2^3 - 2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_4) H_0 \Sigma^3 \quad (4)$$

\*) 平成10年度 機械工学科卒業 (現 長岡技科大)

ここで、 $H_i$  はプラントの伝達関数を分母系列表現した係数行列である。

$$G(s) = B(s)/a(s)$$

$$H(s) = a(s)B(s)^{-1}$$

$$= H_0 + H_1s + H_2s^2 + H_3s^3 + \dots$$

PID制御では  $c_0, c_1, c_2$  より、PI制御では  $c_0, c_1$  より各ゲインを算出する。また  $\Sigma$  は、PID制御では  $c_3$  を、PI制御では  $c_2$  を0として求める。

### 3.2 I-PD系方式

I-PD制御におけるコントローラはつぎのように与えられる。

主コントローラ：

$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

フィードバック補償器：

$$F(s) = F_0 + F_1s$$

ここに、 $K$  : 積分ゲイン  $F_0$  : 比例ゲイン  $F_1$  : 微分ゲインである。

Fig. 2 より、目標値から制御量への伝達関数を参照モデルと等置すると、ゲインはつぎのように求まる。

I-PD制御系

$$\Sigma = \alpha_3 \alpha_4^{-1} H_2^{-1} H_3 \quad (5)$$

$$K = \alpha_3^{-1} H_2 [\Sigma^3]^{-1} \quad (6)$$

$$F_0 = K\Sigma - H_0 \quad (7)$$

$$F_1 = \alpha_2 K \Sigma^2 - H_1 \quad (8)$$

I-P制御系

$$\Sigma = \alpha_2 \alpha_3^{-1} H_1^{-1} H_2 \quad (9)$$

$$K = \alpha_2^{-1} H_1 [\Sigma^2]^{-1} \quad (10)$$

$$F_0 = K\Sigma - H_0 \quad (11)$$

## 4. プラント

プラントは、つぎのような伝達関数で書ける。<sup>1)</sup>

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

出力：  $y_1$  温度(°C)       $y_2$  湿度(%)  
入力：  $u_1$  冷水バルブ(%)     $u_2$  加湿器(%)

ここで、

$$G_{11}(s) = \frac{0.02e^{-3.6s}}{1+3.5s}$$

$$G_{12}(s) = \frac{2.3 \times 10^{-3}(1+70s)e^{-0.5s}}{1+12.5s+39s^2}$$

$$G_{21}(s) = \frac{0.23e^{-0.6s}}{1+12s}$$

$$G_{22}(s) = \frac{1.23e^{-1.3s}}{1+12s}$$

である。この空調システムは冷房モードで運転され、 $G_{11}(s)$ 、 $G_{21}(s)$  には負の符号がつくが、フィードバック系としては、正負に関係ないので、正の符号で統一している。

今与えられた伝達関数マトリクスより、形式的に

$$G(s) = B(s)/a(s)$$

ここに

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0.02 & 2.3 \times 10^{-3} \\ 0.23 & 1.23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.51 & 0.22 \\ 3.85 & 20.6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3.56 & 4.95 \\ 15.0 & 80.3 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 5.47 & 37.9 \\ 25.98 & 138.9 \end{bmatrix} s^3$$

$$a(s) = (1+3.5s)(1+12.5s+39s^2)(1+12s)$$

と書ける。分母系列表現にすると

$$G(s) = B(s)/a(s)$$

$$H(s) = a(s)B(s)^{-1}$$

$$= H_0 + H_1s + H_2s^2 + H_3s^3 + \dots$$

ここに

$$H_0 = \begin{bmatrix} 51.03 & -0.09 \\ -9.54 & 0.82 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 436.17 & -7.52 \\ -88.24 & 12.23 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1230.05 & -58.53 \\ -289.47 & 25.29 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 3653.91 & 22.65 \\ -865.05 & 12.31 \end{bmatrix}$$

である。あとは3.1, 3.2で述べた方法により自動的にPIDゲインは求められる。

## 5. シミュレーション実験

以上よりゲインを算出した結果をTable 1～4に示す。ここでPID制御系においては、 $\Sigma$ が複素解+実根となってしまったため、1入力1出力の時に提案した複素解の実数の値を用いる方法(付録1)を使い、ゲインを算出した。

干渉成分の影響を検討するため、つぎのように定常状態から目標値を変動させ、シミュレーションを行った。その結果をFig.3～10に示す。

| Time(min) | $y_1$ (°C) | $y_2$ (%) |
|-----------|------------|-----------|
| 0         | -1         | -10       |
| 70        | -2         | -10       |
| 140       | -2         | -20       |

### 5.1 PI制御・I-P制御

PI, I-P制御とも安定した応答を得ることができたが、温度( $y_1$ )、湿度( $y_2$ )との間に干渉があることがわかる。

オーバーシュートのちがいを比較すると、オーバーシュート0%の参照モデルを用いた方が、目標値に到達する時間は長い、干渉の影響が少ない

のがわかる。

### 5.2 PID制御

PID制御においては安定した応答を得られたが、やはり干渉の影響は出ている。また、 $\Sigma$ の値を複素解の実数を用いたため、オーバーシュート10%の参照モデルを用いても、出力 $y_2$ にオーバーシュートがない。逆に、オーバーシュート0%の参照モデルを用いた場合においては、出力 $y_1$ に、多少オーバーシュートが出てしまった。

PI制御と比べると、オーバーシュート10%における出力 $y_2$ においては、干渉の影響が少ない。しかし、全体を通してあまりよい応答は期待できない。

### 5.3 I-PD制御

I-PD制御においては、オーバーシュート10%の参照モデルを用いた場合、時間が経つにつれて振動が大きくなり、発散してしまった。また、オーバーシュート0%の参照モデルにおいては、初めから発散してしまった。

不安定の原因を考えると、微分ゲインが負の値となり、ポジティブフィードバックとなってしまう

| 制御方法  | $\Sigma$ |      | $K_p$ |       | $K_i$ |       | $K_d$  |        |
|-------|----------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| P I   | 6.68     | 0.0  | 39.73 | -1.76 | 7.64  | -0.02 |        |        |
|       | 0.0      | 4.39 | -8.73 | 2.37  | -1.43 | 0.19  |        |        |
| P I D | 7.40     | 0.0  | 33.42 | -2.18 | 6.90  | -0.03 | -14.09 | -13.64 |
|       | 0.0      | 3.37 | -7.15 | 3.21  | -1.29 | 0.24  | -2.06  | 1.66   |

Table-1 PID制御系 オーバーシュート10%

| 制御方法  | $\Sigma$ |      | $K_p$ |       | $K_i$ |       | $K_d$  |        |
|-------|----------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| P I   | 9.92     | 0.0  | 24.83 | -1.21 | 5.14  | -0.02 |        |        |
|       | 0.0      | 6.02 | -5.32 | 1.72  | -0.96 | 0.14  |        |        |
| P I D | 7.31     | 0.0  | 40.50 | -2.26 | 6.98  | -0.03 | 33.76  | -15.03 |
|       | 0.0      | 3.28 | -8.49 | 3.41  | -1.30 | 0.25  | -11.93 | 3.33   |

Table-2 PID制御系 オーバーシュート0%

| 制御方法    | $\Sigma$ |      | $K$   |       | $F_0$  |       | $F_1$  |        |
|---------|----------|------|-------|-------|--------|-------|--------|--------|
| I - P   | 9.18     | 0.0  | 10.38 | -0.86 | 44.29  | -3.51 |        |        |
|         | 0.0      | 4.18 | -2.10 | 1.40  | -9.74  | 5.03  |        |        |
| I - P D | 14.75    | 0.0  | 2.56  | -0.87 | -13.32 | -6.55 | -158.1 | -17.95 |
|         | 0.0      | 7.66 | -0.60 | 0.37  | 0.67   | 2.04  | 22.81  | -1.23  |

Table-3 I-PD制御系 オーバーシュート10%

| 制御方法    | $\Sigma$ |       | $K$   |       | $F_0$  |       | $F_1$  |       |
|---------|----------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|
| I - P   | 16.53    | 0.0   | 4.23  | -0.36 | 19.33  | -2.27 |        |       |
|         | 0.0      | 7.52  | -0.86 | 0.58  | -4.69  | 3.51  |        |       |
| I - P D | 47.26    | 0.0   | 0.19  | -0.06 | -42.23 | -1.46 | -280.0 | -6.78 |
|         | 0.0      | 24.56 | -0.04 | 0.03  | 7.47   | -0.16 | 51.50  | -6.06 |

Table-4 I-PD制御系 オーバーシュート0%

い、しかもその数値が他のゲインに比べ、大きなことが原因として考えられる。そこでTable-3, 4において、 $F_1$ の主対角要素を0、また1行1列目、2行2列目の値をそれぞれ0にし、シミュレーションを行ったところFig.11~16のようになった。この結果、 $F_1$ の主対角要素に負が現れ、特に1行1列目の値が大きいことが不安定の原因であることが判明した。またそれは、微分ゲインの算出式、式(8)における $K$ の値が小さく、今回のプラントにおいて、 $H_1$ の値が大きかったため、 $F_1$ が負となり、大きな値となった。

つぎに $K$ の値を小さくさせている原因について調べたところ、式(6)における、 $\Sigma$ の逆行列のためであり、その値は、 $\Sigma$ の数値が大きいほど小さくなってしまいうので、式(6)においては、 $\Sigma$ の3乗であるので、 $\Sigma$ はかなり小さな値でなくてはならないことになる。

さらに、 $\Sigma$ を大きくさせている原因を調べたところ、 $s$ の3次の係数である $H_3$ の項が大きいことが判明した。

そこで、北森が多変数系における部分的モデルマッチング法を提案した際に用いたプラント<sup>2)</sup>と、本研究で適用したプラントの伝達関数行列

$$G(s) = B(s)/a(s)$$

を比較してみよう。

本研究のプラントモデル：

$$\frac{\begin{bmatrix} 0.02 & 2.3 \times 10^{-3} \\ 0.23 & 1.23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.51 & 0.22 \\ 3.85 & 20.6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3.56 & 4.95 \\ 15.0 & 80.3 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 5.47 & 37.9 \\ 25.98 & 138.9 \end{bmatrix} s^3}{1 + 28.28s + 266s^2 + 896s^3}$$

北森のプラントモデル：

$$\frac{\begin{bmatrix} 37.95 & 14.98 \\ 29.95 & 22.98 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 85.44 & 14.24 \\ 28.48 & 33.76 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 49.60 & 2.80 \\ 5.60 & 11.2 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 8.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} s^3}{52.93 + 298.91s + 484.48s^2 + 336.71s^3}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0.72 & 2.8 \\ 0.57 & 0.43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.61 & 0.27 \\ 0.54 & 0.64 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0.94 & 0.05 \\ 0.11 & 0.21 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} s^3}{1 + 5.65s + 9.15s^2 + 6.36s^3}$$

北森のプラントの3次の分子の係数は、他の係数に比べ小さく、通常、少なくとも本研究で適用したプラントでは、このような小さな3次の係数になることはありえない。よってこれらより、本研究のような係数を持つ多変数系プラントに対し、部分的モデルマッチング法を適用する際、3次の係数が制御に大きく関係してしまい、I-PD制御を行うことは難しい。

付録(2)に参照モデルを修正してPIDゲインを求める方法を紹介しているが、Fig.9とFig.10を見るとI-PD制御では、オーバーシュート10%( $\alpha=1$ )と0%( $\alpha=0$ )の参照モデルとも不安定である。したがって $\alpha$ を0と1の間で変えても不安定性は変わらない。つまり、本研究でのプラントモデルに対してはI-P制御しか適用できないことがわかった。したがって、別の方法によってこの問題は解決しなければならない。

## 6. おわりに

本研究では、温度と湿度を制御量とする空調制御系に対して、部分的モデルマッチング法を適用した結果、つぎのことがわかった。

1)部分的モデルマッチング法により、完全な非干渉制御を行なうことは不可能である。しかし、オーバーシュート0%の参照モデルを用いた場合におけるI-P制御では、非干渉化に近い応答を得ることができる。

2)PID制御においては、 $\Sigma$ を複素解の実数を用いることにより、安定した応答を得ることができるが、PI制御に比べ、あまりよい応答は期待できない。

3)I-PD制御においては、参照モデルによらず発散してしまった。これは、 $H_3$ の係数が高いことが原因であることが判明した。よって、今回のように、 $H_3$ の係数が他の係数に比べ、大きな数値を持つプラントにおいては、I-PD制御を行うことは、難しいといえる。

## 参考文献

- 1)A. Kimbara et al: A Modeling of an Eivronmental Chamber, ASHRAE Transactions, vol 101-Part 1, 262/273 (1995)
- 2)北森俊行：制御対象の部分的知識に基づくPID方式非干渉制御系 計測自動制御学会論文集, 16-1, 139/140 (1987)

## プロセス制御系設計用CADソフト(その18)ー多変数系における部分的モデルマッチング法の適用ー

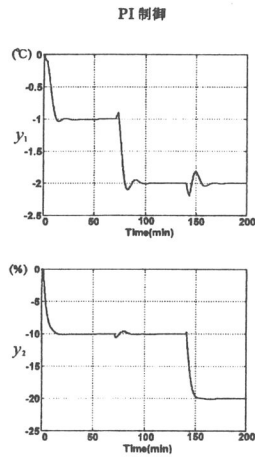


Fig.3 オーバーシュート 10%

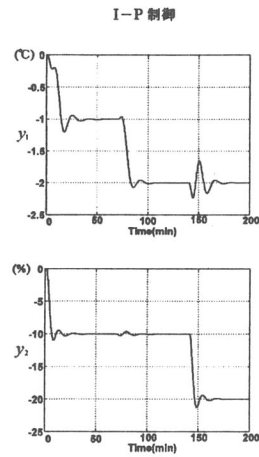


Fig.5 オーバーシュート 10%

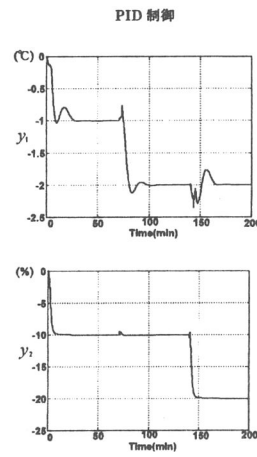


Fig.7 オーバーシュート 10%

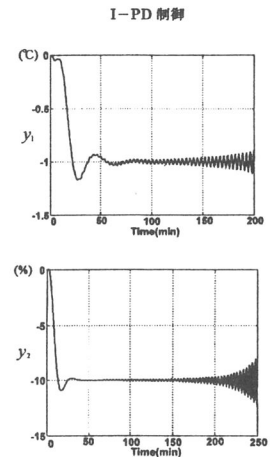


Fig.9 オーバーシュート 10%

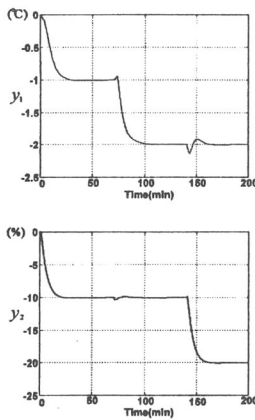


Fig.4 オーバーシュート 0%

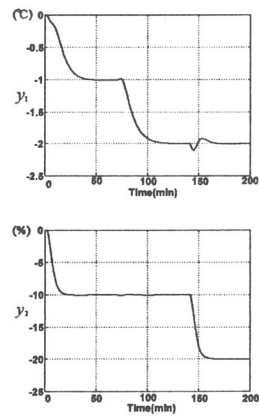


Fig.6 オーバーシュート 0%

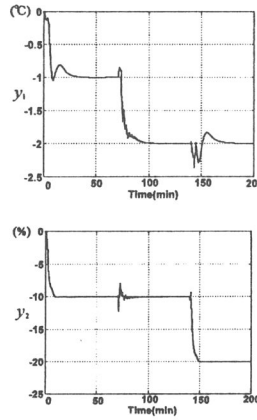


Fig.8 オーバーシュート 0%

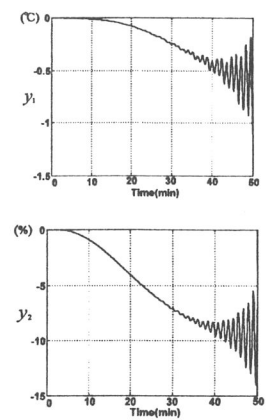


Fig.10 オーバーシュート 0%

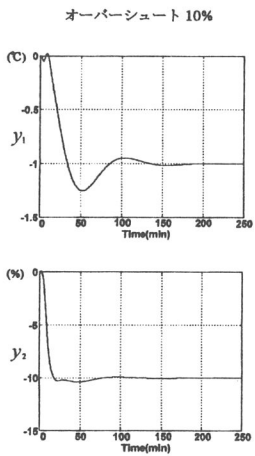


Fig.11 主対角要素 0

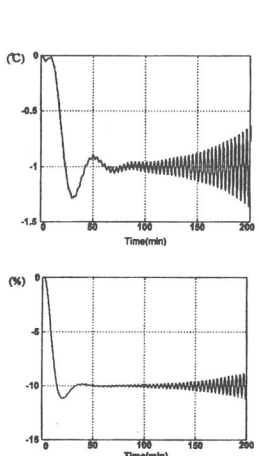


Fig.13 2行2列目 0

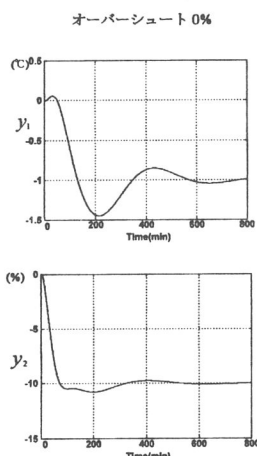


Fig.14 主対角要素 0

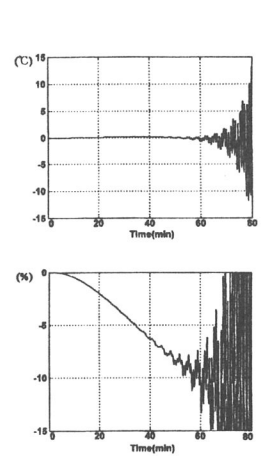


Fig.16 2行2列目 0

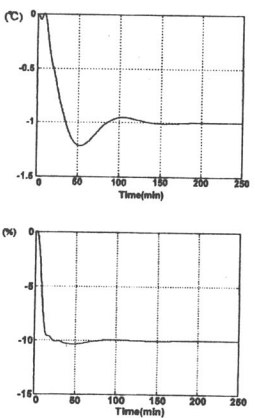


Fig.12 1行1列目 0

$$\text{Fig.11 : } F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -17.95 \\ 2281 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Fig.12 : } F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -17.95 \\ 2281 & -123 \end{bmatrix}$$

$$\text{Fig.13 : } F_1 = \begin{bmatrix} -158.1 & -17.95 \\ 2281 & 0 \end{bmatrix}$$

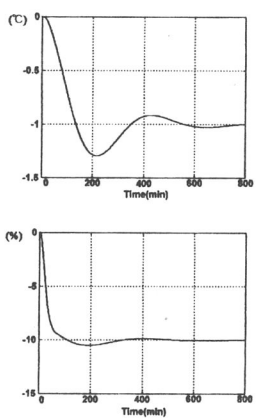


Fig.15 1行1列目 0

$$\text{Fig.14 : } F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -6.78 \\ 515 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Fig.15 : } F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -6.78 \\ 515 & -6.06 \end{bmatrix}$$

$$\text{Fig.16 : } F_1 = \begin{bmatrix} -280.0 & -6.78 \\ 515 & 0 \end{bmatrix}$$

## 附録(1) PID方式におけるオーバーシュート0%の 参照モデルに対するPIDゲイン(目標値追従特性)

部分的モデルマッチング法においてオーバーシュート0%の参照モデルを用いたとき、目標値追従特性に対するPIDゲインの比例ゲイン  $k_p$  が負になるという問題がある。ここではその原因が  $\sigma$  が著しく大きくなるためであることをつきとめ、その解決策のひとつを紹介する。

部分的モデルマッチング法により目標値追従特性に対するPIDゲインを求めると、つぎようになる。

$$\text{比例ゲイン: } k_p = \frac{T+L-\alpha_2\sigma}{K\sigma} \quad (1)$$

$$\text{積分ゲイン: } k_i = \frac{1}{K\sigma} \quad (2)$$

微分ゲイン:

$$k_d = \frac{\left(T + \frac{1}{2}L\right)L - a_2(T+L)\sigma + (a_2^2 - a_3)\sigma^2}{K\sigma} \quad (3)$$

上式における応答形状係数は、つぎのように与える。

オーバーシュート10%の参照モデル:

$$\{\alpha_i\} = \{1, 1, 0.5, 0.15, 0.03, \dots\}$$

オーバーシュート0%の参照モデル:

$$\{\alpha_i\} = \{1, 1, 0.375, 0.0625, \dots\}$$

プラントの時定数  $T = 10$  (min), むだ時間  $L = 1$  (min) に対してオーバーシュート0%の参照モデルに対してPIDゲインを求めると、つぎようになる。

$$k_p = -0.246$$

$$k_i = 0.012$$

$$k_d = 2.670$$

このように  $k_p$  が負の値となってしまう、ゲインを算出できない。これは時定数  $T$ , むだ時間  $L$  によらずオーバーシュート0%の場合には、すべてこのように  $k_p$  が負の値になった。

$k_p < 0$  になる理由

$k_p$  が負となるのは、式(1)の分子が

$$T+L < \alpha_2\sigma \quad (4)$$

となるからであり、これより  $\sigma$  が原因ではないかと考えた。

目標値追従特性に対するPID制御の  $\sigma$  は、つぎのような3次方程式を解くことにより求められ、得られた解のうち最小のものを採用する。

$$c_3 = -\frac{(\alpha_2^3 - 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_4)}{K}s^3 + \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_3)(T+L)}{K}s^2 - \frac{a_2\left(T + \frac{1}{2}L\right)L}{K}s + \frac{\left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{6}L\right)L^2}{K} = 0 \quad (5)$$

ここで式(5)に、時定数  $T = 10$  (min), むだ時間  $L = 1$  (min) としてオーバーシュート10%・0%の各  $\alpha_i$  を代入すると、つぎようになる。

オーバーシュート10%:

$$c_3 = -0.005\sigma^3 + 1.100\sigma^2 - 5.250\sigma + 5.167 = 0 \quad (6)$$

オーバーシュート0%:

$$c_3 = -9.766 \times 10^{-3}\sigma^3 + 0.859\sigma^2 - 3.938\sigma + 5.167 = 0 \quad (7)$$

式(7)の  $c_3$  と  $\sigma$  の関係を示すとFig.1のようになる。また、原点付近を拡大するとFig.2のようになり、 $\sigma$  は複素解となっていることがわかる。よって実根は1つしか得られず、また大きな値 ( $\sigma = 83.3$ ) をとってしまい、立ち上がり時間の60%という前提から著しくはずれてしまう。また、式(4)の条件より、 $k_p$  は負になってしまうことは明らかである。

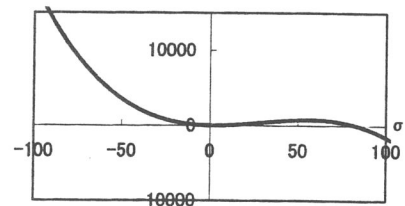


Fig.1

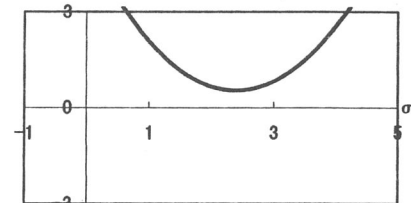


Fig.2

### 解決策

(1) この修正が適用される条件

オーバーシュート0%の参照モデルを用い、目標値追従特性に対するPIDゲインを求めるさいに、つぎのような事実が起こる。

$\sigma$  の算出式を、つぎのように表わす。

$$A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D = 0 \quad (8)$$

ここに

$$A = -\frac{(\alpha_2^3 - \alpha_2\alpha_3 + \alpha_4)}{K}$$

$$B = \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_3)(T+L)}{K}$$

$$C = -\frac{\alpha_2\left(T + \frac{1}{2}L\right)L}{K}$$

$$D = \frac{\left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{6}L\right)L^2}{K}$$

である。式(8)を1回微分し、 $\sigma$ について解く。

$$3A\sigma^2 + 2B\sigma + C = 0$$

$$\sigma = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} \quad (9)$$

式(9)より得られる小さな値を $\sigma'$ とすると、 $\sigma'$ を式(8)に代入すると、式(8)の値がゼロより大きくなってしまふ。そしてこのようなとき3次方程式の解は、複素解+実根となってしまう。

$$A\sigma^3 + B\sigma^2 + C\sigma + D > 0 \quad (10)$$

式(10)のような条件の場合、つぎのように複素解の実数の $\sigma$ を使い、PIDゲインを求める。

## (2) $\sigma$ の算出

複素解の実数は、式(9)より得られる小さな値であり、式(9)にもとの数値を入れると、つぎようになる。

$$\sigma \approx \frac{-(a_2^2 - a_3)(T+L) + \left\{ (a_2^2 - a_3)^2(T+L)^2 - 3a_2(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)\left(T + \frac{1}{2}L\right)L \right\}^{1/2}}{-3(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)} \quad (11)$$

式(11)の近似式を求めると、つぎようになる。

$$\begin{aligned} \sigma &\approx \frac{-(a_2^2 - a_3)(T+L) + \left\{ (a_2^2 - a_3)^2(T+L)^2 - 3a_2(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)\left(T + \frac{1}{2}L\right)L \right\}^{1/2}}{-3(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)} \\ &\approx \frac{-(a_2^2 - a_3)(T+L) + \left\{ (a_2^2 - a_3)^2(T+L)^2 \left[ 1 - \frac{3a_2(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)\left(T + \frac{1}{2}L\right)L}{(a_2^2 - a_3)^2(T+L)^2} \right] \right\}^{1/2}}{-3(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)} \\ &\approx \frac{-(a_2^2 - a_3)(T+L) + \left\{ (a_2^2 - a_3)^2(T+L)^2 \left[ 1 - \frac{3}{2} \times \frac{a_2(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)\left(T + \frac{1}{2}L\right)L}{(a_2^2 - a_3)^2(T+L)^2} \right] \right\}^{1/2}}{-3(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)} \end{aligned}$$

## 附録(2) I-PD方式におけるオーバーシュート0%の

### 参照モデルに対するPIDゲイン

I-PD方式において、部分的モデルマッチング法のオーバーシュート0%の参照モデルに対するPIDゲインを求めることができなかった。

ここでは、北森の汎用参照モデルの構成法<sup>1)</sup>を用いて、I-PD方式においてオーバーシュート0%に対するPIDゲインを求める方法をのべる。

Fig.1にI-P方式のブロック線図を示す。

$$\begin{aligned} &\approx \frac{(a_2^2 - a_3)(T+L)}{(a_2^3 - 2a_2a_3)} \times \frac{a_2(a_2^3 - 2a_2a_3 + a_4)\left(T + \frac{1}{2}L\right)L}{2(a_2^2 - a_3)^2(T+L)^2} \\ &\therefore \sigma \approx \frac{a_2\left(T + \frac{1}{2}L\right)L}{(a_2^2 - a_3)(T+L)} \quad (12) \end{aligned}$$

## (3)ゲインの算出

式(12)より時定数  $T = 10$  (min), むだ時間  $L = 1$  (min)の $\sigma$ を求めると、つぎようになる。

$$\sigma = 2.291$$

これよりPIDゲインを求めると、つぎようになる。

$$k_p = 4.4263$$

$$k_i = 0.4365$$

$$k_d = 0.6371$$

このようにゲインは、すべて正数として求めることができる。(3)で求められたゲインより、応答を求めるとFig.4のようになる。

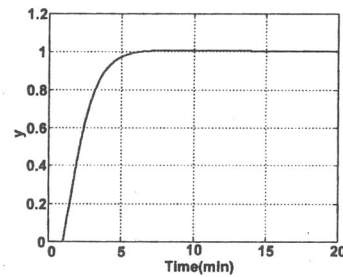


Fig.4

このように、オーバーシュート0%の応答に近い形を得ることができる。

ここでは、目標値追従特性に対するオーバーシュート0%のPIDゲインを、複素解の実数を $\sigma$ とすることにより求める方法を紹介した。よって、制御系に対し部分的モデルマッチング法を適用した際、 $\sigma$ の値が1つの実根しか求められず、比例ゲインが負になってしまう場合、複素解の実数を適用することにより、オーバーシュート0%に近い応答を得ることができた。

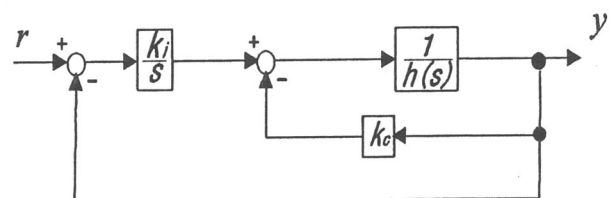


Fig.1



閉ループ系を分母系列表現すると,

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{1 + \frac{(h_0 + k_c)s}{k_i} + \frac{h_1 s^2}{k_i} + \frac{h_2 s^3}{k_i} + \dots} \quad (1)$$

となり, 参照モデル

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 \sigma s + \alpha_2 \sigma^2 s^2 + \alpha_3 \sigma^3 s^3} \quad (2)$$

と等置すると,

$$\alpha_1 \sigma = \frac{(h_0 + k_c)s}{k_i}, \quad \alpha_2 \sigma^2 = \frac{h_1}{k_i}, \quad \alpha_3 \sigma^3 = \frac{h_2}{k_i} \quad (3)$$

となる. 式(3)より,  $\sigma$ ,  $k_i$ ,  $k_c$  を導くと, つぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{h_2}{h_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \\ k_i &= \frac{h_2}{\alpha_3 \sigma^3} \\ k_c &= \alpha_1 \sigma k_i - h_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

つぎに, I-PD方式のブロック線図をFig.2に示す.

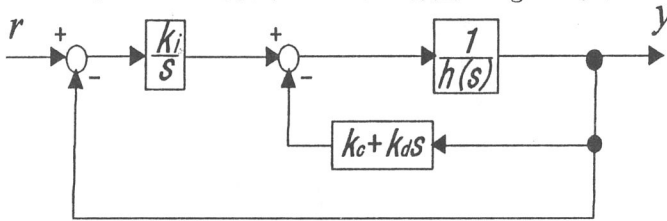


Fig.2

閉ループ系を分母系列表現すると,

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{1 + \frac{(h_0 + k_c)s}{k_i} + \frac{(h_1 + k_d)s^2}{k_i} + \frac{h_2 s^3}{k_i} + \frac{h_3}{k_i} + \dots} \quad (5)$$

となり, 参照モデル, 式(2)と等置すると,

$$\alpha_1 \sigma = \frac{(h_0 + k_c)s}{k_i}, \quad \alpha_2 \sigma^2 = \frac{(h_1 + k_d)}{k_i} \quad (6)$$

$$\alpha_3 \sigma^3 = \frac{h_2}{k_i}, \quad \alpha_4 \sigma^4 = \frac{h_3}{k_i}$$

となる. 式(6)から  $\sigma$ ,  $k_i$ ,  $k_c$ ,  $k_d$  を導くと, つぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{h_2}{h_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \\ k_i &= \frac{h_2}{\alpha_3 \sigma^3} \\ k_c &= \alpha_1 \sigma k_i - h_0 \\ k_d &= \alpha_2 \sigma^2 k_i - h_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで, プラントの伝達関数は, つぎのような1次おくれ+むだ時間系に統一している.

$$G_p(s) = \frac{k_p e^{-L_p s}}{1 + T_p s} \quad (8)$$

ここに,  $k_p = 1$ ,  $T_p = 10(\text{min})$ ,  $L_p = 1(\text{min})$  である. 分母系列表現した形式は, つぎのようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(s)} &= \frac{1}{\frac{1}{k_p} + \frac{L_p + T_p}{k_p} s + \frac{(T_p + \frac{1}{2} L_p) L_p}{k_p} s^2 + \dots} \\ &= \frac{1}{1 + 11s + 10.5s^2 + 5.17s^2} \end{aligned} \quad (9)$$

参照モデルは, I-P方式では3次の項まで, I-PD方式では4次の項まで必要である. また, 積分ゲイン  $k_i$  と比例ゲイン  $k_c$  の式は, I-P方式, I-PD方式, ともに同様の式であり,  $\sigma$  によって, ゲインが変化してしまうことがわかる.

#### 参照モデルとPIDゲイン

Table-1,2 において,  $n$  は参照モデルの次数である. また, ここから先は, オーバーシュート0%の参照モデルを  $1/b(s)$ , オーバーシュート10%の参照モデルを  $1/c(s)$  で表わす.

| $n$ | $b_1$ | $b_2$  | $b_3$   | $b_4$    | $b_5$   |
|-----|-------|--------|---------|----------|---------|
| 2   | 1.0   | 0.2500 |         |          |         |
| 3   | 1.0   | 0.3333 | 0.03704 |          |         |
| 4   | 1.0   | 0.3750 | 0.06250 | 0.003906 |         |
| 5   | 1.0   | 0.4000 | 0.0800  | 0.00800  | 0.00320 |

Table-1 The binomial model (オーバーシュート0%の参照モデル)

I-P方式には  $n = 3$  のモデル, I-PD方式には  $n = 4$  のモデルを使用する. Kitamori modelでは  $n = 3, 4$  どちらのモデルでも差異はないが, binomial

| $n$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2   | 1.0   | 0.5   |       |       |       |
| 3   | 1.0   | 0.5   | 0.15  |       |       |
| 4   | 1.0   | 0.5   | 0.15  | 0.03  |       |
| 5   | 1.0   | 0.5   | 0.15  | 0.03  | 0.003 |

Table-2 The Kitamori model (オーバーシュート10%の参照モデル)

modelでは,  $n$  が3のモデルと, 4のモデルでは値がちがっている. しかしI-P方式の場合,  $n = 3$  以上のモデルならば, どのモデルでもゲインを求めることができた.

#### (1) I-P方式におけるPIゲイン

$n = 3, 4, 5$  それぞれのbinomial modelにより求

|          | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |
|----------|---------|---------|---------|
| $\sigma$ | 7.88    | 5.73    | 4.77    |
| $k_i$    | 0.53    | 0.89    | 1.21    |
| $k_c$    | 3.23    | 4.10    | 1.77    |

Table-3

められた, I-P方式のゲインをTable-3に示す.

Table-3をみると, 参照モデルの次数の大きいほうが, 立ち上がり時間の尺度である  $\sigma$  が短くなっているのがわかる. この事実から, I-P方式においては, 必



要とされている次数よりも大きな次数のモデルならば何次のモデルでも適用でき、高い次数のモデルほど応性が改良されるといえる。

## (2) I-PD方式におけるPIDゲイン

I-PD方式の式(7)に, binomial model (オーバーシュート0%の参照モデル) を適用してゲインを計算すると, 微分ゲインが負の値になってしまう。これは, 参照モデルのためだと考えられるので, 北森の方法で参照モデルを改良する。

北森の方法は, 2種類の参照モデルを重み係数 $\sigma$ を用いて結合し, 新しい参照モデルを構成するものである。

ここで, binomial model (オーバーシュート0%の参照モデル)・ $1/b(s)$  と, Kitamori model (オーバーシュート10%の参照モデル)・ $1/c(s)$  をつぎのように結合する。

$$\frac{1}{\{b_0(1-\alpha)+c_0\alpha\} + \{b_1(1-\alpha)+c_1\alpha\}os + \dots} \quad (10)$$

式(10)をみると, 重み係数 $\sigma$ が0ならばbinomial model (オーバーシュート0%の参照モデル)・ $1/b(s)$  そのものであり, また1ならば, Kitamori model (オーバーシュート10%の参照モデル)・ $1/c(s)$  そのものであることがわかる。

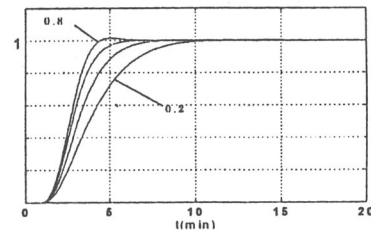
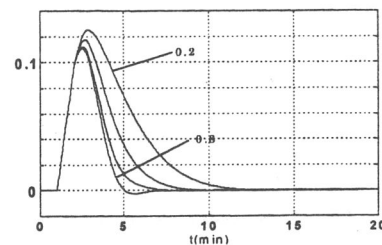
この式をI-PD方式の閉ループ系, 式(5)と等置し,  $\sigma$ ,  $k_i$ ,  $k_c$ ,  $k_d$  を導くと, つぎようになる。

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{h_2}{h_1} \frac{b_3(1-\alpha)+c_3\alpha}{b_4(1-\alpha)+c_4\alpha} \\ k_i &= \frac{h_2}{\sigma^3 \{b_3(1-\alpha)+c_3\alpha\}} \\ k_c &= \{b_1(1-\alpha)+c_1\alpha\}\sigma k_i - h_0 \\ k_d &= \{b_2(1-\alpha)+c_2\alpha\}\sigma^2 k_i - h_1 \end{aligned} \quad (11)$$

ここでは, 重み係数 $\sigma$ を0.2, 0.4, 0.6, 0.8 でそれぞれ計算した。PIDゲインの計算結果とその応答特性を, Table-4 と Fig.3, 4 に示す。

|          | $\alpha = 0.2$ | $\alpha = 0.4$ | $\alpha = 0.6$ | $\alpha = 0.8$ |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\sigma$ | 4.12           | 3.34           | 2.89           | 2.63           |
| $k_i$    | 1.95           | 2.88           | 3.78           | 4.36           |
| $k_c$    | 7.03           | 8.62           | 9.92           | 10.47          |
| $k_d$    | 2.37           | 2.75           | 3.27           | 3.36           |

Table-4

Fig.3 目標追従特性 ( $r=1, d=0$ )Fig.4 外乱抑制特性 ( $r=0, d=1$ )

重み係数 $\sigma$ を大きくしていくと, Fig.3, 4 のように, だんだんオーバーシュート10%の応答に近づいていくことがわかる。

このようにして, I-PD方式における, オーバーシュート0%のゲインを求めることができた。  $\alpha$  を変えることにより目標値追従特性と, 外乱追従特性を変えることができるので, 制御の目的に応じて  $\alpha$  を使い分ければよいと思う。また,  $\alpha$  の実用的な範囲は0~2程度である。この方法は参照モデルを変化させる方法なので, 部分的モデルマッチング法のすべての方式に対して適用できる。

## 参考文献

- 1) 重政 隆, 高木 康夫, 市川 義則, 北森 俊行: 制御系設計のための実用的な汎用参照モデル, 計測自動制御学会論文集, 19-7, 592/594 (1987)

## 附録(3) PID方式における改良モデルに対するPIDゲイン

I-PD方式では, 参照モデルを改良することによって, オーバーシュート0%の参照モデルに対して, PIDゲインを求めることができた。PID方式においても, 同じことができるであろうと予想したが, 予想通りにはならなかったの, ここに報告する。

オーバーシュート0%の参照モデル と, オーバーシュート10%の参照モデル (附録(2), Table-1, 2を参照)を, 重み係数 $\alpha$ を用いて, つぎのように結合した新しいモデルを  $1/d(s)$  とする。

$$\frac{1}{d(s)} = \frac{1}{\{b_0(1-\alpha)+c_0\alpha\} + \{b_1(1-\alpha)+c_1\alpha\}os + \dots} \quad (1)$$

ここでは, 重み係数 $\alpha$ を0, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0として, それぞれ計算している。

PID方式の閉ループ系と, 改良モデル  $1/d(s)$  とを等置すると, PIDゲインはつぎようになる。

$$k_c = \frac{h_i}{\sigma} - d_2 h_0 \quad (2)$$

$$k_i = \frac{h_0}{\sigma} \quad (3)$$

$$k_d = \frac{h_2}{\sigma} - d_2 h_1 + (d_2^2 - d_3) h_0 \sigma \quad (4)$$

また、PID方式の場合の $\sigma$ は、以下の式より求められる。

$$\frac{h_3}{\sigma} - d_2 h_2 + (d_2^2 - d_3) h_1 \sigma - (d_2^3 - 2d_2 d_3 + d_4) h_0 \sigma^2 = 0 \quad (5)$$

式(5)より求められた解のうち、正で最小の $\sigma$ を適用する。

プラントの伝達関数をつぎのように与える。

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(s)} &= \frac{1}{\frac{1}{k_p} + \frac{L_p + T_p}{k_p} s + \frac{(T_p + \frac{1}{2} L_p) L_p}{k_p} s^2 + \dots} \\ &= \frac{1}{1 + 11s + 10.5s^2 + 5.17s^2} \end{aligned} \quad (6)$$

ここに  $k_p=1$ ,  $T_p=10(\text{min})$ ,  $L_p=1(\text{min})$ である。

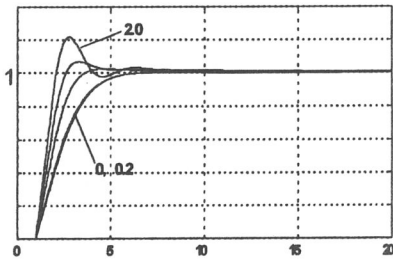


Fig.1 目標追従特性 ( $r=1, d=0$ )

Table-1とFig.1, 2は、重み係数 $\alpha$ をかえてPIDゲインを求め、シミュレーションを行った結果である。 $\alpha$ が0と0.2のときのPIDゲインは、附録(1)において提案された方法によって求められたものである。

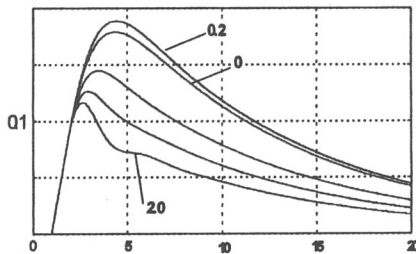


Fig.2 外乱抑制特性 ( $r=0, d=1$ )

Fig.2をみると、改良モデルを用いた $\alpha=0.2$ のときの外乱抑制特性が、 $\alpha=0$ のときと比べ、改良されるどころか、 $\alpha=0$ のときよりオーバーシュートが大きくなっている。またTable-1をみると、立ち上がり時間である $\sigma$ も、 $\alpha=0$ のときより大きい。これは $\sigma$ の求める方法に原因がある。

つぎにFig.3に、式(5)の値と $\alpha$ の関係を示す。このグラフは原点付近を拡大したものである。

$\sigma$ が実数解をもたない場合は、附録(1)により、複素解の実数を $\sigma$ とすると、 $\alpha=0$ のときより $\alpha=0.2$ のときのほうが大きいのがわかる。

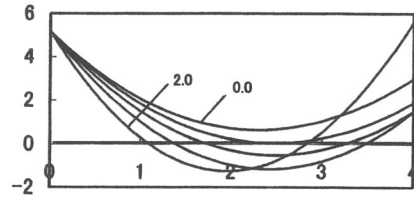


Fig.3

ここでは、 $\alpha > 0.27$ のときから、 $\sigma$ が実数解をもった。 $\alpha=0.27$ のときの目標値追従特性を、つぎのFig.4に示す。

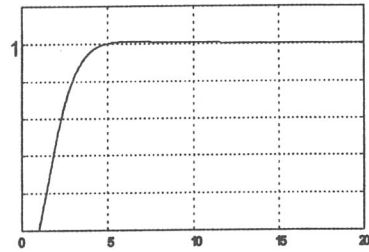


Fig.4 目標値追従特性 ( $r=1, d=0$ )

Fig.4をみると、わずかではあるが、オーバーシュートがある。これから、 $\sigma$ が実数解をもつ場合は、必ずオーバーシュートが出てしまうことがわかる。

PID制御においては、I-PD制御の時と同様に、参照モデルの改良により、オーバーシュート0%の応答を得ることは難しく、オーバーシュート0%の応答を得るには、附録(1)で提案した修正方法を使わなければならないことが明らかとなった。

#### [討 論]

本研究はSICE'99 in Moriokaにおいて、葛生克明君(東京農工大学大学院生)により「多変数系における部分的モデルマッチング法の適用—空調システムにおける温度、湿度の非干渉化」と題して講演された。そのさいつぎのような討論が行われた。

質問：プラントの伝達関数の算出方法について

回答：実際の空調システムの冷房運転時における入出力データより、多変数ARモデル法に基づいて算出した。これはすでにASHRAEの論文集(1995年)に、SICE論文集(1995年)に発表されている

質問：今回は多変数系についての検討であるが、提案している設計法はスカラー系にも適用することは可能か。

回答：多変数系でもスカラーの三次方程式を解いて $\sigma$ を求めているので、基本的には適用は可能である。しかし、今回は虚数解となった極値が実軸に近かったため応答がよかったので、このことに注意して適用するべきである。

討論：自分の研究でもそのような問題点があり、解決法を検討していたところで大変参考になった。

質問：実験での検証は行うのか。

回答：今回の研究は先行的なものなので実験による検証は行わない。