

RC造のひび割れを考慮した異形ラーメンの弾塑性性状の研究

山本 嘉孝・杉本 裕也*

A Study of Elasto-Plastic Nature of the Deformed Rigid Frame in Consideration of the Crack of the Reinforced Concrete Construction

Yoshitaka YAMAMOTO・Yuya SUGIMOTO*

1. はじめに

鉄筋コンクリート構造物は、一般的に長期荷重に於いて各部材に作用する応力は弾性範囲で推移していると考えられる。しかし、短期荷重時（主に地震時）では、応力の集中する所では亀裂が生じて、弾性体として扱うと支障が出てくる場合がある。この場合に構造力学的な線形理論に限界が生じ、非線形になってしまう。本報告では、鉄筋コンクリート部材の曲げモーメントと曲率の関係をもとに、部材に局所的な亀裂が生じた弾塑性部材として、異形ラーメンの鉄筋コンクリートの弾塑性解析を試みた。

2. 部材の曲げモーメントと曲率の関係

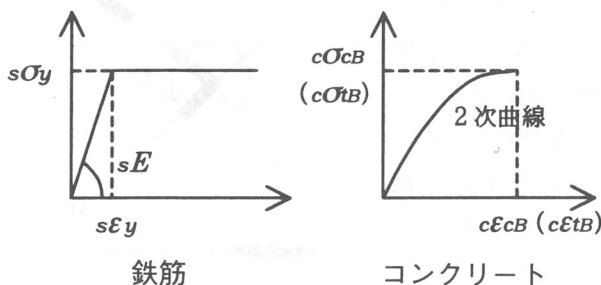


図-1 材料の応力度歪度

鉄筋とコンクリートの応力度歪度(σ-ε図)を図-1と仮定すれば、近似的に図-2の様に示すことができる。従って、曲げモーメントMの大きさに応じて次の式が成立する。

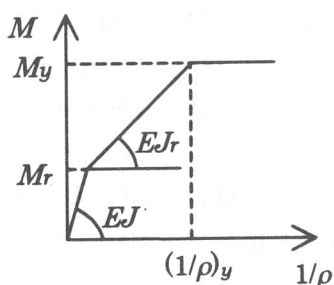


図-2 部材のM-1/ρ

$$0 \leq M \leq M_r : \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \quad (1.a)$$

$$M_r \leq M \leq M_y : \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_r} - \frac{M_r}{EJ_r} \left(1 - \frac{EJ_r}{EJ}\right) \quad (1.b)$$

$$M \leq M_y : \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho}\right)_y \quad (1.c)$$

3. 弾塑性部材の撓角法基本式

図-3に示すような弾塑性部材AB材を(1.a)～(1.c)を用いて基本式を求める。

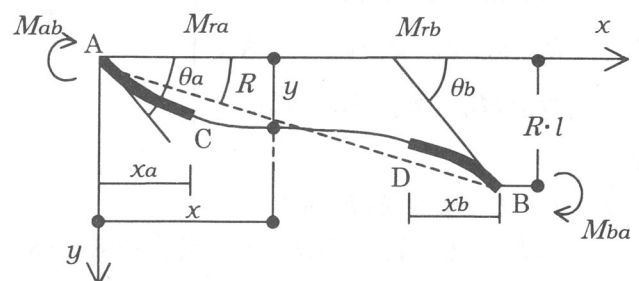


図-3 弾塑性部材の変形

AC及びDB…塑性部分（亀裂の生じた部分）

C-D …弾性部分

M_{ra} 、 M_{rb} …C点、D点（塑性域の先端）の亀裂時の曲げモーメント

x_a 、 x_b …A端、B端各々の塑性部分の範囲

θ_a 、 θ_b …A点、B点の撓角

R …AB材の部材角

AB材が釣合い状態にあるとすれば、AB材での任意の点の M_x は次の様に示すことができる。

$$M_x = \frac{l-x}{l} M_{ab} - \frac{x}{l} M_{ba} + \phi''(x) \quad (2)$$

$\phi''(x)$: AB材を単純梁とした時の荷重項 M_0 を関数として扱ったもの

(1・a) ~ (1・c) と (2) 式より、AC、CD、DBの3つの材に分け、以下の様な微分方程式を組立てることが出来る。

A-C部分 ($0 \leq x \leq x_a$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{EJ_r \cdot l} x - \frac{M_{ab}}{EJ_r} + \frac{M_{ra}}{EJ_r} \cdot \left(1 - \frac{EJ_r}{EJ}\right) - \frac{\phi''(x)}{EJ_r} \quad (3.1)$$

C-D部分 ($x_a \leq x \leq l - x_b$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{EJ \cdot l} x - \frac{M_{ab}}{EJ} + \frac{\phi''(x)}{EJ} \quad (3.2)$$

D-B部分 ($l - x_b \leq x \leq l$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{EJ_r \cdot l} x - \frac{M_{ab}}{EJ_r} + \frac{M_{rb}}{EJ_r} \cdot \left(1 - \frac{EJ_r}{EJ}\right) - \frac{\phi''(x)}{EJ_r} \quad (3.3)$$

以上の微分方程式を展開していくことにより、積分常数が求まり、 M_{ab} 及び M_{ba} を θ_a 、 θ_b 、 R 、 M_{ra} 、 M_{rb} 、 x_a 、 x_b 、 l 等の関数として示せば、AB材の撓角形式による基本式は次の様に示すことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= k_{ab}(\alpha_{ab} \cdot \varphi_a + \beta_{ab} \cdot \varphi_b + \gamma_{ab} \cdot \Psi_{ab}) \\ &\quad + {}_a m_{ab} \cdot M_{ra} - {}_b m_{ab} \cdot M_{rb} + {}_r C_{ab} \\ M_{ba} &= k_{ab}(\alpha_{ba} \cdot \varphi_b + \beta_{ab} \cdot \varphi_a + \gamma_{ba} \cdot \Psi_{ab}) \\ &\quad + {}_a m_{ba} \cdot M_{ra} - {}_b m_{ba} \cdot M_{rb} + {}_r C_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、

$$EJ/l = E \cdot K_{ab} = E \cdot K_0 \cdot k_{ab}$$

$$\varphi_a = 2EK_0 \cdot \theta_a, \varphi_b = 2EK_0 \cdot \theta_b, \Psi_{ab} = 6EK_0 \cdot R$$

$$\alpha_{ab}, \beta_{ab}, \gamma_{ab}, \alpha_{ba}, \gamma_{ba}, {}_a m_{ab}, {}_b m_{ab},$$

${}_a m_{ba}, {}_b m_{ba}$ は x_a, x_b, l, EJ, EJ_r を用いて表現できる諸係数

${}_r C_{ab}, {}_r C_{ba}$ は x_a, x_b, l, EJ, EJ_r と $\phi''(x)$ により表現できる荷重項

塑性ヒンジのある場合に於いては、(4)式で M_{ab} 、 M_{ba} の所を M_r (降伏値) の値にし、 M_{ab} 、 M_{ba} と同符号にすることにより求められる。

また、(4)式の諸係数を、 $x_a, x_b = 0, EJ/EJ_r = 1$ として、荷重項を弾性での荷重項 C_{ab} 、 C_{ba} と置けば、(5)式は通常の弾性材での撓角法の基本式と一致する。

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= k_{ab}(2\varphi_a - \varphi_b + \Psi_{ab}) + C_{ab} \\ M_{ba} &= k_{ab}(2\varphi_b - \varphi_a + \Psi_{ab}) + C_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

4. 撓角法形式による弾塑性解析法

両端及び途中に塑性部分を生じる部材、図-4の基本式は、AB材を図-4の様にACとCBの2材に分け、各々に(4)式を適用することとする。これにより、C点に塑性ヒンジが生じた場合にも適応できるようになる。また、部材を荷重条件に伴い、2個以上の部材に分け解析することも出来る。

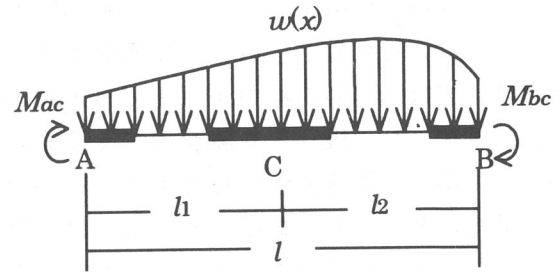


図-4 弾塑性部材

5. 各方程式

5.1 節点方程式

図-5に於けるA節点で、A点に作用する幾つかの材端モーメント及び外力のモーメントのなす力の和は零とならなければならない。

このことより節点方程式を用いると、

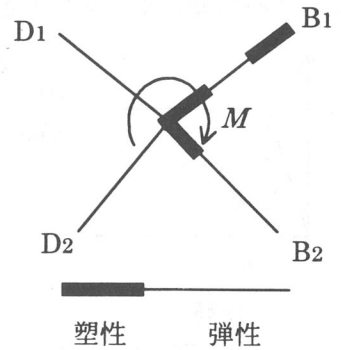


図-5 節点方程式

$$\Sigma M_{ab} + \Sigma M_{ab} = M \quad (6)$$

ここで、 M_{ab} : 弾塑性材の材端モーメント

M_{ad} : 弾性材の材端モーメント

M : 外力としてのモーメント

従って、 M_{ab} に (4) 式を適用することが出来、弾性材と接合した場合にも節点方程式が成り立つことになる。

この際、部材を分けた場合はその節点も考慮することとする。

5.2 部材方程式

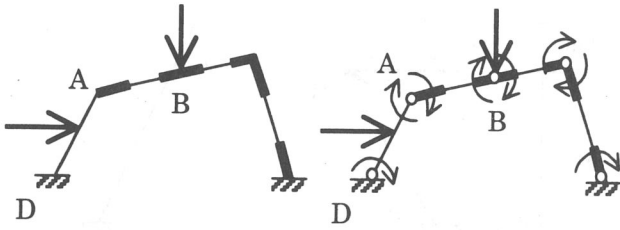


図-6.1 ラーメン

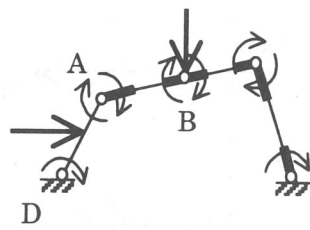


図-6.2 仮想トラス

図-6.1の様なラーメンで、或荷重のもとで釣合い状態にある時に、各接点をピンとして仮想トラスに置き換える。それには、図-6.2の様な端モーメントを加える必要がある。ラーメンは全体として釣合い状態にあるため、外力及び端モーメントのなす仮想仕事の和は零となっている。図-6.1、6.2のラーメンに於いて、任意の弾塑性部材をAB、任意の弾性部材をADとし、このラーメンに仮想荷重を与えた時のAB、ADの部材回転角を ϕ'_{ab} 、 ϕ'_{ad} とすれば次の式が成立する。

$$\Sigma P\eta + \Sigma (M_{ab} + M_{ba})\phi'_{ab} + \Sigma (M_{ad} + M_{da})\phi'_{ad} = 0 \quad (7)$$

ここで、 P ：任意部材に加わる荷重の合力

η ： P の作用点の直角変位と P との距離
従って、 M_{ab} 、 M_{ba} に(4)式を適用することが出来、また、弾性材と接合した場合にも部材方程式が成り立つことになる。

6. 曲げモーメントの適合条件

図-3に於ける弾塑性部材に於いて、塑性部分の先端であるC点、D点の曲げモーメントがその部材の亀裂曲げモーメント (M_{ra} 、 M_{rb}) に等しくなる必要がある。従って、(2)式より、

$$\left. \begin{aligned} M_{ra} &= \frac{l-x_a}{l} M_{ab} - \frac{x_a}{l} M_{ba} + \phi''(x_a) \\ M_{rb} &= \frac{l-x_b}{l} M_{ba} - \frac{x_b}{l} M_{ab} + \phi''(l-x_b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

が成立する。

7. 異形ラーメンの単純弾塑性解析

図-7の柱材の断面で構成された異形ラーメン (図-8) を解析する。

最初に弾性体とした状態で撓角法により曲げモーメントを求める。その結果を基に(8)式の適合条件から塑性長さが求まる。表-1の弾性範囲 (反復計算の1回目) の変位 δ_e は部材角 R を用いて求められる。部材角 R は、図-8の値であり、荷重 P の与え方によっては、架構が弾性体で構成されていない。

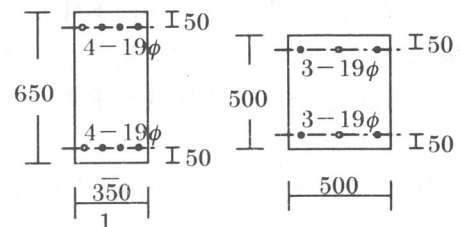
弾性体と扱った時のB点、C点の変位は、

$$B \quad \delta_x = 0.19694 \text{ cm} \quad \delta_y = -0.13129 \text{ cm}$$

$$C \quad \delta_x = 0.13129 \text{ cm} \quad \delta_y = 0.06565 \text{ cm}$$

となる。(変位は、右・上方向を正、左・下方向を負とし、これ以降同様である。) それを反復計算により、(8)式の適合条件を満たすまで繰り返し、塑性長さを求める。

(4)式の基本式にこの塑性長さを考慮した節点方程式(6)と部材方程式(7)より新たに曲げモーメントを求め、(8)式の適合条件により新たな塑性長さが求まる。



梁

柱

$a_t = a_c \text{ (cm}^2\text{)}$	11.34	8.51
$EJ \text{ (kg} \cdot \text{cm}^2\text{)}$	20.7669×10^{10}	12.8917×10^{10}
$EJ_r \text{ (kg} \cdot \text{cm}^2\text{)}$	4.3332×10^{10}	1.8763×10^{10}
EJ/EJ_r	4.7932	6.8708
$M_r \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$	6.7009×10^5	6.9948×10^5
$M_y \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$	19.7223×10^5	14.6600×10^5
$(1/\rho)_y \text{ (1/cm)}$	3.3276×10^5	4.6279×10^5

図-7 部材断

表-1 塑性長さの収斂状況表

部 材	A B (単位: l_{AB})		B C (単位: l_{BC})		C D (単位: l_{CD})	
塑性長さ	x_{ab}	x_{ba}	x_{bc}	x_{cb}	x_{cd}	x_{dc}
1 回目 (弾性)	0.24924	0.23937	0.27803	0.13150	0.17279	0.04979
2 回 目	0.22500	0.22588	0.24100	0.17313	0.19418	0.14872
3 回 目	0.22689	0.22755	0.24363	0.17225	0.19821	0.12967
4 回 目	0.22691	0.22762	0.24371	0.17227	0.19841	0.12896
5 回 目	0.22691	0.22762	0.24371	0.17227	0.19841	0.12895

このときの部材の変位 δ は (4) 式で解いた Ψ を用い、その結果から部材角 R と変位 δ が求まる。

B、C 点の水平、垂直方向の変位は次のようになる。

$$B \quad \delta_x = 0.45475 \text{ cm} \quad \delta_y = -0.30316 \text{ cm}$$

$$C \quad \delta_x = 0.30316 \text{ cm} \quad \delta_y = 0.15158 \text{ cm}$$

となり、おおよそ $\delta = 2.3 \times \delta_e$ となる。

(e : elastic 弾性)

8. 塑性長さと荷重

前章の塑性長さから水平荷重 P 、さらにその時の曲げモーメント図を求める。(図-10) 塑性長さは前章の 5 回目の値となる。

$$x_{ab} = 0.22691 l_{AB} \quad x_{ba} = 0.22762 l_{AB}$$

$$x_{bc} = 0.24371 l_{BC} \quad x_{cb} = 0.17227 l_{BC}$$

$$x_{cd} = 0.19841 l_{CD} \quad x_{dc} = 0.12895 l_{CD}$$

また使用する材、架構の形、載荷形式は図-10 に示す通りとする。

仮定条件から (4) 式の諸係数が分かり各々の材端モーメントが決まるので、節点方程式 (6)、部材方程式 (7) を用いて P を変数とした曲げモーメントが得られる。(8) 式の適合条件からこの時の P の値は 20.00 t であり、塑性長さから水平荷重が導かれ、且つ前章の塑性長さを求めた時の反復計算は適切に行われたことが分かる。それにより図-9 と同様の曲げモーメント図が得られる。

9. 異形ラーメンの弾塑性解析による追跡

図-11 の様な鉄筋コンクリート造異形ラーメンの W を一定とし P を変数とした時の曲げモーメント図と変位 δ を終局荷重時まで追跡を行う。また使用する材については図-7 に示す通りとする。(AB、CD-柱、BC-梁)

部材の塑性ヒンジの回転限界を無視する。

この場合、材の弾性剛比は

$$k_{ab} = 1, k_{bc} = 1.83226, k_{cd} = 0.80623$$

となり、弾性材での解は通常の撓角法として解き、以下の様になる。

$$\left. \begin{aligned} M_A &= 0.66127P + 0.07316W \\ M_B &= 0.70293P + 0.01508W \\ M_C &= 0.49739P + 0.21910W \\ M_D &= 0.37358P + 0.13600W \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$W = 12 \text{ t}$ を代入し、 P を未知数とした曲げモー

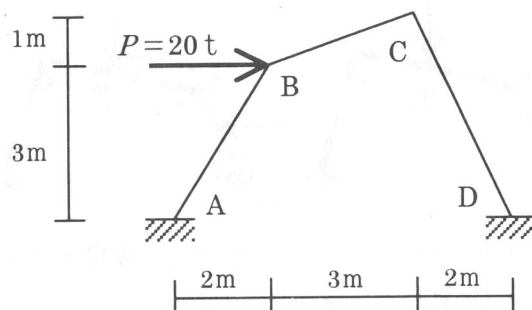


図-8 7章の原形と荷重

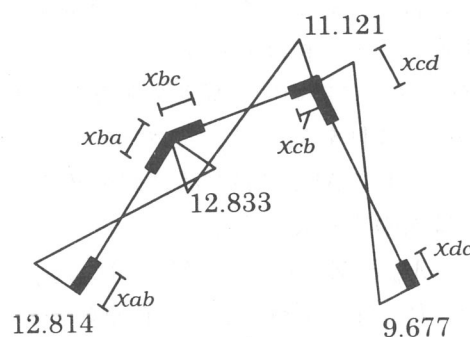


図-9 7章のモーメント図

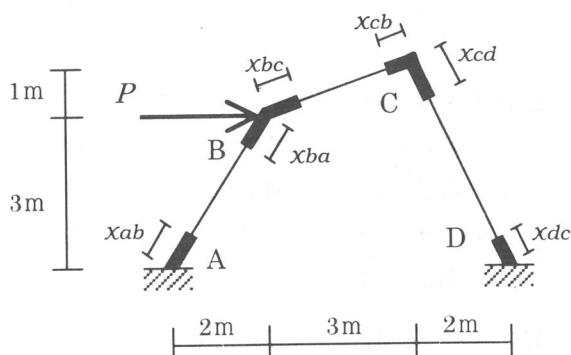


図-10 8章の仮定条件

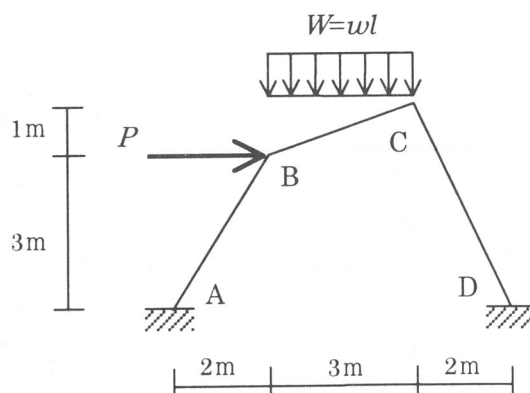


図-11 9章の原形と荷重

メントが得られる。(この際、 W は積載荷重(長期荷重)を想定しており、 $1 \sim 3 \text{ t/m}$ 辺りが妥当と考えこの値としてある)

9.1 鉄筋コンクリートの弾性理論値の限界

$$P=8.186 \text{ t} \quad (\text{図-12.1})$$

部材に亀裂が入る直前である完全弾性体の時の応力を求める。(9)式に P の値を代入したものが各々のモーメントとなる。

$$M_A=6.29108 \text{ t}\cdot\text{m} \quad M_B=5.93514 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M_C=6.70083 \text{ t}\cdot\text{m} \quad M_D=4.69013 \text{ t}\cdot\text{m}$$

この場合の変位 δ は、通常の撓角法で求めた R から求められる。(図-12.1～3の変位は時計回りを正とする)

$$\text{変位 B点 } \delta_x=0.09295 \text{ cm}, \delta_y=-0.06167 \text{ cm}$$

$$\text{C点 } \delta_x=0.06197 \text{ cm}, \delta_y=0.03098 \text{ cm}$$

この P の値を超えると塑性部分が生じるので、弾塑性解析が必要である。

9.2 塑性ヒンジが形成される直前の応力

$$P=21.04 \text{ t} \quad (\text{図-12.2})$$

この場合は、7章と同様に、弾性解により仮の塑性長さを求めて、その塑性長さから新たに曲げモーメント及び塑性長さを求める。この反復計算を塑性長さが(7)式の適合条件を満たすまで繰り返す。それにより求めた値が図-12.2となる。

部材の撓みは7章と同様に基本式(4)式で解いた Ψ を用い、 $\Psi=6EK_0 \cdot R$ と置くことで部材角 R が得られ、B点、C点の変位は以下の通りである。

$$\text{変位 B点 } \delta_x=0.54840 \text{ cm}, \delta_y=-0.36560 \text{ cm}$$

$$\text{C点 } \delta_x=0.36560 \text{ cm}, \delta_y=0.18280 \text{ cm}$$

この時、B点の柱頭に1つ目の塑性ヒンジが生じるが、その直前の応力である。

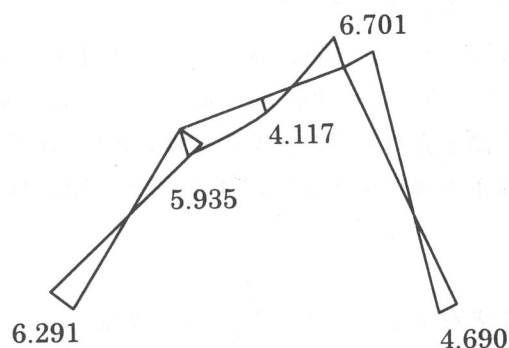
9.3 架構が崩壊する直前の応力

$$P=22.43 \text{ t} \quad (\text{図-12.3})$$

崩壊荷重はLimit Analysisの原理により求め、柱の降伏値が梁の降伏値を下回っている為、柱頭と柱脚に塑性ヒンジが生じる。部材角は直角変位図より求め、図-12の様に示され、仮想仕事式から崩壊荷重 P_u を求めることが出来る。

この時の曲げモーメントは部材の降伏値であり、既知であるから(8)式の適合条件より塑性長さを求められる。変位を知るための Ψ は、(4)式の右辺に M_r と置くと求め、7章と同様に R を求めそれを用いて変位 δ を求める。

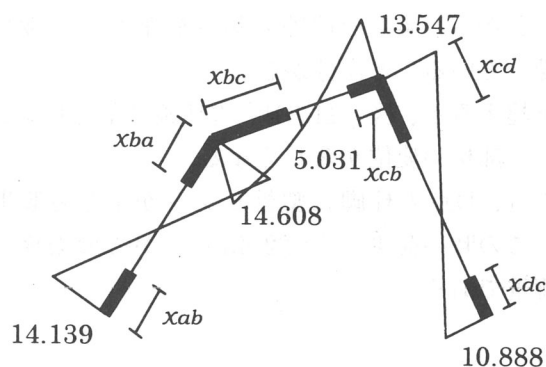
最後の塑性ヒンジはD点である柱脚生じ、この時



変位 B点 $\delta=0.11155 \text{ cm}$ 、C点 $\delta=0.06928 \text{ cm}$

$$M_{cb} = M_r = 6.7009 \text{ tm} \quad (\text{弾性限界})$$

図-12.1 ①異形ラーメンの弾性限界値



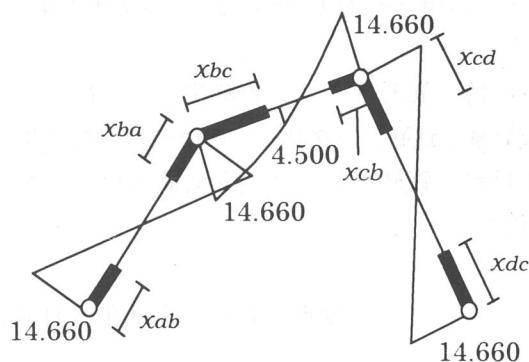
変位 B点 $\delta=0.65909 \text{ cm}$ 、C点 $\delta=0.40875 \text{ cm}$

$$\text{塑性長さ: } x_{ab}=0.24853 \text{ } l_{AB} \quad x_{ba}=0.26483 \text{ } l_{AB}$$

$$x_{bc}=0.43982 \text{ } l_{BC} \quad x_{cb}=0.17212 \text{ } l_{BC}$$

$$x_{cd}=0.26815 \text{ } l_{CD} \quad x_{dc}=0.15933 \text{ } l_{CD}$$

図-12.2 ②異形ラーメンの部材降伏時応力



○● : 塑性ヒンジ

変位 B点 $\delta=1.82633 \text{ cm}$ 、C点 $\delta=1.13264 \text{ cm}$

$$\text{塑性長さ: } x_{ab}=0.26143 \text{ } l_{AB} \quad x_{ba}=0.26143 \text{ } l_{AB}$$

$$x_{bc}=0.42315 \text{ } l_{BC} \quad x_{cb}=0.19332 \text{ } l_{BC}$$

$$x_{cd}=0.26143 \text{ } l_{CD} \quad x_{dc}=0.26143 \text{ } l_{CD}$$

図-12.3 ③異形ラーメンの架構崩壊時応力

の変位は以下の通りである。

変位 B点 $\delta_x = 1.51960$ cm $\delta_y = -1.01306$ cm

C点 $\delta_x = 1.01306$ cm $\delta_y = 0.50653$ cm

以上を踏まえた上で、9章の架構のB点に関する変位と荷重の関係をグラフにすると図-13のようになる。

この図を考察すると、①を超えると架構の一部が弾塑性域に入ってしまうため、弾塑性解析を行う。①を超えると弾性範囲内に比べて架構の部材変位も大きくなることが分かる。

①から②の範囲では、特に梁の部分のひび割れが著しく、それに伴うように架構の変位も増していることから、梁のひび即ち鉛直荷重も水平変位に影響していることが分かる。

②を超えると、図-11のB点の柱頭に塑性ヒンジが生じ、部材の変位が著しくなる。

③では、D点の柱脚に塑性ヒンジが生じる瞬間であるこの時の荷重 ($P = 22.43$ t) がこの架構の崩壊荷重である。

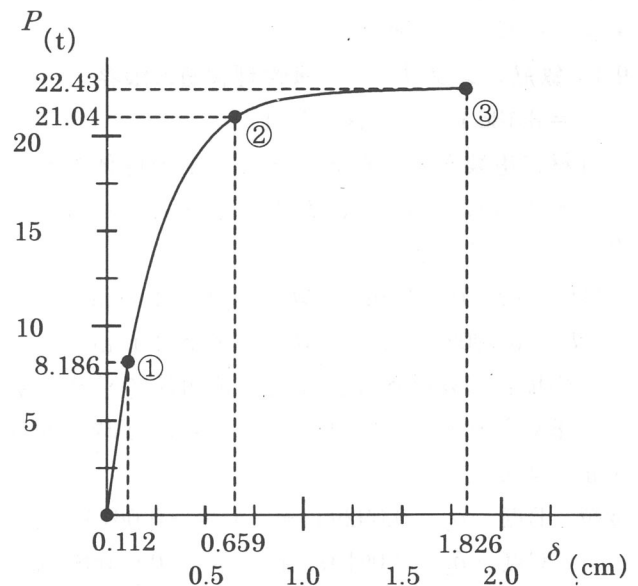


図-13 架構(図-11)の荷重-変位(B点)図

10. おわりに

収斂計算の反復回数は3~4回で良い。

P (8.186 t) の弾性限界から崩壊荷重 P (22.43t) に至るまでのラーメンの挙動を考察することで解法の有効性が得られた。

(参考、引用文献)

- 1) 山田孝一郎：撓角法による骨組みの弾塑性解析とその応用(その1・その2)、論文報告集 80・81号
- 2) 倉田博：異形ラーメンの解法、学隆社
- 3) 坂静雄：鉄筋コンクリートの研究、産業図書KK
- 4) 梅村魁：鉄筋コンクリート架構の塑性応力、研究報告

「受理年月日 2000年9月6日」