

## プロセス制御系設計用CADソフト(その22)

### —プラントの特性変動を考慮した $H_\infty$ 補償器(その1)—

渡利 久規, 黒須 茂, 山崎 敬則\*, 加藤 敦史\*\*, 野田 善之\*\*\*

Hisaki WATARI, Shigeru KUROSU, Takanori YAMAZAKI\*,  
Atsushi KATO\*\*, Yoshiyuki NODA\*\*\*

## CAD Software for Designing Process Control System (Part 22)

### — Design of $H_\infty$ Compensator for Plant with Changes in Characteristics (Part 1) —

#### 1. はじめに

PIDコントローラはP動作, I動作, D動作と構造が限定されているために性能は制限されるが, PIDゲインの変更が制御系に与える影響を経験的に知ることができる利点から現在でも広く利用されている。しかしながら, プラントの特性値が変動するさいに満足な性能が得られないのが通常である。そのため本研究室では, プラントの特性変動で生じるモデル化誤差を予め見積もり, 特性変動があってもロバスト安定性を保証するPIDコントローラの調整法を明らかにしている<sup>1)</sup>。

状態フィードバックに代表される最適制御に対抗する形で, 古典制御すなわち周波数領域における制御理論への見直し, 回帰として, さらにロバスト制御の実現手段として20年ほど前に  $H_\infty$  制御理論が登場した。しかしながら, この  $H_\infty$  制御理論が大きな発展を遂げたのは, 実にこの10年ほどのことである。

本稿では, 時間領域での状態方程式を出発点として,  $H_\infty$  制御理論の基本的な考え方を著者らが理解した範囲で述べ, さらにプラントモデルとして1次おくれ+むだ時間系を例にとり, 代数的な解法によって  $H_\infty$  補償器を設計し, 著者らが設計してきたロバストPIDコントローラと制御性能ならびに特性を比較検討する。

#### 2. $H_\infty$ ノルムと設計仕様<sup>2)</sup>

古典制御では, 開ループ系伝達特性の周波数整形に主眼をおいて補償器の設計を行うことが多い

が, 本来, 制御系設計の目的は閉ループ系伝達特性が一定の仕様を満たすようにすることにある。 $H_\infty$  制御は, 閉ループ系伝達関数の  $H_\infty$  ノルムに注目し, これを小さくすることで種々の設計仕様を満たすことを目的とした制御法である。

##### 2.1 $H_\infty$ ノルム(周波数領域)

安定な伝達関数  $G(s)$  の周波数領域における  $H_\infty$  ノルムは次のように定義される。

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}[G(j\omega)] \quad (1)$$

ただし,  $\sigma_{\max}$  は最大特異値を表す。

##### 特異値(実数係数行列):

実数係数行列  $A$  について,  $A^T A$  の固有値の平方根を特異値という。 $A^T A$  の固有値  $\lambda_i$  とし  $A$  の特異値を  $\sigma_i$  とすると, 次の式が成り立つ。

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \quad (2)$$

ここで,  $\lambda_i(A^T A)$  は  $A^T A$  の固有値という意味である。

実数係数行列  $A$  に対する特異値  $\sigma_i$  の  $\infty$  乗和の  $\infty$  乗根は最大特異値  $\sigma_{\max}$  である。

$$\sqrt[k]{\sum_{i=1}^n \sigma_i^k(A)} = \sigma_{\max}(A) \quad (3)$$

その証明は,

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sigma_1^k + \sigma_2^k + \cdots + \sigma_n^k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sigma_{\max}^k \left\{ \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} \right)^k + \cdots + \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} \right)^k + \left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} \right)^k \right\}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} \right)^k + \cdots + \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} \right)^k + 1} \\ &= \sigma_{\max} \end{aligned}$$

である。

\* ) 平成4年度機械工学科卒業生  
(現東京農工大ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー)  
\*\* ) 平成11年度機械工学科卒業生(現長岡技科大)  
\*\*\* ) 平成12年度電子システム専攻科卒業生  
(現豊橋技科大)

[例1]  $2 \times 2$  の実数係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A^T A| = \lambda^2 - 14\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{14+6\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{14-6\sqrt{5}}{2}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{2}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}}{2}}$$

したがって、最大特異値は

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{2}}$$

ここで、私たちは、実数係数行列  $A$  の特異値を問題にするわけではない。そこで、伝達関数行列  $G(j\omega)$  の特異値をつぎに示す。

特異値(伝達関数行列):

伝達関数行列  $G(j\omega)$  について、 $G(j\omega)^* G(j\omega)$  の固有値の平方根を特異値という。  $G(j\omega)^*$  は  $G(j\omega)$  の共役転置行列(エルミート行列)である。

$$\sigma_1[G(j\omega)] = \sqrt{\lambda[G(j\omega)^* G(j\omega)]} \quad (4)$$

伝達関数行列  $G(j\omega)$  の最大特異値は角周波数  $\omega$  に依存する。したがって、伝達関数行列  $G(j\omega)$  の  $H_\infty$  ノルムは全周波数に対しての最大特異値の最大値である。

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}[G(j\omega)] = \sqrt{\sup_{\omega} \lambda_{\max}[G(j\omega)^* G(j\omega)]} \quad (5)$$

[例2] 1入力2出力系

$$G(j\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega+1} & \frac{1}{j\omega+2} \end{pmatrix}, \quad G^*(j\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{-j\omega+1} \\ \frac{1}{-j\omega+2} \end{pmatrix}$$

$$G(j\omega)^* G(j\omega) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{-j\omega+1} \\ \frac{1}{-j\omega+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega+1} & \frac{1}{j\omega+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega^2+1} & \frac{1}{\omega^2-j\omega+2} \\ \frac{1}{\omega^2+j\omega+2} & \frac{1}{\omega^2+4} \end{pmatrix}$$

$\omega = 1$  の場合の特異値は、次のようになる。

$$G(j\omega)^* G(j\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3-i} \\ \frac{1}{3+j} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - G(j\omega)^* G(j\omega)| = \lambda^2 - \frac{7}{10}\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{7}{10}, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{7}{10}}$$

[例3] 1入力1出力系

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega}$$

$u = \omega/\omega_n$  を導入すると、

$$G(jn) = \frac{1}{1-u^2+2j\zeta u}$$

となる。同様にして

$$G(ju)^* = \frac{1}{1-u^2-2j\zeta u}$$

$$G(ju)^* G(ju) = \frac{1}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2}$$

$G(ju)^* G(ju)$  の固有値  $\lambda(u)$  は

$$\lambda(u) - G(ju)^* G(ju) = 0$$

より

$$\lambda(u) = \frac{1}{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2}$$

であるから、よって  $G(ju)^* G(ju)$  の特異値は

$$\sigma(u) = \sqrt{\lambda(u)} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2}}$$

で与えられ、特異値  $\sigma(u)$  の最大値  $\sigma_{\max}$  は

$$u = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

のとき、

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

となり、Bode線図上のMp値と一致する。

## 2.2 $H_\infty$ ノルム(時間領域)

安定な伝達関数  $G(s)$  の時間領域における  $H_\infty$  ノルムは  $w$ : 外生信号,  $z$ : 制御量として次のように定義される。

$$\|G\|_\infty = \max \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (6)$$

ただし、式(6)の  $H_2$  ノルム

$$\|z\|_2^2 = \int_0^\infty z^T z dt, \quad \|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^T w dt \quad (7)$$

が、有限確定しなければならない。

このノルムは  $H_2$  ノルムから誘導されることから、しばしば誘導ノルム(induced norm)と呼ばれている。

無限時間のステップ入力はこの定義を満たさないが、応答が整定するのに十分な時間でステップ入力を打ち切れば入力の積分の2乗は有限確定することになる。

また、時間領域における  $H_\infty$  ノルムの定義は、外生信号および制御量に線形性を求めているから、非線形システムに対しても  $H_\infty$  ノルムが定義できることになる。

### 2.3 $H_\infty$ ノルムと設計仕様との関係

Fig.1とFig.2を用いて,  $H_\infty$  ノルムと設計仕様との関係を説明する. ここで,  $w_r$ : 目標値,  $w_d$ : 外乱,  $w_n$ : 観測ノイズ,  $u$ : 制御入力,  $z$ : 制御量,  $K(s)$ : 補償器,  $P(s)$ : 制御対象,  $V(s)$ : センサ,  $\Delta(s)$ : モデル化誤差である. 以降, 伝達関数の $(s)$ は省略することがある.

#### (1) 外乱抑制仕様

Fig.1のシステムを考える. 外乱抑制特性は, 外乱 $w_d$ があっても制御量 $z$ に影響を与えない仕様である. すなわち,

$$\max \frac{\|z\|_2}{\|w_d\|_2} = \left\| \frac{z}{w_d} \right\|_\infty \rightarrow 0 \quad (8)$$

#### (2) 目標値追従仕様

Fig.1のシステムを考える. 目標値追従特性は通常, 目標値 $w_r$ から制御量 $z$ までの通過特性で議論されるが, 目標値があっても誤差 $e$ が生じないという仕様も同じ意味を持つ. すなわち,

$$\max \frac{\|e\|_2}{\|w_r\|_2} = \left\| \frac{e}{w_r} \right\|_\infty \rightarrow 0 \quad (9)$$

#### (3) ロバスト安定性

Fig.2のシステムを考える. ロバスト安定性は, モデル化誤差 $\Delta(s)$ があっても閉ループ系が安定となる仕様である. (a)は加法的なモデル化誤差を持つ閉ループ系で, 変形すると(b)になる. すなわち,

$$\left\| \frac{K\Delta}{1+KP} \right\|_\infty < 1 \quad (10)$$

となれば, スモールゲインの定理<sup>(付録1)</sup>によってモデル化誤差があっても閉ループ系の安定性が保証される.

さて, ここで(a)のモデル化誤差の右端を切断し, (c)のように外乱 $w_1$ から制御量 $z_1$ を考えると,

$$\frac{z_1}{w_1} = \frac{K\Delta}{1+KP} \quad (11)$$

であるから, 結局,

$$\left\| \frac{z_1}{w_1} \right\|_\infty < 1 \quad (12)$$

を実現できれば, モデル化誤差があっても閉ループ系の安定性は保証されることになる.

通常, ロバスト安定化問題を考えるときは, モデル化誤差 $\Delta(s)$ よりもゲインの大きい重み関数 $W(s)$ , すなわち,  $\|\Delta(s)\| < \|W(s)\|$ なる重み関数を用いて,

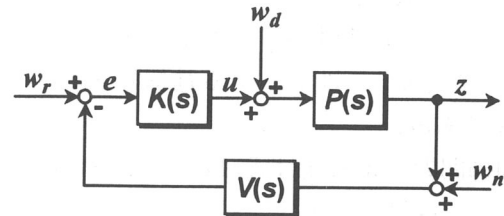
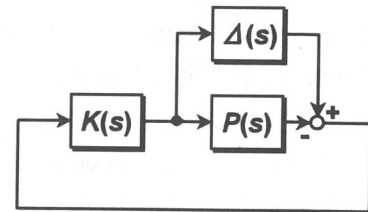
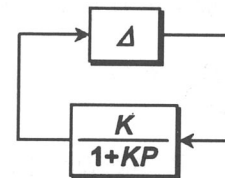


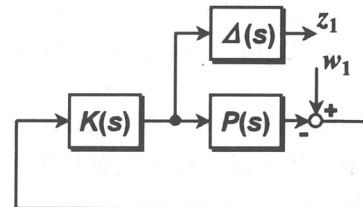
Fig. 1 基本的なフィードバックループ



(a) 加法的なモデル化誤差を持つ閉ループ系



(b) (a)の変形



(c) 外乱 $w_1$ から制御量 $z_1$ までの閉ループ系

Fig. 2 ロバスト安定性

$$\left\| \frac{KW}{1+KP} \right\|_\infty < 1 \quad (13)$$

を満たす問題へと帰着させる. これは $\Delta(s)$ は一般的に次数が高くなってしまうので, 低次の $W(s)$ に置き換えて問題を簡略化することが狙いである.

これらの仕様の他にも, 目標値に対する制御入力力量仕様:  $\|u/w_r\|$ , 検出雑音除去特性:  $\|z/w_n\|$ が $H_\infty$ ノルムを0に近づけるという定式化で設計仕様を表わすことができる.

### 3. $H_\infty$ 制御問題

$H_\infty$ 制御問題とは, 一般化制御対象 $G(s)$ および補償器 $K(s)$ とから構成される系に対して, 閉

ループ系を内部安定<sup>(付録2)</sup>化し、外生信号  $w$  から制御量  $z$  までの通過特性  $G_{zw}$  の  $H_\infty$  ノルムをある有界な値(スカラー量)  $\gamma$  以下にする補償器  $K(s)$  を求める問題である。

$H_\infty$  制御問題の定式化は式(14)となるから、

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (14)$$

2.3で示した外乱抑制仕様および目標値追従仕様は  $\gamma$  をできるだけ小さく、ロバスト安定性は  $\gamma$  を1にすることによって  $H_\infty$  制御問題の枠組みを利用して種々の制御仕様を実現できることになる。

$H_\infty$  制御問題を図にするとFig.3になる。ここで、 $w$  : 外生信号ベクトル,  $z$  : 制御量ベクトル,  $u$  : 制御入力ベクトル,  $y$  : 観測出力ベクトルである。

### 3.1 一般化制御対象

LQ問題では、状態・出力方程式は式(15)であるが、

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (15)$$

$H_\infty$  制御問題では、実際の制御問題に柔軟に対応するために  $w$  と  $u$ ,  $z$  と  $y$  を区別した式(16)が用いられる。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_{2x}(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (16)$$

ここで、 $x$  : 状態量ベクトルで、式(15)の  $A$  は制御対象、式(16)の  $A$  は一般化制御対象であることに注意しよう。

以降、ベクトルの  $(t)$  は省略する。

一般化制御対象は制御対象に比べて、次のような利点がある。

- 1) 外生信号(外乱)が考慮できる。
- 2) 制御対象ではないダイナミクスを考慮できる。

利点1)について

制御入力を  $u = -Kx$  とすると、式(15)は  $\dot{x} = (A - BK)x$  となり目標値などの外生信号を印加する余地はないが、式(16)では  $\dot{x} = (A - B_2K)x + B_1w$  となるから外生信号を印加できる。つまり、 $w$  と  $u$  とを区別したことで制御系の構造がより明確になっている。LQ問題では、もともと外生信号を考慮する必要がないので、 $w$  の概念も必要なかったと思われる。

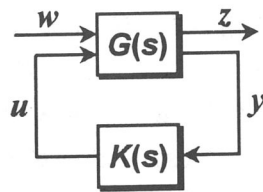


Fig. 3  $H_\infty$  制御問題

利点2)について

LQ制御理論はレギュレータ問題の解を与えるので、そのままではサーボ問題に適用することはできない。

サーボ問題を解くには、独立したI動作を考慮したLQI制御を用いる必要があり、別の制御理論を用いるという枠組みになる。 $H_\infty$  制御でレギュレータおよびサーボ問題を解く場合には制御理論を変更する必要はない。

変えるのは一般化制御対象だけで、レギュレータ問題は一般化制御対象に制御対象をそのまま用いればよく、サーボ問題の場合は、制御対象に積分器を加えたものを一般化制御対象にすればよい。

### 3.2 $H_\infty$ 制御問題の解法

$H_\infty$  制御問題を解くにあたり、最もよく知られたDGKF法<sup>3)</sup>を紹介する。その手順は次のようになる。

#### Step 1 一般化制御対象の定義

一般化制御対象を式(17)の形で定義する。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y = C_{2x} + D_{21}w + D_{22}u \end{cases} \quad (17)$$

DGKF法では一般化制御対象は以下の条件を満たしてなければならない。

- (1)  $(A, B_1)$  可安定<sup>(付録3)</sup>かつ  $(C_1, A)$  可検出<sup>(付録4)</sup>
- (2)  $(A, B_2)$  可安定かつ  $(C_2, A)$  可検出
- (3)  $D_{12}^T C_1 = B_1 D_{21}^T = 0$ ,  $D_{12}^T D_{12} = D_{21} D_{21}^T = I$
- (4)  $D_{11} = 0$  かつ  $D_{22} = 0$

ここで、条件(1), (2)は  $G_{zw}$  の内部安定化のために必要な仮定。条件(3)は直交条件および正規化条件。条件(4)は一般化制御対象をプロパ<sup>(付録5)</sup>とする仮定である。

## Step 2 Riccati代数方程式を解く

一般化制御対象について、次の二つのRiccati代数方程式を解く。

$$A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (18)$$

$$A Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (19)$$

二つのRiccati代数方程式の解の中から、次の条件を満たすものを選ぶ。

$$(1) X = X^T \geq 0$$

$$(2) Y = Y^T \geq 0$$

$$(3) \rho(XY) < \gamma^2$$

注)  $X = X^T \geq 0$ の意味;

実対称マトリクス $X$ が準正定であることを意味する。すべての $x$ に対して二次形式 $x^T A x \geq 0$ であるとき $A$ は準正定であるという。 $A$ が準正定であるための必要十分条件は $A$ のすべての固有値が非負である。このことは次のように証明する。

(証明)

マトリクス $A$ の固有ベクトルを $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ としたとき、マトリクス $T$ は次のように与える。

$$T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

また、 $A$ の固有値を $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ とすると

$$A v_i = \lambda_i v_i \quad (20)$$

となる。この両辺に $v_j^T (j = 1, 2, \dots, n)$ をかけると

$$v_j^T A v_i = v_j^T \lambda_i v_i \quad (21)$$

ここで、 $A$ は対称マトリクスであるために $v_j^T A$ は次のようになる。

$$v_j^T A = (A v_j)^T = \lambda_j v_j^T \quad (22)$$

式(22)を式(21)に代入する。

$$\begin{aligned} \lambda_j v_j^T v_i &= v_j^T \lambda_i v_i \\ (\lambda_j - \lambda_i) v_j^T v_i &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

よって、 $v_j^T v_i = 0$ より $v_i$ と $v_j$ は直交している。また、式(20)は同次方程式であるから $|v_i| = 1$ に規格化できる。

したがって、

$$T^T T = I$$

$$T^T = T^{-1} \text{ (直交マトリクス)} \quad (24)$$

となる。

これより、二次形式 $x^T A x$ を $x = Tz$ と変換すると

$$\begin{aligned} x^T A x &= z^T T^T A T z \\ &= z^T T^T T \Lambda z \\ &= z^T \Lambda z \end{aligned} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

となる。したがって $A$ が準正定であるときの二次形式は次のようになる。

$$x^T A x = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 \geq 0 \quad (26)$$

これより固有値 $\lambda_i \geq 0$ となる。

ここで、 $\rho(XY)$ は行列 $XY$ のスペクトル半径(固有値の絶対値の最大値)を表わす。式(18)はフィードバックゲイン $X$ を、式(19)はオブザーバゲイン $Y$ を求める式である。条件を満たすRiccati解がない場合は、 $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$ を満たす補償器が存在しないことを意味する。

Step 3  $H_\infty$ 補償器を構成する

条件を満たすRiccati解を用いて、 $H_\infty$ 補償器は次のように構成される。

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad (27)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + Z L C_2, \hat{B} = -Z L \\ \hat{C} &= F = -B_2^T X, L = -Y C_2^T, Z = (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

である。

3.3  $H_\infty$ 補償器の構造

一般化制御対象のシステムマトリクスを $A$ とすると、補償器のシステムマトリクス $\hat{A}$ は

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X - B_2 B_2^T X - Z Y C_2^T C_2 \quad (29)$$

となる。

式(17)の一般化制御対象に対して、次の一般的なオブザーバをつくる。

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} y \quad (30)$$

制御則はオブザーバの状態を用いて

$$u = \hat{C} \hat{x} \quad (31)$$

となる。

よって、式(30)と式(31)より

$$s \hat{I} \hat{x} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} y \quad (32)$$

$$\hat{x} = (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} y \quad (33)$$

$$u = \hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} y \quad (34)$$

となる。

## 4 例題

次の制御対象に対して $H_\infty$ 補償器を設計する。

(制御対象)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (35)$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

ここで、 $a_1 = 0.4$ 、 $a_2 = 1$ とする。

## 1) 一般化制御対象の定義

一般化制御対象を次のように定義する。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (37)$$

式(34), (35)を式(36)の一般化制御対象へ適用すると次のようになる.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ z_u \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ w_n \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix} \quad (38)$$

この一般化制御対象をFig.4の状態線図で表す.

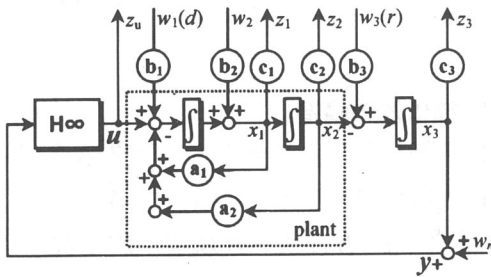


Fig. 4 一般化制御対象

ここで,  $x_1 \sim x_3$ :状態量,  $z_u$ :制御量(操作量),  $z_1, z_3$ :制御量,  $z_2$ :制御量(出力を制御量と見たもの),  $y$ :観測量,  $w_n$ :観測ノイズ,  $w_1$ :状態外乱(外乱),  $w_2$ :状態外乱,  $w_3$ :状態外乱(目標値)とする.  $b_1 \sim b_3, c_1 \sim c_3$ は, それぞれの重み係数であり, 全て1とした. また, 目標値, 外乱入力に対する定常偏差をなくすために積分器を付加する.

## 2) 前提条件

$H_\infty$  補償器を設計するにあたり, 一般化制御対象が前提条件を満たしていることを確認する.

(1)  $(A, B_1)$  が可安定かつ  $(C_1, A)$  可検出

Fig.4より  $(A, B_1)$  は, 可制御であるため可安定.

$(C_1, A)$  は, 可観測であるため可検出.

(2)  $(A, B_2)$  が可安定かつ  $(C_2, A)$  可検出

Fig.4より  $(A, B_2)$  は, 可制御であるため可安定.

$(C_2, A)$  は, 可観測であるため可検出.

(3)

$$D_{12}^T C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$B_1 D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_{12}^T D_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$D_{21} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$(4) \quad D_{11} = 0, D_{22} = 0$$

(1)~(4)より条件を満たしている.

## 3) Riccati代数方程式を解く

式(37)で定義した一般化制御対象に対して, 式(18), (19)のRiccati代数方程式を解く. ここで,  $\gamma$ は任意に決めるため,  $\gamma = 30$ とした.

$$X = \begin{bmatrix} 1.6242 & 1.4656 & -1.0062 \\ 1.4656 & 3.5740 & -2.0289 \\ -1.0062 & -2.0289 & 2.4656 \end{bmatrix}$$

$X$  の固有値

$$\lambda_1 = 5.8664 \quad \lambda_2 = 0.8142 \quad \lambda_3 = 0.9832$$

固有値が全て正のため,  $X$  は正定解である.

$$Y = \begin{bmatrix} 1.3616 & -0.1622 & 0.4873 \\ -0.1622 & 1.8273 & -0.8247 \\ 0.4873 & -0.8247 & 1.6289 \end{bmatrix}$$

$Y$  の固有値

$$\lambda_1 = 1.3459 \quad \lambda_2 = 2.7095 \quad \lambda_3 = 0.7625$$

固有値が全て正のため,  $Y$  は正定解である.

以上より

$$(1) \quad X = X^T \geq 0$$

$$(2) \quad Y = Y^T \geq 0$$

$$(3) \quad \rho(XY) < \gamma^2$$

の条件を満たしている.

## 4) $H_\infty$ 補償器の構成

Riccati代数方程式の解  $X, Y$  を用いて  $H_\infty$  補償器を構成する.

式(20), (21)より  $H_\infty$  補償器は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2.0224 & -2.4639 & 0.5171 \\ 1.0016 & 0.0040 & 0.8383 \\ -0.0011 & -1.0023 & -1.6397 \end{bmatrix}$$



$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.4880 \\ -0.8405 \\ 1.6424 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [-1.6242 \quad -1.4656 \quad 1.0062]$$

### 5) ステップ入力に対する応答

構成された $H_\infty$ 補償器を用いてに単位ステップ入力を印加した際の $z_2$ の出力をFig.5に示す.

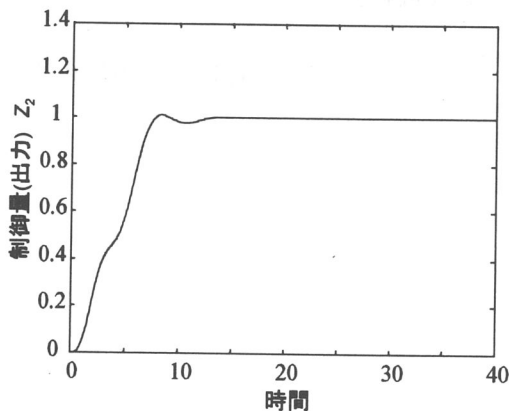


Fig. 5 ステップ応答

### 5 おわりに

本稿では、 $H_\infty$ 制御理論の基礎として $H_\infty$ ノルムおよび $H_\infty$ ノルムと設計仕様との関係を解説し、 $H_\infty$ 補償器の代表的な設計法であるDGKF法を示した。また、理解を深めるために2次系の例題を付加した。

#### 参考文献

- 1) M. Kasahara et. Al: Design and Tuning of Robust PID Controller for HVAC systems, ASHRAE Transactions, Vol 105, Part 2, (1999) 154/166
- 2) 杉江俊治: 状態空間法による $H_\infty$ 制御と制御系設計, 第41回システム制御情報講習会「 $H_\infty$ 制御の基礎」, システム制御情報学会編, (1992) 49/71
- 3) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 34, No. 8, (1989) 831/847
- 4) 藤井隆雄訳: フィードバック制御の理論, コロナ社, (1996) 43/46
- 5) 美多勉:  $H_\infty$ 制御, 昭晃堂, (1994) 182/183
- 6) 早勢実:  $H_\infty$ 制御入門, オーム社, (1996)

### 付録1 スモールゲインの定理

プロパな伝達関数かつ安定な実有理関数の集合を $RH_\infty$ とする。安定な二つの系 $G(s), H(s) \in RH_\infty$ からなる閉ループ系 $u = Gy, y = Hu$ を考える。このとき、 $\|G(s)\| \|H(s)\|_\infty < 1, \forall \omega$  (39) が成り立つならば、この閉ループ系は安定である。

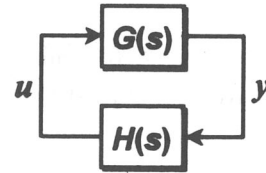


Fig. 6 スモールゲインの定理

### 付録2 内部安定<sup>4)</sup>

Fig.7でフィードバック系の3つの構成要素、つまり補償器 $K(s)$ 、制御対象 $P(s)$ 、センサ $V(s)$ は線形であるとする、

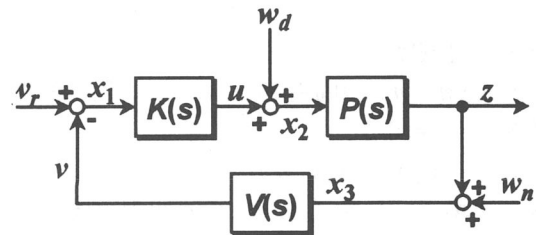


Fig. 7 基本的なフィードバックループ

$$\left. \begin{aligned} z &= P(w_d + u) \\ v &= V(z + w_n) \\ u &= K(w_r - v) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

が得られる。3つの外部入力 $r, d, n$ からすべての内部信号および3つの加え合せ点の出力 $x_1, x_2, x_3$ までの伝達関数を求める。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= w_r - Vx_3 \\ x_2 &= w_d + Kx_1 \\ x_3 &= w_n + Px_2 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

式(41)よりマトリクス表示を用いると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & V \\ -K & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_r \\ w_d \\ w_n \end{bmatrix} \quad (42)$$

と書ける。このとき、9個の伝達関数は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & V \\ -K & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_r \\ w_d \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1+KP V} \begin{bmatrix} 1 & -PV & -V \\ K & 1 & -KV \\ KP & P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r \\ w_d \\ w_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

(43)式の9個の伝達関数が安定ならば、フィードバック系は内部安定(internally stable)であるという。内部安定は、例えば $r$ から $y$ への伝達関数のみを考えるだけでは十分ではないということを規定している。伝達関数が安定であり、したがって $r$ が有界のとき $y$ も有界であるにもかかわらず、内部信号が非有界になり、物理系の内部に損傷を与える可能性を戒めている。

【定理1】 フィードバック系が内部安定であるための必要十分条件は、 $\operatorname{Re} s \geq 0$ に閉ループ極が存在しないことである。

【定理2】 フィードバック系が内部安定である必要十分条件は、以下の2つの条件を満足することである。

- 1) 伝達関数  $1+KPV$  は、 $\operatorname{Re} s \geq 0$ に零点をもたない。
- 2) 一巡伝達関数  $KPV$  において、 $\operatorname{Re} s \geq 0$ に極零相殺がない。

### 付録3 可安定<sup>5)</sup>

行列  $A(n \times n)$  の固有値  $\lambda_i$  に対して、左側固有ベクトル  $u_i \neq 0$  が

$$u_i A = \lambda_i u_i, u_i B = 0$$

を満たす場合、 $\lambda_i$  を  $(A, B)$  の不可制御極という。

また、 $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I, B) = n$

が成り立つとき、 $\lambda_i$  を  $(A, B)$  の可制御極という。

すべての  $\lambda_i$  が可制御極であるとき、 $(A, B)$  を可制御と言い、不可制御極があってもこの不可制御極が安定であるとき、 $(A, B)$  を可安定という。可制御であれば可安定である。

### 付録4 可検出<sup>5)</sup>

行列  $A(n \times n)$  の固有値  $\lambda_i$  に対して、固有ベクトル  $v_i \neq 0$  が

$$A v_i = \lambda_i v_i, C v_i = 0$$

を満たす場合、 $\lambda_i$  を  $(A, C)$  の不可観測極という。

また、 $\operatorname{rank}(A^T - \lambda_i I, C^T) = n$

が成り立つとき、 $\lambda_i$  を  $(A, C)$  の可観測極という。

すべての  $\lambda_i$  が可観測極であるとき、 $(A, C)$  を可観測といい、不可観測極があってもこの不可観測極が安定であるとき、 $(A, C)$  を可検出という。

### 付録5 プロパ<sup>4)</sup>

$G(s)$  がプロパ(proper)であるとは  $G(j\infty)$  が有限であること、厳密にプロパ(strictly proper)であるとは  $G(j\infty) = 0$  となることを言う。伝達関数の分母の次数を  $n$ 、分子の次数を  $m$  とすれば、

$n \geq m$  ならばプロパ、 $n > m$  ならば厳密にプロパである。

【例】 PIDコントローラは

$$K(s) = k_c + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (44)$$

の形で、プロパではないが、プロパなコントローラ

$$K(s) = k_c + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{\tau s + 1} \quad (45)$$

で希望の周波数範囲で近似している。

「受理年月日 2000年9月28日」