小山工業高等専門学校研究紀要
第 34 号 (2002) 167 − 176

不静定トラスの反力と部材応力の解法に関する研究

山本　嘉孝

A Study of Consideration of Solution to Reaction and Stress for Statically Indeterminate Truss

Yoshitaka YAMAMOTO

1．はじめに

不静定トラスを解く場合、一般にクレモナによる図式解法、釣り合い式を利用した節点法等がある。支持点にローラーを持つトラスの節点間の変位適合条件を求める方法は種々あるが、線形力学として解くときは一般に直角変位図あるいは、本研究室が提案した(1-1)式の節点変位式等で解析できる。これらの点を考慮すると平面トラスがローラー支持を持つ場合、その反力を仮想仕事法で解こうとすると節点間の変位適合条件の解を得る必要があることが分かる。

$$\Sigma(\vec{U}_{mn}+\vec{V}_{mn})=0 \qquad (1\text{-}1)$$

2．仮架構

不静定トラスの反力を仮想仕事法で解く場合、まずG点をx方向とy方向のローラーに置き換える。ローラーの移動距離により反力の仕事量が算定される。この項は外力の仕事量の解析目的だから、それには外力が作用している節点の変位を求めることとなる。与えられた平面トラスをあたかも図1の上弦にあたるA-B-C-D-E-F-Gの仮の架構として考えても不都合が生じない。

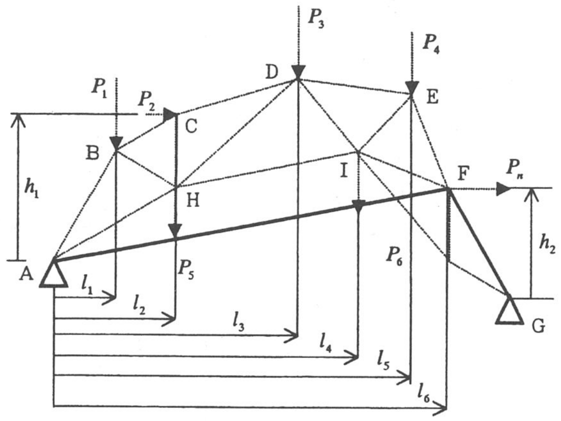

図1　仮想架構

仮架構が設定されれば、次に図1に示すように独立部材角A-Fを仮材として扱う。この扱い方はA点から算定して最後の外力が作用している点（F点）を結ぶことになる。そこでF-G材と仮伸材X-G（後述）の二材を従属部材角として変位適合条件を求めればよい。

3．外力の仕事量に対する別解

まず仮架構から独立部材角一個と従属部材角一個を選ぶ。従属部材角はローラー支持点Gに仮伸材X-Gを挿入し、この崩壊荷重から反力を求める。全ての外力が重複しないで網羅された幾つかの架構からそれぞれの反力が算定されたなら、それらの全ての反力を加えれば節点Gの反力が得られる。

まず独立部材角をA-B材、従属部材角をB-C材に選びC点とG点を結んだC-G材は部材角をゼロとする。そして残りの従属部材角を仮伸材X-Gに選ぶ。残りの部材C-D材、D-E材、E-G材、F-G材の部材角は勿論ゼロとする。これから外力P_1とP_2に対する一個の崩壊機構を解けば反力が得られる。次に独立部材角をC-D材、従属部材角をD-E材に選び残りの部材角は全てゼロにして、仮伸材X-Gを従属部材角として解く。これから外力P_3とP_4に対する一個の崩壊機構を解けば反力が得られる。独立部材角をE-F材、従属部材角をF-G材に選び残りの部材角は全てゼロにして、仮伸材X-Gを従属部材角として解く。これから外力P_nに対する一個の崩壊機構を解けば反力が得られる。外力P_5、P_6についてもA-H-I-Gの架構と仮材X-Gを考えて同様に解くことができる。以上の複数個の崩壊機構から求まった反力の合計が求める解である。

4．仮伸材の設定

節点間の変位適合条件を求める場合、その構造

物を構成している部材数に関係なく独立部材角を一材、従属部材角を二材選ぶ。この関係を持った図2、図3の構造物に対してローラー支持による移動、あるいは部材の伸びによるδ（$l * \varepsilon$でも良い）に対応して仮伸（縮）材X-Dを挿入するが、この仮伸材の挿入は新しい考えである。但しこのX-D材は伸度ベクトル（伸び、縮み）を有するが回転ベクトルは有しないとする。勿論回転ベクトルを伴うような構造物を解析する場合には、それを有するとして解くことができる。

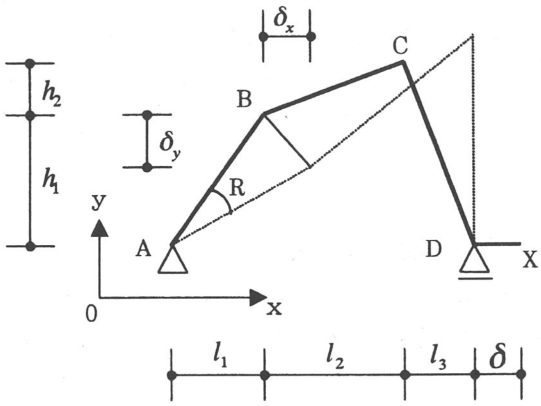

図2　x方向仮材

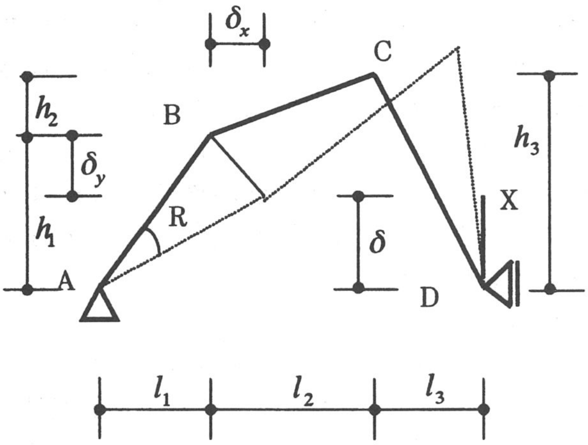

図3　y方向仮材

構造物は終端をD点とする閉鎖形(A-B-C-X-D)で構成され、部材の原形(A-B-C-D)が伸度ベクトル、回転ベクトルを求めるときの位置座標の基になる。言い換えると各部材の位置ベクトルを決めるとき、それは変形前の部材の座標を使うことになる。

また各部材の回転角や部材の伸びについては、図2、図3の実線（$A-B'$材、$B-C'$材、$C''-D$材）で示すようにお互いが独立して変形・変位するとしても良いとしている。このことを考慮して、仮伸材X-Dが伸び（縮み）た状態のδ（$l * \varepsilon$でも良い）を持つ材としてC-D材の材端D点側に接続させる。仮伸材X-Dの位置ベクトルの扱いについて説明すると、一般的に構造解析を線形として捉えるときは、部材の回転と伸び（縮み）はそれぞれが独立して変位、変形を伴うものであるとしている。

これに従うならば図2、図3における仮伸材は勝手に正の方向のX点に伸びたとすることは可能である。それで伸び終えたX点からδを延長して終端D点へ向かう方向が仮材の位置ベクトルとなると考えた。(1-1）式の節点変位式は各部材の一端（通常は左端に近い節点）を原点とした相対座標がその部材の位置ベクトルであるとしている。これを踏まえて仮材の位置ベクトルを算定すると、長さがδでX点から終端D点に向かうことになるから次式のようになる。仮伸材X-Dは始端X点、終端D点であるから、変形・変位適合条件を求める場合の位置ベクトルはX点からD点に向かって算定するから逆符号（マイナス）となる。よって(4-1)式は仮伸材X-Dの伸度ベクトルの値である。

X、Y方向にローラーがある場合はそれぞれ

$$\vec{U}_{XD} = -\delta_x \vec{I}$$

$$\vec{U}_{XD} = -\delta_y \vec{J} \qquad (4\text{-}1)$$

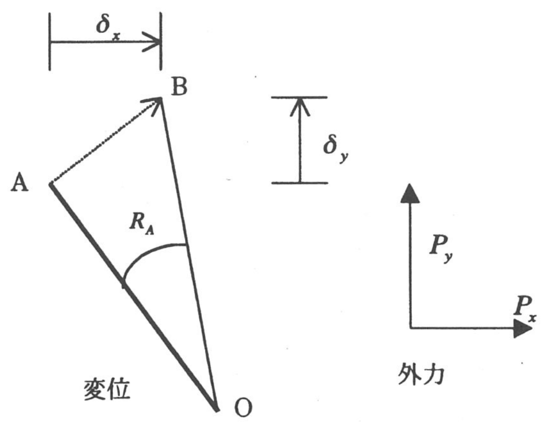

図4　変位と力の正負

となる。これらの仮伸材の仮定、挿入位置及び位置ベクトルの正負の設定法が本章における不静定

トラスの反力を求める解法の要点となる。図4に節点の変位方向と外力の正の方向を示しておく。に近い材の回転角をゼロと置き、独立部材角一材と仮材を含む二材の独立部材角を選ぶ。

5．仮伸材の新提案

不静定トラスの反力を求める場合はそれぞれの機構において外力の仕事量と内力の仕事量を等価として仮想仕事の原理を用いて解析する。その機構は節点の適合条件の整合性だけを満足すれば良いわけで無数の機構が考えられる。但し仮伸材(X-D)は未知とするか、既知とするかにかかわらず従属部材角に選ぶ必要がある。

一般の構造物における各節点の変位適合条件を求める場合はX-D材を仮伸材と考えないで三材を持つ機構として解いてきた。しかし本章では仮伸材の考えや、挿入の仕方、その方向性を考慮した後は、構造物の一材を独立部材角に選び残った二材を従属部材角として解けばよいと考えた。

以上から不静定トラスの反力を求める場合の解法手順を次のように提案する。

提案1

(i) 一端のピン支持をX方向とY方向のローラー支持にする。

(ii) 一材（A－B材等）を独立部材角に選ぶ。

(iii) X方向（Y方向）のδ（仮伸材X-D）を従属部材角に選ぶ。

(iv) X方向（Y方向）のδと平行でない材（C-D材）を従属部材角に選ぶ。

(v) X方向（Y方向）のδと平行あるいは平行あるいは第三項以下を次のように考えても良い。

提案2

(i) B-C材とC-D材を従属部材角とする

(ii) δ（仮伸材X-D）に任意の変位を与えて伸度ベクトルを求める。

(iii) このときの未知数はω_{BC}、ω_{CD}となり通常の解法で解く.

6．不静定トラスの反力

図5のトラスを本解法により解く。このトラスの構成部材と外力の作用条件から、あたかもA-B材、B-C材、C-D材と仮伸材X-Dからなる異形ラーメンのような架構が想定され、これを基にして仮想仕事法により反力V_DとH_Dを求める。

まず反力V_Dを求める場合は図6のようにD点を垂直方向のローラー支持とする。節点Dの垂直変位δ_yに対する伸度ベクトルの扱いは(4-1)式より

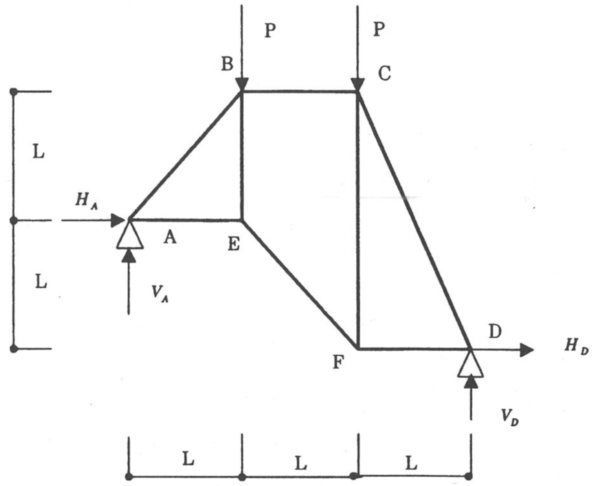

図5不静定トラス

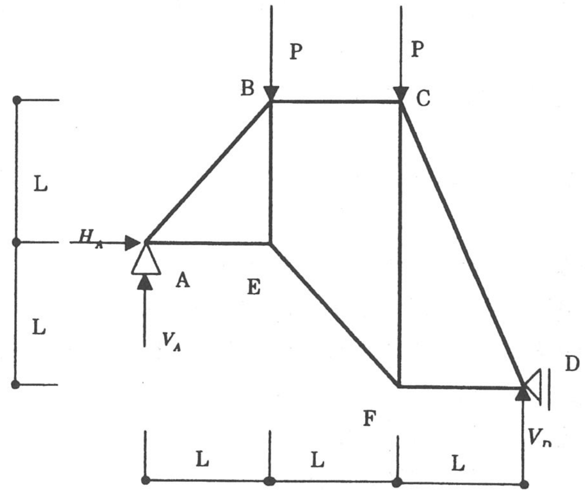

図6　y方向仮材

$$\vec{U}_{XD} = -\delta_y \vec{J} \tag{6-1}$$

となる。他の材の回転ベクトルは

$$\vec{V}_{AB} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & -1 \\ l & l & 0 \end{vmatrix} = -l\vec{J} + l\vec{I} \tag{6-2}$$

$$\vec{V}_{BC} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix} = l\omega_{BC}\vec{J} \tag{6-3}$$

$$V_{CD}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ 0 & 0 & \omega_{CD}\\ l & -2l & 0\end{vmatrix}=l\omega_{CD}\vec{J}+2l\omega_{CD}\vec{I} \qquad (6\text{-}4)$$

これらの式を節点変位式に代入すると

$$(l+2l\omega_{CD})\vec{I}+(-\delta_y-l+l\omega_{BC}+l\omega_{CD})\vec{J}=0 \qquad (6\text{-}5)$$

上式は恒等式であるから

$l+2l\omega_{CD}=0$

$-\delta_y-l+l\omega_{BC}+l\omega_{CD}=0$

が成り立つ。ここで　$\omega_{BC}=0$　のとき、この式を解くと

$\omega_{CD}=-1/2$、$\delta_y=-3l/2$　となる。構造力学の部材角で表すと

$\varphi_{CD}=+1/2$、$\delta_y=-3l/2$　である。

ここでＢ点、Ｃ点及びＤ点の垂直変位はそれぞれ

$\delta_B=l$、$\delta_C=-l$、$\delta_D=-3l/2$

が導かれる。そうすると外力の仕事量は、

$$W_e=-P\times(-l)+(-P)\times(-l) \qquad (6\text{-}6)$$

反力 V_D のなす仕事量は

$$W_i=+V_D\times(-3l/2) \qquad (6\text{-}7)$$

となり、仮想仕事の原理を用いて

$W=W_e+W_i=2Pl-V_D\times 3l/2=0$

であるから、これを解くと　$V_D=4P/3$　となる。

また、垂直方向のつり合いから

$\Sigma Y=V_A+V_D=2P$　となり、これを解くと

$V_A=2P/3$　が導かれる。

次に反力 H_D を求める場合は図７のようにＤ点を水平ローラー支持とする。

節点Ｄの水平変位 δ_x に対する伸度ベクトルの扱いは (4-1)式より

$$\vec{U}_{XD}=-\delta_x\vec{I} \qquad (6\text{-}8)$$

となる。他の材の回転ベクトルは (5-2) 式、(5-3) 式および (5-4) 式と同じであるから、これらの式を節点変位式に代入すると

$$(-\delta_x+l+2l\omega_{CD})\vec{I}+(-l+l\omega_{BC}+l\omega_{CD})\vec{J}=0 \qquad (6\text{-}9)$$

上式は恒等式であるから

$-\delta_x+l+2l\omega_{CD}=0$

$-l+l\omega_{BC}+l\omega_{CD}=0$

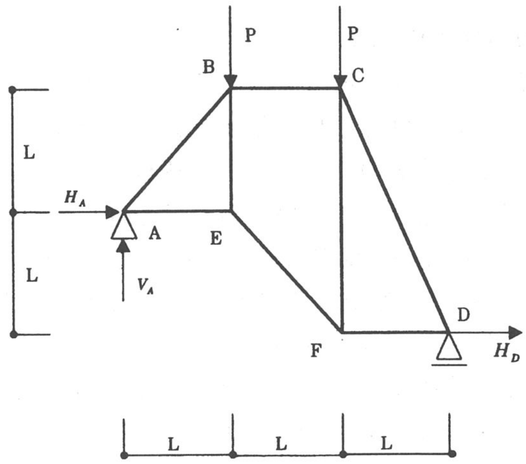

図７　x 方向仮材

ここで　$\omega_{CD}=0$　のとき、この式を解くと

$\omega_{BC}=1$、$\delta_x=+1$ となる。構造力学の部材角で表すと

$\varphi_{BC}=-1$、$\delta_x=+1$

となる。ここでＢ点とＣ点の垂直変位とＤ点の水平変位はそれぞれ

$\delta_B=-l$、$\delta_C=-l+l=0$、$\delta_D=+l$

導かれる。そうすると外力の仕事量は、

$$W_e=-P\times(-l) \qquad (6\text{-}11)$$

反力 H_D のなす仕事量は

$$W_i=+H_Dl \qquad (6\text{-}12)$$

となり、仮想仕事の原理を用いて

$W=W_e+W_i=Pl+H_Dl=0$

であるから、これを解くと　$H_D=-P$　となる。

また水平方向の釣り合いから

$\Sigma X=H_A+H_D=0$　となり、これを解くと

$H_A=P$　となる。

７．平面架構における部材応力の新解法

前章では不静定トラスにおける反力を節点変位式で解いた。本章では部材応力を節点変位式と仮想仕事の原理を使って解く新しい解法を試みた。架構を仮想変位させて外力のなす仕事量を算定す

るとき、作用点の絶対変位を知る必要がある。それで図8を参照して絶対変位を解く方法を示しておく。

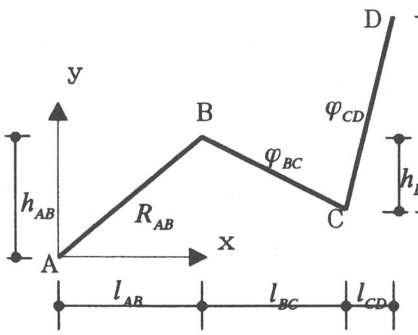

図8　架構上の点の絶対変位

設定された架構は部材数が三材（A-B-C-D）で構成されている。それでA-B材の部材角をR_{AB}とした場合B-C材、C-D材の部材角をφ_{BC}、φ_{CD}とする。一般的に直角変位図や節点変位式等により求める部材角、伸度は相対変位で表されている。これを絶対変位に変換する方法を示しておく。これらの節点の変位を

${}_B\delta_X$ ：B点のX方向の相対変位
${}_B\delta_Y$ ：B点のY方向の相対変位
${}_C\delta_X$ ：C点のX方向の相対変位
${}_C\delta_Y$ ：C点のY方向の相対変位
${}_D\delta_X$ ：D点のX方向の相対変位
${}_D\delta_Y$ ：D点のY方向の相対変位

として、B点、C点そしてD点のX、Y方向の相対変位を求めると、次式のようになる。

$$
\begin{aligned}
{}_B\delta_X &= h_{AB}\times R_{AB}\\
{}_B\delta_Y &= l_{AB}\times R_{AB}
\end{aligned}
\tag{7-1}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_C\delta_X &= h_{BC}\times \varphi_{BC}\\
{}_C\delta_Y &= l_{BC}\times \varphi_{BC}
\end{aligned}
\tag{7-2}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_D\delta_X &= h_{CD}\times \varphi_{CD}\\
{}_D\delta_Y &= l_{CD}\times \varphi_{CD}
\end{aligned}
\tag{7-3}
$$

ただし、通常の架構においてD点は何らかの方法で支持されている。そのときD点の自由度は拘束されているからC-D材上にある点（C点やF点）の変位はD点を基点としてから算出してよい。このことを踏まえてC点とD点の絶対変位を求めると、各部材角による相対変位を始点（A点）に向かって各節点の相対変位を合計した値となる。

$$
\begin{aligned}
C_X &= {}_B\delta_X + {}_C\delta_X\\
C_Y &= {}_B\delta_Y + {}_C\delta_Y
\end{aligned}
\tag{7-4}
$$

$$
\begin{aligned}
D_X &= {}_B\delta_X + {}_C\delta_X + {}_D\delta_X\\
D_Y &= {}_B\delta_Y + {}_C\delta_Y + {}_D\delta_Y
\end{aligned}
\tag{7-5}
$$

つまり各節点の絶対変位を求める場合は自身の相対変位と、それより独立部材角に近い部材の相対変位を加えれば算定できる。部材の中程に荷重が作用している場合も、作用している部材の部材角と作用点までのX、Y方向の距離によりその点の相対変位が求められる。

図9のキングポスト・トラスの部材応力を仮想仕事の原理と節点変位式を適用して算出を試みる。E-C材の部材応力(X)を求めるのだが、そのとき外力が作用している点の仮想変位の算定に節点変位式に適用する。

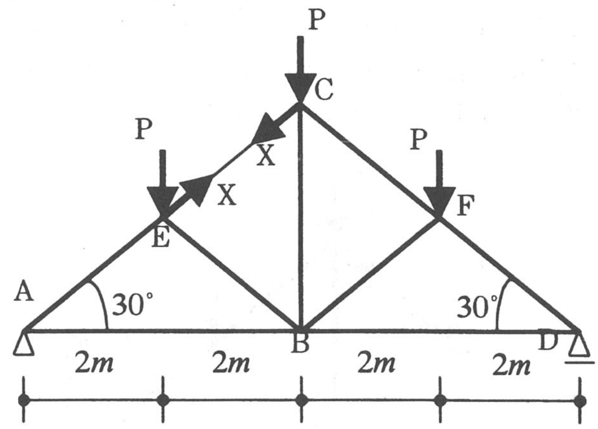

図9　キングポストトラス

そこで外部仕事量を算定するための絶対節点変位（E点、C点、F点）と内部仕事量を算定するための絶対節点変位（E点、C点）を解く必要がある。与えられた架構から各節点の相対変位を節点変位式により算定する。さらに節点変位式を変位の解明に適用するには図13のように、A-B材、B-C材、C-D材と仮伸材のY-D材を有する架構にモデル化する。

そのモデル化の手法・手順の要点を記すと、

（i）　部分的な架構であるA-B-Eは三角形で構成されているから剛体と考えられる。ゆえにE点の節点変位はA-B材に従属することになる。

(ⅱ)　C点の節点変位はB点のそれに対して拘束されないから、E-C材を切り離して自由度を持たせる。

(ⅲ)　同様にD点の節点変位はB点のそれに対して拘束されないから、部分的な架構であるB-D-FをB点で切り離して自由度を与えても相対変位の算出には支障はない。

(ⅳ)　F点については、仮想変位を算定するときC-D材の中程に作用していると考えても支障はない。つまりF点のヒンジのところを、C-D材を一個の部材としても良いということである。この手法は仮想仕事の原理を使って構造物を解析する場合によく用いられる。

(ⅴ)　D点が水平方向自由のローラー支持であるから、2章で述べたようにC-D材のD端に仮伸材Y-Dを挿入する。

(ⅵ)　独立部材角をA-Bとし従属部材角をB-C材とC-D材に選び、残りの従属部材角である仮伸材Y-Dを$\delta=0$とする。この場合に仮伸材Y-Dを挿入しながらゼロとすることは無意味のように受けとれる。しかし仮伸材を利用しない場合でもローラーで支持された架構で節店の変位適合条件を求める場合には、仮伸材を始めに挿入する方法が妥当である。

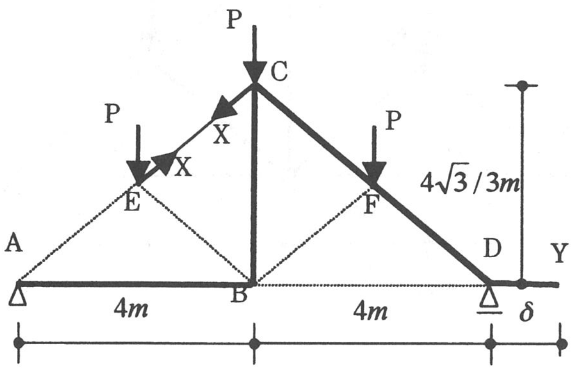

図10　置換トラス

上記の条件を基に各部材毎に節点変位式を立てる。

$$\vec{V}_{AB}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ 0 & 0 & \omega_{AB}\\ 4 & 0 & 0\end{vmatrix}=4\omega_{AB}\vec{J} \qquad (7\text{-}6)$$

$$\vec{V}_{BC}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ 0 & 0 & \omega_{BC}\\ 0 & 4\sqrt{3}/3 & 0\end{vmatrix}=-4\sqrt{3}/3\omega_{BC}\vec{I} \qquad (7\text{-}7)$$

$$\vec{V}_{CD}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ 0 & 0 & \omega_{CD}\\ 4 & -4\sqrt{3}/3 & 0\end{vmatrix}=4\omega_{CD}\vec{J}+4\sqrt{3}/3\omega_{CD}\vec{I} \qquad (7\text{-}8)$$

となる。これらの式を節点変位式(1-1)式に代入し各単位ベクトル別に整理すると

$$(-4\sqrt{3}/3\omega_{BC}+4\sqrt{3}/3\omega_{CD})\vec{I}+(4\omega_{AB}+4\omega_{CD})\vec{J}=0 \qquad (7\text{-}9)$$

が得られる。また上式は恒等式であるから

$-4\sqrt{3}/3\omega_{BC}+4\sqrt{3}/3\omega_{CD}=0$

$+4\omega_{AB}+4\omega_{CD}=0$

となり、ここで　$\omega_{AB}=-1(R_{AB}=1)$　として上式を解くと

$\omega_{BC}=+1$、$\omega_{CD}=+1$

が求まる。構造力学の部材角で表現すると

$R_{AB}=1$のとき　$\varphi_{BC}=-1$、$\varphi_{CD}=-1$

が導かれる。次にE点、C点そしてF点のX,Y方向の絶対変位を(7-1)式、(7-2)式と(7-3)式から求める。まず各点の相対変位を求めるが、E点の回転角は$R_{AB}=1$で、A点からX方向への長さは$2m$、Y方向への長さは$2\sqrt{3}/3m$である。これから相対変位を求めると

${}_E\delta_x=2\sqrt{3}/3\times1$　　　${}_E\delta_y=-2\times1$

となる。また、$R_{AB}=1$に対するB点のX方向とY方向の変位は

${}_B\delta_x=0$　　　${}_B\delta_y=-4\times1$

である。C点のそれは

${}_C\delta_x=4\sqrt{3}/3\times(-1)$　　　${}_C\delta_y=0$

となり、最後のF点の相対変位は

${}_F\delta_x=2\sqrt{3}/3\times(-1)$　　　${}_F\delta_y=2\times(-1)$

で、各節点の相対変位が導かれる。

次にE点、C点とF点におけるX,Y方向の絶対変位を(7-4)式と(7-5)式を参照して求めると

$E_x={}_E\delta_x=2\sqrt{3}/3$

$E_y={}_E\delta_y=-2$

$C_x={}_B\delta_x+{}_C\delta_x=0+(-4\sqrt{3}/3)=-4\sqrt{3}/3$

$C_y={}_B\delta_y+{}_C\delta_y=-4+0=-4$

$F_x={}_F\delta_x=-2\sqrt{3}/3$

$F_y={}_F\delta_y=-2$

のように導かれる。

上式より外力のなす仕事量をW_e、内力のなす仕事量をW_iとしてこれを求めると

$W_e = (-P)\times(-2)+(-P)\times(-4)+(-P)\times(-2) = -8P$

$W_i = \sqrt{3}X/2E_x\times(X/2)\times E_y+(-\sqrt{3}X/2)\times C_x$
$+(X/2)\times C_y = +4X$

となる。一般に、外力のなす仕事量 W_e と内力のなす仕事量 W_i は $\sum(W_e+W_i)=0$ の関係にあるから

$$X = -2P$$

の部材応力が導かれ、このXの値がE-C材の部材力である。つまりE-Cの部材力は圧縮応力となる。

8. 斜材のついた門型トラス

図11のトラスについてE-F材の部材応力を仮想仕事の原理で求める。部材応力(X)を求めるために、各節点の仮想変位に節点変位式を適用して解析してみる。

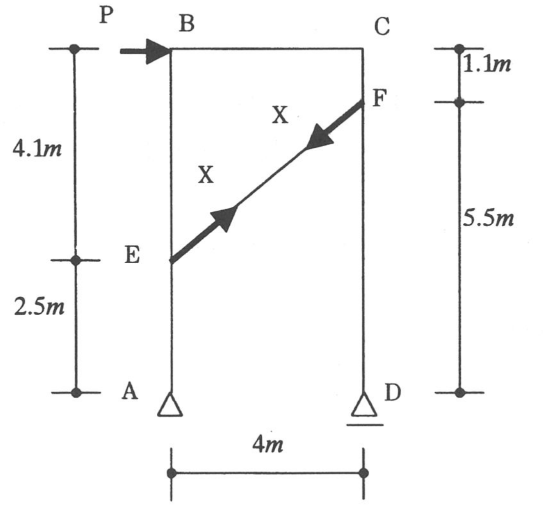

図11　異形トラス

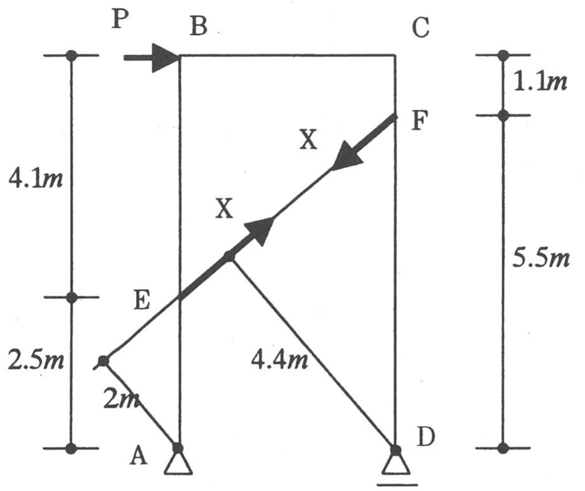

図12　仮トラス

前例に従ってこのトラスを図12のようにモデル化する。

モデル化の結果A-B材を独立部材角として、B-C材、C-D材と仮伸材Y-D材を従属部材角とする架構が形成された。仮伸材Y-D材をゼロとして残りの三材について節点変位式を計算してみた。勿論このモデルは門型ラーメンで節点の相対変位は直角変位図の観点からすると一目瞭然である。上の条件を基に各部材毎に節点変位式を立てる。

$$\vec{V}_{AB} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ 0 & 6.6 & 0 \end{vmatrix} = -6.6\omega_{AB}\vec{I} \quad (8\text{-}1)$$

$$\vec{V}_{BC} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\omega_{BC}\vec{J} \quad (8\text{-}2)$$

$$\vec{V}_{CD} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{CD} \\ 0 & -6.6 & 0 \end{vmatrix} = 6.6\omega_{CD}\vec{I} \quad (8\text{-}3)$$

となる。これらの式を節点変位式の(1-1)式に代入し、各単位ベクトル別に整理すると

$$(-6.6\omega_{AB}+6.6\omega_{CD})\vec{I}+(4\omega_{BC})\vec{J} = 0 \quad (8\text{-}4)$$

が得られる。また上式は恒等式であるから

$-6.6\omega_{AB}+6.6\omega_{CD} = 0$

$4\omega_{BC} = 0$

となり、ここで $\omega_{AB} = -1(R_{AB}=1)$ として上式を解くと

$\omega_{BC} = 0$、$\omega_{CD} = -1$

が求まる。構造力学の部材角で表現すると

$R_{AB} = 1$ のとき $\varphi_{BC} = 0$、$\varphi_{CD} = 1$

が導かれる。

次にE点、B点そしてF点のX,Y方向の絶対変位を(7-1)式、(7-2)式と(7-3)式から求める。まず各点の相対変位を求めるが、E点の回転角は $R_{AB}=1$ でX方向の長さはゼロ、Y方向の長さは2.5mである

これから

$_E\delta_x = 2.5\times1 \qquad _E\delta_y = 0$

となる。また、$R_{AB}=1$ に対する B 点の X 方向と Y 方向の変位は

$_B\delta_x = 6.6\times1 \qquad _B\delta_y = 0$

となり、最後の F 点の相対変位は

$_F\delta_x = 5.5\times1 \qquad _F\delta_y = 0$

のように各節点の相対変位が導かれる。次に E 点、B 点と F 点における、X,Y 方向の絶対変位を求めると

$E_x = {}_E\delta_x = 2.5$

$E_y = {}_E\delta_y = 0$

$B_x = {}_B\delta_x = 6.6$

$B_y = {}_B\delta_y = 0$

$F_x = {}_F\delta_x = 5.5$

$F_y = {}_F\delta_x = 0$

上式より外力のなす仕事量を W_e、内力のなす仕事量を W_i としてこれを求めると

$W_e = (+P)\times(+6.6) = +6.6P$

$W_i = 4X/5\times E_x + (3X/5)\times E_y + (-4X/5)\times F_x + (-X/5)\times F_y = -2.4X$

となる。一般に、外力のなす仕事量 W_e と内力のなす仕事量 W_i は　$\Sigma(W_e+W_i)=0$　の関係にあるから

$X = 2.75P$

の部材応力が導かれた。

9．異形トラス

図 5 のトラスについて C-E 材の部材応力を仮想仕事の原理で求める。部材応力(X)を求めるために、各節点の仮想変位に節点変位式を適用して解析してみる。

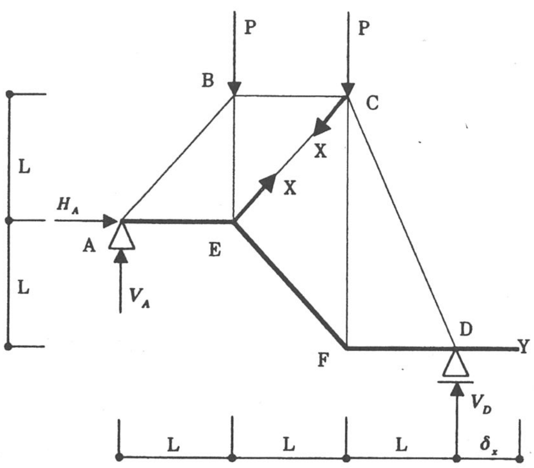

図 13　仮架構

前例に従ってこのトラスを図 12 のようにモデル化する。モデル化の結果 A-E 材を独立部材角として、E-F 材、F-D 材と仮伸材 Y-D 材を従属部材角とする架構が形成された。F-D 材の回転角をゼロとして残りの三材について節点変位式を算定する。

上記の条件を基に各部材毎に節点変位式を立てる。

$$\vec{V}_{AE} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{AE} \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix} = l\omega_{AB}\vec{J} \tag{9-1}$$

$$\vec{V}_{EF} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{EF} \\ l & -l & 0 \end{vmatrix} = l\omega_{EF}\vec{J} + l\omega_{EF}\vec{I} \tag{9-2}$$

$$\vec{U}_{YD} = -\delta_x\vec{I} \tag{9-3}$$

となる。これらの式を節点変位式の(1-1)式に代入し、各単位ベクトル別に整理すると

$$(l\omega_{EF}-\delta_x)\vec{I} + (l\omega_{AE}+l\omega_{EF})\vec{J} = 0 \tag{9-4}$$

が得られる。

また上式は恒等式であるから

$l\omega_{EF} - \delta_x = 0$

$l\omega_{AE} + l\omega_{EF} = 0$

となり、ここで　$\omega_{AE} = -1(R_{AE}=1)$　として上式を解くと

$\omega_{EF} = +1$、$\delta_x = +l$

が求まる。構造力学の部材角で表現すると

$R_{AE} = 1$　のとき　$\varphi_{EF} = -1$、$\delta_x = +l$

が導かれる。

次に E 点、B 点、F 点、C 点の X,Y 方向の絶対変位を(7-1)式、(7-2)式と(7-3)式から求める。まず各点の相対変位から求めると E 点の回転角は $R_{AE}=1$ で、位置ベクトルは X 方向の長さは l、Y 方向の長さはゼロである。これから $_E\delta_x = 0$、$_E\delta_y = -l$ となる。

B 点の回転角も $R_{AE}=1$ で、位置ベクトルは X 方向の長さは l、Y 方向の長さは l である。これから

$_B\delta_x = l\times1$、$_B\delta_y = -l\times1$ となる。

F 点の回転角は $\varphi_{EF} = -1$ で、位置ベクトルは X 方

向の長さは l、Y 方向の長さは $-l$ である。ゆえに
$_F\delta_x = l\times1$、$_F\delta_y = l\times1$ となる。
C 点の回転角は $\varphi_{CD} = 0$ としているから相対変位はゼロである。
D 点は X 方向に $\delta_x = +l$ だけ伸びているから
$_D\delta_x = +l$、$_D\delta_y = 0$ となる。

次に E 点、B 点と F 点における、X,Y 方向の絶対変位を求めると

$$E_x = {}_E\delta_x = 0$$
$$E_y = {}_E\delta_y = -l$$
$$B_x = {}_B\delta_x = l$$
$$B_y = {}_B\delta_y = -l$$
$$F_x = {}_F\delta_x + {}_E\delta_x = l+0$$
$$F_y = {}_F\delta_y + {}_E\delta_y = -l+l = 0$$

C 点については、部材 F-D-C は三角形を構成しているから回転角はゼロである。ゆえに

$$C_x = {}_D\delta_x = +l$$
$$C_y = 0$$

が導かれる。

上式より外力のなす仕事量を W_e、内力のなす仕事量を W_i としてこれを求めると

$$W_e = (-P)\times(-l)+(-P)\times0 = +Pl$$
$$W_i = X/\sqrt{2}\times0+X/\sqrt{2}\times(-l)+(-X/\sqrt{2})\times l +(-X/\sqrt{2})\times0 = -\sqrt{2}X$$

となる。ここで W_i の右辺の項について説明を加えると

第一項：E 点の内力 X の x 方向に対する成分と変位成分を乗じた値
第二項：E 点の内力 X の y 方向に対する成分と変位成分を乗じた値
第三項：C 点の内力 X の x 方向に対する成分と変位成分を乗じた値
第四項：C 点の内力 X の y 方向に対する成分と変位成分を乗じた値である。

一般に、外力のなす仕事量 W_e と内力のなす仕事量 W_i は　$\Sigma(W_e+W_i) = 0$　の関係にあるから

$$X = P/\sqrt{2}$$

の部材応力が導かれた。

10. おわりに

仮材の挿入に関する論理的検証を確定し、既報の節点変位式と組み合わせることにより線形力学への応用範囲が拡がった。ここに不静定平面架構の節点変形・変位、反力及び部材力を求める新解法が提案できた。なお不静定立体架構の節点変形・変位、反力及び部材力を求める方法や、構造物の安定・不安定を判断できる新解法も論理の検証と一般解において確立済みである。今後、具体的な数値実験を実施し公表していく。

参考・引用文献

(1) 山本嘉孝：小山高専研究紀要第五号　1973
(2) 岸　響子・山本：日本建築学会大会（東北）B-1　P339-P340　2000.9
(3) 樋下絵美子・山本：日本建築学会大会（東北）B-1　P335-P336　2000.9
(4) 山本：日本建築学会大会（東北）　B-1　P337-P338　2000.9

「受理年月日　2001 年 9 月 26 日」