小山工業高等専門学校研究紀要
第 34 号 (2002)　　39 − 46

ヤングの不等式の拡張とその他の問題(Ⅱ)

The extensions of Young's inequality and other Problems (Ⅱ)

河 島　　博

Hiroshi KAWASHIMA

1．はじめに

まず，去年の小山高専紀要に紹介した「ヤングの不等式の拡張定理」の証明を紹介する。

これは，2001 年 3 月 28 日(水)に日本数学会での口頭発表したものの論文化である。

2．ヤングの不等式の拡張定理とその証明

〔定理〕$f_i(i=1,2,\cdots,n)$ は区間 $I\equiv[0,+\infty)$ で狭義の単調増加な連続関数で，全て原点を通るとする。かつ，それらの導関数も $I^\circ=(0,+\infty)$ 上で連続で，0 にはならないとすると，次の不等式が成り立つ。

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(a_k) \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_0^{a_k} f_1(x)f_2(x)\cdots f_k'(x)\cdots f_n(x)\,dx \tag{S}$$

ここで，等号条件 ⇔ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ である。

(注 1：$n=2$ のとき

$$g(a)f(b) \leqq \int_0^a g'(x)f(x)dx+\int_0^b g(X)f'(X)dX \quad (イ)$$

であるから，$b\to f^{-1}(b), g(x)\equiv x$ とおくと，(イ)は

$$ab \leqq \int_0^a f(x)dx+\int_0^{f-1(b)} Xdf(X) \quad (イ)'$$

更に $X=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(X)$ とおくと

$$ab \leqq \int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(x)dx \quad (ロ)$$

で，(ロ)はヤングの不等式である。<注意：$=\Leftrightarrow a=f^{-1}(b)\Leftrightarrow b=f(a)$>)

(注 2：予想定理より仮定が少しきつくなっているが，応用上は問題ないと思う。

また，今の所は推測でしかないが，$n=2$ の場合も含めて，$f_k'(x)\neq 0$ on $I^\circ=(0,+\infty)$ (但し $k=1,2,\cdots,n$)の条件は外せると思う。)

〔証〕$n=2$ のときは，去年の小山高専紀要の P16 に出ているから，$n=3$ のときから証明する。

その前に，次の事を確認しておこう。不等式(S)は $a_k=0$ ならば，明らかで，左辺 $=0$ となるから，等号の必要条件として，$\forall a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ が出る。また，$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ ならば，等号条件が成り立つことも明らかである。

よって，$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n(\neq 0)$ のときをトリビアル (trivial) な場合と言おう。

つまり，(S)を問題にするときは，最初から，$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ の時だけを問題にすれば良い。

証明は帰謬法と数学的帰納法とを組み合わせて行う。

$n=3$ のとき，(S)は次の形でかける。

$$f(a)g(b)h(c) \leqq \int_0^a f'(x)g(x)h(x)dx+\int_0^b f(x)g'(x)h(x)dx+\int_0^c f(x)g(x)h'(x)dx \tag{S$_3$}$$

もし，右辺−左辺＝負なる所が有ったとしたら矛盾が出ることを言おう。

その座標の最大値を e として，$[0,e]^3$ で右辺−左辺の最小値を与える場所を (a,b,c) とする。

そして，便宜上 $c\equiv\max(a,b,c)$ とおき，次の関数を定義する。

$$u(s,t)\equiv\int_0^s f'(x)g(x)h(x)ax+\int_0^t f(x)g'(x)h(x)dx+\int_0^c f(x)g(x)h'(x)dx-f(s)g(t)h(c) \quad (イ)$$

<注意：$u(c,c)=\int_0^c\{f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)\}dx-f(c)g(c)h(c)$

$= [f(x)g(x)h(x)]_0^c - f(c)g(c)g(c) = 0$ >

仮定により，(イ)は $[0, c]^2$ で最小値を取るから，<注意：(イ)は $[a, b] \equiv (a, b, c)$ で最小値 on $[0, e]^3$ >もし，点 $[a, b]$ が $[0, c]^2$ の内点だと，次のような矛盾が出る。

$$\begin{cases} u_s = f'(s)g(s)h(s) - f'(s)g(t)h(c) = 0 & (\text{ロ}) \\ u_t = f(t)g'(t)h(t) - f(s)g'(t)h(c) = 0 & (\text{ハ}) \end{cases}$$

$$(\text{ロ}) \Leftrightarrow h(c) = \frac{g(s)}{g(t)}h(s) \qquad (\text{ロ})'$$

$$(\text{ハ}) \Leftrightarrow h(c) = \frac{f(t)}{f(s)}h(t) \qquad (\text{ハ})'$$

$$\therefore (\text{ロ})' \div (\text{ハ})' : 1 = \frac{g(s)}{g(t)}h(s) \times \frac{f(s)}{f(t)} \times \frac{1}{h(t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(t)}{h(s)} = \frac{f(s)g(s)}{f(t)g(t)} \qquad (\text{ニ})$$

(ニ)から $t > s$ とすれば，仮定から左辺>1，右辺<1 で矛盾が出る。同様に，$t < s$ としても出る。<注意：正確には $s = a, t = b$ として扱う。>

これより $a = b$ で，(ロ)′から $a = b = c$ となり，これはトリビアルのときで，これは矛盾である。

また，点〔a, b〕は〔$0, c$〕^{2} の境界点でもない。便宜上，$b = c$ だとして，$G(x) \equiv g(x)h(x)$ とおくと，(イ)より

$$u(a, c) = \int_0^a f'(x)G(x)dx + \int_0^c f(x)G'(x)dx - f(a)G(c)$$

で，帰納法の仮定よりこれは 0 以上だが，これは最初の仮定から出る最小値が負と矛盾する。

これから，直ぐに一般の場合の証明に入っても良いのだが，念のために $n = 4$ のときもやってみる。

$n = 4$ のときの証明

$$f(a)g(b)h(c)i(d) \leqq \int_0^a f'\circ g\circ h\circ i(x)dx + \int_0^b f\circ g'\circ h\circ i(x)dx + \int_0^c f\circ g\circ h'\circ i(x)dx + \int_0^d f\circ g\circ h\circ i'(x)dx \qquad (S)_4$$

右辺−左辺<0 なる点が有ったとして矛盾を出す。その点の座標の最大値を e とし，〔$0, e$〕^{4} における右辺−左辺の最小値を与える点を，(a, b, c, d) とし，便宜上 $d = \mathrm{Max}(a, b, c, d)$ とし，次の関数を定義する。

$$w(s, t, u) \equiv \int_0^s f'\circ g\circ h\circ i(x)dx + \int_0^t f\circ g'\circ h\circ i(x)dx + \int_0^u f\circ g\circ h'\circ i(x)dx + \int_0^d f\circ g\circ h\circ i'(x)dx - f(s)g(t)h(u)i(d) \qquad (\text{イ})$$

点〔a, b, c〕$\equiv (a, b, c, d)$ で最小値 m (＝負) on 〔$0, d$〕^{3} を取る訳だから，もし，その点が〔$0, d$〕^{3} の内点であるならばその点で次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} w_s = f'(s)g(s)h(s)i(s) - f'(s)g(t)h(u)i(d) = 0 & (\text{ロ}) \\ w_t = f(t)g'(t)h(t)i(t) - f(s)g'(t)h(u)i(d) = 0 & (\text{ハ}) \\ w_u = f(u)g(u)h'(u)i(u) - f(s)g(t)h'(u)i(d) = 0 & (\text{ニ}) \end{cases}$$

これらより<注：正確には $s \to a, t \to b, u \to c$ >

$$(\text{ロ}) \Leftrightarrow i(d) = \frac{g(s)h(s)}{g(t)h(u)}i(s) \qquad (\text{ロ})'$$

$$(\text{ハ}) \Leftrightarrow i(d) = \frac{f(t)h(t)}{f(s)h(u)}i(t) \qquad (\text{ハ})'$$

$$(\text{ニ}) \Leftrightarrow i(d) = \frac{f(u)g(u)}{f(s)g(t)}i(u) \qquad (\text{ニ})'$$

$$(\text{ロ})' \div (\text{ハ})' : 1 = \frac{g(s)h(s)}{g(t)h(u)}i(s) \times \frac{f(s)h(u)}{f(t)h(t)} \times \frac{1}{i(t)} = \frac{f(s)g(s)h(s)}{f(t)g(t)h(t)} \times \frac{i(s)}{i(t)} \Leftrightarrow \frac{i(t)}{i(s)} = \frac{f\circ g\circ h(s)}{f\circ g\circ h(t)} \Leftrightarrow t = s$$

が出て，同様にして(ロ)′÷(ニ)′：から $u = s$ が出て，(ロ)′を考慮して $s = t = u = d$ でトリビアルの点で，負という矛盾が出るからよい。

境界点の場合 $u \equiv d, H \equiv h\circ i$ とおけば，

$$m = w(a, b, d) = \int_0^a f'\circ g\circ H(x)dx + \int_0^b f\circ g'\circ H(x)dx + \int_0^d f\circ g\circ H'(x)dx - f(a)g(b)H(d)$$

で，左辺は負，右辺は帰納法の仮定から 0 以上で矛盾が出た。

つまり，$(S)_4$ が証明された訳である。<注意：等号条件は，最後にまとめてやる。>

もし，$n = K$ のとき，(S) が成立したとすると

$$\prod_{k=1}^{K} f_k(a_k) \leqq \sum_{k=1}^{K} \int_0^{a_k} f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_k'\circ\cdots\circ f_K(x)dx \qquad (S)_K$$

が成立する。

$(S)_K$ を使って，次の $(S)_{K+1}$ を証明する。

$$\prod_{k=1}^{K+1} f_k(a_k) \leqq \sum_{k=1}^{K+1} \int_0^{a_k} f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_k'\circ\cdots\circ f_K\circ f_{K+1}(x)dx \qquad (S)_{K+1}$$

まず，右辺−左辺<0 なる点が有ったとして，矛盾が出ることを言えば良い。

その点を $(b_1, b_2, \cdots, b_K, b_{K+1})$ とする。

$B \equiv \mathrm{Max}(b_1, b_2, \cdots, b_K, b_{K+1})$ として，超立方体 $[0, B]^{K+1}$ の中で，最小値 m を与える点 $C \equiv (c_1, c_2, \cdots c_K, c_{K+1})$ を考え，便宜的に c_{K+1} を C の座標の最大値と仮定し，次の関数を $[0, c_{K+1}]^K$ 上で考える。

$$w(t_1, t_2, \cdots, t_K) \equiv \sum_{k=1}^{K} \int_0^{t_k} f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_k' \circ \cdots \circ f_K \circ f_{K+1}(x)dx$$

$$+ \int_0^{c_{K+1}} f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_K \circ f_{K+1}'(x)dx - f_1(t_1)f_2(t_2)\cdots$$

$$f_K(t_K)f_K(c_{K+1}) \qquad (イ)$$

Case1 まず，最小値 m を与える点 $C = [c_1, c_2, \cdots, c_K] \equiv (c_1, c_2, \cdots, c_K, c_{K+1})$ が $[0, c_{K+1}]^K$ における内点の時を考えると，$w_{t_k}(C) = 0$ であるから，次の計算から矛盾が出る。<注意：見易さのため，c ではなく，t を敢えて使うことにする。>

$$w_{t_k} = f_1(t_k)f_2(t_k)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_k)f_{K+1}(t_k) -$$
$$f_1(t_1)f_2(t_2)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_K)f_{K+1}(c_{K+1}) = 0$$
$$(k = 1, 2, \cdots, K)$$

$$\Leftrightarrow f_1(t_k)f_2(t_k)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_k)f_{K+1}(t_k) =$$
$$f_1(t_1)f_2(t_2)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_K)f_{K+1}(c_{K+1}) \Leftrightarrow$$

$$f_{K+1}(c_{K+1}) = \frac{f_1(t_k)f_2(t_k)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_k)}{f_1(t_1)f_2(t_2)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_K)} \times f_{K+1}(t_k) \quad (ロ)$$

特に $k = 1$ として

$$f_{K+1}(c_{K+1}) = \frac{f_1'(t_1)f_2(t_1)\cdots f_k(t_1)\cdots f_K(t_1)}{f_1'(t_1)f_2(t_2)\cdots f_k(t_k)\cdots f_K(t_K)} \times f_{K+1}(t_1) \quad (ハ)$$

よって，(ロ)を(ハ)で割れば，(下の{　}に注意)

$$1 = \frac{f_1(t_k)f_2(t_k)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_k)}{f_1(t_1)\{f_2(t_2)\cdots f_k'(t_k)\cdots f_K(t_K)\}} \times f_{K+1}(t_k) \times$$

$$\frac{f_1'(t_1)\{f_2(t_2)\cdots f_k(t_k)\cdots f_K(t_K)\}}{f_1'(t_1)f_2(t_1)\cdots f_k(t_1)\cdots f_K(t_1)} \times \frac{1}{f_{K+1}(t_1)} =$$

$$\frac{f_1(t_k)f_2(t_k)\cdots f_k(t_k)\cdots f_K(t_k)}{f_1(t_1)f_2(t_1)\cdots f_k(t_1)\cdots f_K(t_1)} \times \frac{f_{K+1}(t_k)}{f_{K+1}(t_1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_{K+1}(t_1)}{f_{K+1}(t_k)} = \frac{(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_K)(t_k)}{(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_K)(t_1)}$$

これより，$t_k = t_1 (k = 2, 3, \cdots, K)$

よって，(ハ)の式より $c_{K+1} = t_1$

つまり，$c_1 = c_2 = \cdots = c_K = c_{K+1}$ で，(トリビアルの点で，)負の値を取り矛盾が出た。

Case2 次に，$C \equiv [c_1, c_2, \cdots, c_K]$ が $[0, c_{K+1}]^K$ における境界点とし，便宜的に $c_K = c_{K+1}$ とおいて，更に $F_K \equiv f_K \circ f_{K+1}$ とおけば，

$$w(c_1, c_2, \cdots, c_{K-1}, c_K) = \sum_{k=1}^{K} \int_0^{c_k} f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_k' \circ$$
$$\cdots f_{K-1} \circ F_K(x)dx - f_1(c_1)f_2(c_2)\cdots f_{K-1}(c_{K-1})F_K(C_K)$$

が出るが，帰納法の仮定からは0以上，もう一方の仮定からは負で，やはり矛盾が出る。

よって，(S) はつねに成り立つことが分った。

次に等号条件であるが，それは今迄の分析から簡単に出る。

右辺−左辺の最小値は0であることが分った訳であるから，トリビアルでない点で最小値0を取れば矛盾することを言えばよい。

その点を C として，同様の議論を行えば，

Case1 では $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = c_{N+1}$ で矛盾が出るし，Case2 では $c_1 = c_2 = \cdots = c_N$, $c_N = c_{N+1}$ が帰納法の仮定から出て，また矛盾が出る。

〔了〕

(注：$N = K$ と考えている)

2．ヤングの不等式の拡張定理の応用

(ｉ) $f_k(x) \equiv x^{\theta_k}$(但し θ_k は正の定数)としたとき

左辺 $= \prod_{k=1}^{n} a_k^{\theta_k}$，　右辺 $= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{a_k} x^{\theta_1}x^{\theta_2}\cdots\theta_k x^{\theta_{k-1}}\cdots x^{\theta_n}dx$

$$= \sum_{k=1}^{n} \theta_k \left[\frac{x^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}\right]_0^{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n} a_k^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}$$

であるから，

$$a_1^{\theta_1}a_2^{\theta_2}\cdots\cdots a_n^{\theta_n} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n} a_k^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}$$

ここで，$P_k \equiv \dfrac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}{\theta_k}, \alpha_k \equiv a_k^{\theta_k}$ とおけば

$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{P_k}\alpha_k^{P_k}$ が出る。

但し $P_k > 1$, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{P_k} = 1, \alpha_k > 0$ である。

(注：等号条件 $\Leftrightarrow a_k = a_\ell \Leftrightarrow a_k^\Theta = a_\ell^\Theta$(但し

$\Theta = \sum_{k=1}^{n} \theta_k) \Leftrightarrow (a_k = \alpha_k^{\frac{1}{\theta_k}}$ に注意して$)\alpha_k^{P_k} = \alpha_\ell^{P_\ell}$

が出る。)

(ⅱ) $f_k(x) \equiv \sinh(\theta_k x)$(但し $\theta_k > 0$)としたとき

これは(ｉ)の場合に比べて，右辺の計算が大分難

しい。

$$左辺 = \prod_{k=1}^{n} f_k(a_k) = \prod_{k=1}^{n} \sinh(\theta_k a_k) \text{ である。}$$

結論を，先に言おう。右辺はCase1 $n = 2m$(偶数) Case2 $n = 2m+1$(奇数)に分れて

Case1 $n = 2m$ のとき，右辺は<注：$r = m$ のときは半分>

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\theta_k}{2^{n-1}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\left\{\sum_{k=1}^{n-r}\frac{\cosh(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n)a_k-1}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=n-r+1}^{n}\frac{\cosh(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n)a_k-1}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n}\right\}\right]$$

Case2 $n = 2m+1$ のとき，右辺は

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\theta_k}{2^{n-1}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\left\{\sum_{k=1}^{n-r}\frac{\sinh(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n)a_k}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=n-r+1}^{n}\frac{\sinh(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n)a_k}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-r}-\theta_{n-r+1}-\cdots-\theta_n}\right\}\right]$$

<注：$\sum_{k=1}^{n-r} \to \sum_{1\leqq k\leqq n-r}$，$\sum_{k=n-r+1}^{n} \to \sum_{n-r+1\leqq k\leqq n}$ の方が正確>

証明に這入る前に，基本的な公式を準備し，夫を使ってアイディアを説明する。

$\cosh x \equiv \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x \equiv \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ より

$\cosh(ix) = \cos x$, $\sinh(ix) = i\sin x$

$\cos(ix) = \cosh x$, $\sin(ix) = i\sinh x$

であることを確認する。また，

$(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$

もよいであろう。

アイディアは簡単で，$\cosh x$, $\sinh x$ よりも $\cos x$, $\sin x$ の方が使い易いし，使える公式も豊富である。また，$\sin x$ よりも $\cos x$ の方が掛け算を行うとき符号が這入らない分だけ公式が理解し易い。

この事を頭において計算をして行く。

まず

$$2^{n-1}\cos A_1\cos A_2\cdots\cos A_n = 2^{n-1}\times\frac{e^{iA_1}+e^{-iA_1}}{2}$$

$$\times\cdots\times\frac{e^{iA_n}+e^{-iA_n}}{2} = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(e^{iA_k}+e^{-iA_k}) \qquad (イ)$$

であるが，右辺は

$n = 2m$(偶数)のときは

$$\prod_{k=1}^{n}(e^{iA_k}+e^{-iA_k}) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{r=0}^{m-1}(E_{n-r}+F_{n-r})+E_m\right\} \qquad (ロ)$$

但し $E(x) \equiv e^{ix}+e^{-ix}$, $E_{n-r} \equiv \Sigma E(A_1+A_2+\cdots+A_{n-r}-A_{n-r-1}-\cdots-A_n)$, $F_{n-r} \equiv \Sigma E\{-(A_1+A_2+\cdots+A_{n-r+1}-\cdots-A_n)\}$

とすると，$E_{n-m} = F_{n-m}$ でダブルから(ロ)はよい。

よって，更に

$C_{n-r} \equiv \Sigma\cos(A_1+A_2+\cdots+A_{n-r}-A_{n-r+1}-\cdots-A_n)$

とおくと，

$$(イ)の右辺 = \sum_{r=0}^{m-1} C_{n-r}+\frac{1}{2}C_m$$

が出る。<注：(ロ)の{ } $= \sum_{r=0}^{n} E_{n-r}$ とかける。>

$n = 2m+1$(奇数)のときは

$$\prod_{k=1}^{n}(e^{iA_k}+e^{-iA_k}) = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{m}(E_{n-r}+F_{n-r}) = \sum_{r=0}^{m}E_{n-r}$$

であるから

$$(イ)の右辺 = \sum_{r=0}^{m} C_{n-r}$$

(注：$n = 2m$ のとき $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$ とおくと左辺 $= 2^{n-1}$，右辺 $= \sum_{r=0}^{m-1} {}_nC_r+\frac{1}{2}{}_nC_m$

$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = \frac{1}{2}\times 2^n = 2^{n-1}$ で良い。

$n = 2m+1$ のときも同様にして 左辺 $= 2^{n-1}$，右辺 $= \sum_{r=0}^{m} {}_nC_r = \frac{1}{2}\times\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = \frac{1}{2}\times 2^n = 2^{n-1}$ で良い。)

まとめると，

$n = 2m$ のとき

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\cos A_k = \sum_{r=0}^{m-1} C_{n-r}+\frac{1}{2}C_m \qquad (ハ)$$

$n = 2m+1$ のとき

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\cos A_k = \sum_{r=0}^{m} C_{n-r} \qquad (ニ)$$

(ハ)，(ニ)を使って，次の(ホ)，(ヘ)を出して見よう。

$n = 2m$ のとき

$$(-1)^m 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\sin A_k = \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_{n-r}+\frac{(-1)^m}{2}C_m \qquad (ホ)$$

$n = 2m+1$ のとき

$$(-1)^m 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\sin A_k = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r S_{n-r} \qquad (ヘ)$$

但し $S_{n-r} = \Sigma\sin(A_1+A_2+\cdots+A_{n-r}-A_{n-r+1}-\cdots-A_m)$

〔ホの証明〕(ハ)で $A_k \to A_k - 90°$ とおくと $\cos(\theta - 90°) = \sin\theta$ より

(ハ)の左辺 $= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \sin A_k$ となる。一方，

右辺は $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n \to (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) + (-90°) \times \{(n-r) - r\}$ で，$(-90°)(2m-2r) = (80° \times (-m+r)$ であるから

$C_{n-r} = \Sigma\cos(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) \times (-1)^{-m+r}$

よって，両辺に $(-1)^m$ をかけると

左辺 $= (-1)^m 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \sin A_k$，右辺 $= \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r C_{n-r} + \frac{1}{2}(-1)^m C_m$ でよい。〔了〕

〔への証明〕(ニ)で $A_k \to A_k - 90°$ とおくと，

(ハ)の左辺 $= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \sin A_k$ となる。一方，右辺は $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n \to (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) + (-90°)\{(n-r) - r\}$ で，$(-90°)(2m-2r+1) = 180° \times (-m+r) - 90°$ であるから $C_{n-r} \to \Sigma(-1)^{-m+r}\sin(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n)$ よって，両辺に $(-1)^m$ をかけると，

左辺 $= (-1)^m 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \sin A_k$，右辺 $= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r S_{n-r}$ でよい。《注意：$\cos(\theta - 90°) = \sin\theta$ を使った。》〔了〕

次に積分を考えるときに必要になるから
$n = 2m$ のとき

$\sin A_1 \sin A_2 \cdots \cos A_k \cdots \sin A_n$ を(ハ)によって変形して出してみよう。

$A_\ell \to A_\ell - 90°\ (\ell \neq k)$ として，左辺 $= 2^{n-1} \cos A_k \times \prod_{\ell=1, \ell\neq k}^{n} \sin A_\ell$ で，右辺の C_{n-r} の中味は Case Ⅰ $(1 \leq k \leq n-r)$ のとき $A_k + (A_1 + A_2 + \cdots + \check{A}_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) \to (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) + [(-90°)\{(n-r-1) - r\}]$ で $[\quad] = 180° \times (-m+r) + 90°$ より $\cos(\quad) \to (-1) \times (-1)^{-m+r}\sin(A_1 + A_2 + \cdots + A_{m-r} - A_{m-r+1} - \cdots - A_n)$ で，Case Ⅱ $(n-r+1 \leq k \leq n)$ でも同様にして $\cos(\quad) \to (-1)^{-m+r}\sin(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n)$ であるから，総合して考えてから $(-1)^m$ をかけて

$$(-1)^m 2^{n-1} \cos A_k \times \prod_{\ell=1, \ell\neq k}^{n} \sin A_\ell = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{r+1}\Big\{\sum_{1 \leq k \leq n-r} \sin(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leq k \leq n} \sin(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n)\Big\}$$

となる。

つまり，$n = 2m$ のとき

$$\cos A_k \times \prod_{\ell=1, \ell\neq k}^{k} \sin A_\ell = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}} \times \sum_{r=0}^{m} (-1)^{r+1}\Big\{\sum_{1 \leq k \leq n-r} \sin(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leq k \leq n} \sin(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n)\Big\}$$

となる。<注：$r = m$ のときは，最後の項は 2 で割る>

ここで $A_\ell \to iA_\ell$ とおくと

$$\cosh A_k \times i^{2m-1} \prod_{\ell=1, \ell\neq k}^{n} \sinh A_\ell = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}} \times \sum_{r=0}^{m} i(-1)^{r+1}\Big\{\sum_{1 \leq k \leq n-r} \sinh(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leq k \leq n} \sinh(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n)\Big\}$$

よって，次の公式をえる。

$$\cosh A_k \times \prod_{\ell=1, \ell\neq k}^{n} \sinh A_\ell = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sum_{r=0}^{m} (-1)^r\Big\{\sum_{1 \leq k \leq n-r} \sinh(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leq k \leq n} \sinh(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n)\Big\} \qquad (T)_{2m}$$

<注：$r = m$ のときは，最後の項には $\frac{1}{2}$ がつく>

次に，$n = 2m+1$ のとき

$\sin A_1 \sin A_2 \cdots \cos A_k \cdots \sin A_n$ を(ニ)によって

変形して出してみる。

$A_\ell \to A_\ell - 90^\circ\,(\ell \neq k)$ として，左辺 $= 2^{n-1} \cos A_k \times \prod_{\ell=1,\ell\neq k} \sin A_\ell$ で，右辺の C_{n-r} の中味は，Case I $(1 \leqq k \leqq n-r)$ のとき，$A_k + (A_1 + A_2 + \cdots + \check{A}_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) \to (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) + [(-90^\circ)\{(n-r-1)-r\}$ で $[\ \ ] = 180^\circ \times (-m+r)$ より $\cos(\ \ ) \to (-1)^{-m+r}\cos(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n)$ で，Case II $(n-r+1 \leqq k \leqq n)$ でも同様にして $[\ \ ] = (-90^\circ)\{(n-r)-(r-1)\} = 180^\circ \times (-m+r-1)$ であるから，
$\cos(\ \ ) \to (-1)^{-m+r-1}\cos(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n)$ であるから，総合して考えてから $(-1)^m$ を両辺にかけて

$$(-1)^m 2^{n-1} \cos A_k \times \prod_{\ell=1,\ell\neq k}^{n} \sin A_\ell = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \cos(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \cos(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n) \Big\}$$

となる。

つまり，$n = 2m+1$ のとき

$$\cos A_k \times \prod_{\ell=1,\ell\neq k}^{n} \sin A_\ell = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \cos(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \cos(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n) \Big\}$$

となる。

ここで $A_\ell \to iA_\ell$ とおくと

$$\cosh A_k \times i^{2m} \prod_{\ell=1,\ell\neq k}^{n} \sinh A_\ell = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \cosh(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \cosh(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n) \Big\} \Leftrightarrow \cosh A_k \times \prod_{\ell=1,\ell\neq k}^{n} \sinh A_\ell = \frac{1}{2^{n-1}} \times$$

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \cosh(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_n) - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \cosh(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r} - A_{n-r+1} - \cdots - A_k - \cdots - A_n) \Big\} \qquad (T)_{2m+1}$$

この $(T)_{2m}$，$(T)_{2m+1}$ を使って，積分の計算に遣入ることにしよう。

$n = 2m$(偶数)のとき，公式 $(T)_{2m}$ より

$$\int_0^{a_k} f_1(\theta_1 x) \cdots f_k'(\theta_k x) \cdots f_n(\theta_k x)\,dx = \theta_k \int_0^{a_k} \sinh\theta_1 x \times \sinh(\theta_2 d) \times \cdots \times \cosh(\theta_k x) \times \cdots \text{O} \times \sinh(\theta_n x)\,dx = \frac{\theta_k}{2^{m-1}} \times \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \left[\frac{\cosh(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r-1} - \cdots - \theta_n)x}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} \right]_0^{a_k} - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \left[\frac{\cosh(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n)x}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} \right]_0^{a_k} \Big\}$$

$$= \frac{\theta_k}{2^{n-1}} \times \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n)a_k - 1}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n)a_k - 1}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} \Big\}$$

右辺は，これに $\sum_{k=1}^{n}$ を施す訳だから大分複雑になる訳である。

<注意：$r = m$ のときは，最後の項は半分になる>

次に，$n = 2m+1$(奇数)のとき，$(T)_{2m+1}$ により

$$\int_0^{a_k} f_1(\theta_1 x) \cdots f_k'(\theta x) \cdots f_n(\theta_n x)\,dx = \theta_k \int_0^{a_k} \sinh(\theta_1 x) \times \sinh(\theta_2 x) \times \cdots \times \cosh(\theta_k x) \times \cdots \times \sinh(\theta_n x)\,dx =$$

$$\frac{\theta_k}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \left[\sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \frac{\sinh(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n)x}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} \right]_0^{a_k} - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \left[\frac{\sinh(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_m)x}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} \right]_0^{a_k} \Big\}$$

$$= \frac{\theta_k}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \Big\{ \sum_{1 \leqq k \leqq n-r} \frac{\sinh(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n)a_k}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} - \sum_{n-r+1 \leqq k \leqq n} \frac{\sinh(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n)a_k}{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-r} - \theta_{n-r+1} - \cdots - \theta_n} \Big\}$$

となる。

右辺は，これに $\sum_{k=1}^{n}$ を施すことによって出る。

以上によりやっと出た。　〔証了〕

[参　考　文　献]

[1]　柴田　敏男：位相解析　筑摩書房
[2]　高村多賀子：関数解析入門　朝倉書店
[3]　掛谷　宗一・蓮池良太郎：三角法
中文館書店
[4]　大関　信雄・青柳　雅計：不等式
槙書店
[5]　渡部　隆一：不等式入門　森北出版

「受理年月日　2001年9月28日」