

制御理論講話 (その 1)

— H_∞ 制御 —

黒須 茂, 猪瀬善郊, 山崎敬則*, 野田善之**

A Lecture on Control Theory (Part1)

— H_∞ Control —

Shigeru KUROSU, Yoshihiro INOSE, Takanori YAMAZAKI*, Yoshiyuki NODA**

1. はじめに

1980 年代より制御界には大きく分けて二つの流れが起っている。一つはロバスト制御であり、もう一つはインテリジェント制御とよばれている。

ロバスト制御は、古典、現代制御の流れを受け継ぐ伝統的制御手法の系列である。現代制御理論がプロセスの完全な情報を前提としており、不確実さを含むモデルに対しては性能を保証できないのに対して、ロバスト制御では、プロセスの不完全な情報を前提として、あらかじめモデル変動の幅を事前に設計に取り組み、安定性や制御性能を保証させる実用的な方法である。

インテリジェント制御は、微分方程式などを用いた数学モデル化が難しい悪構造問題に対してエキスパートシステム、ファジィ、ニューロ、遺伝的アルゴリズムを利用して経験則や言語的

知識として制御する方法である¹⁾。

状態フィードバックに代表される最適制御に対抗する形で、周波数領域における古典制御理論への見直し、回帰として、さらにロバスト制御の実現手段として 20 年ほど前に H_∞ 制御理論が登場した。しかしながら、この H_∞ 制御理論が大きな発展を遂げたのは、実にこの 10 年ほどのことである²⁾。

本稿では、 H_∞ 制御理論の基本的な考え方を熊さん八つあんの投げかける質問形式で、著者らの理解した範囲でまとめている。

長屋の住人である熊さんと八つあんが、今日も暇をもて余して自尊心の高い人情家のご隠居さんのところに、いつものようにいびりにやってきました。

熊さん「21 世紀を迎えて、世の中が目まぐるしく変わったようで、仕事がやりにくくてしょうがねえな。」

八つあん「うちの仕事場でも、口ばしの黄色い

*) 平成 4 年度機械工学科卒業(現東京都立高専助手)

**) 平成 12 年度電子システム専攻科卒業生(現豊橋技術大修士課程)

若い連中が MATLAB だのなんのと、わけのわからないことを口走りやがって、面白かねえよ。」

熊さん「この間も、21 世紀の新しい制御理論として世間で騒がれている H_∞ 制御とやらをご隠居に教えを請うたら、文献^{3, 4)}をポンとだして“これ読みな”と貸してくれたんだけど、さっぱりわからん。おめえ、読んだか？」

八つあん「読むには読んだが…読む度に、高いびきに変わってしまって、カカアに蹴とばされて“風邪ひくぞ”とどなられるんだよ。」

熊さん「今日は二人で H_∞ 制御について根掘り葉掘り聞いてやれば、ご隠居さんも困りはてて一杯飲ましてくれるんじゃないか。」

八つあん「そうだな。丁度暇だしな。」

2. H_∞ ノルムと設計仕様

熊さん「ご隠居、よいあんばんいですな。」

ご隠居「おお、熊と八か。今日は朝から悪い予感がしたと思ったら…何の相談じゃ？」

熊さん「この間、ご隠居さんが貸してくれた文献ですがね。こちとらには見ても読んでもさっぱりわかんねえ。そもそも、 H_∞ 制御っちゅうのは何のことっすかい？」

ご隠居「藪から棒になんていう聞き方じゃ。まあ、こっちにきて二人とも座れ。ひとことでいうと、 H_∞ 制御の本質はフィードバック制御によって与えられた伝達関数の大きさをある値以下にするとところにあるんじゃない。この大きさを測るノルムとして、周波数伝達関数の最大特異値の最大値から定義される H_∞ ノルムというのが用いられるのだ。

それじゃ、熊さんからの文献についての質問を聞くことにしよう。」

熊さん「 $G(s)$ の H_∞ ノルムの定義ですがね。文献には

$$\|G\|_\infty = \sup \sigma_{\max}[G(j\omega)] \quad (2)$$

とありますが、(2) 式における $\sup$ とは何を意味するのですかい？ $\max$ とのちがいを明白に説明してくれませんか？ また、 H_∞ ノルムは物理的にどんな意味をもった量なのですか？」

ご隠居「 $\sup$ ……上限 [supremum]

$\max$ ……最大値 [maximum]

$\sigma_{\max}[G(j\omega)]$ は、 $G(j\omega)$ の最大特異値を示している。最大特異値とは、ある周波数 ω における伝達関数行列 $G(j\omega)$ の $G(j\omega)^*G(j\omega)$ の固有値の平方根（これを特異値という）の最大値である。そして、 $\sup$ は ω を 0 から ∞ まで変えて、それぞれの ω における最大特異値を調べ、それらの中での最大（上限）のものを意味する。1 入力 1 出力系では、 H_∞ ノルムとゲインの最大値は同じになる。多入力多出力系では、 H_∞ ノルムとゲインの最大値は、近い値をとるが一致しない。しかし、 H_∞ ノルムはゲインの最大値より大きく表われる。このことから、 H_∞ ノルムを伝達関数の大きさと定義することで、 H_∞ 制御では、 H_∞ ノルムを周波数応答に対する評価関数として用いる。」

$$|G(s)| < \|G\|_\infty < \gamma \quad (3)$$

【例 1】1 入力-1 出力のとき、1 次系で説明しよう。

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} \quad (4)$$

$u = \omega T$ を導入すると、

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega} \quad (5) \quad \text{である。よって,}$$

であるから,

$$G(j\omega)^* = \frac{K}{1-j\omega} \quad (6)$$

となり,

$$G(j\omega)^* G(j\omega) = \frac{K^2}{1+\omega^2} \quad (7)$$

よって,

$$\lambda(u) - G(j\omega)^* G(j\omega) = 0 \quad (8)$$

$$\lambda(u) = \frac{K^2}{1+u^2} \quad (9)$$

であるから, よって $G(j\omega)^* G(j\omega)$ の特異値は

$$\sigma(u) = \sqrt{\lambda(u)} = \frac{K}{\sqrt{1+u^2}} \quad (10)$$

で与えられ, 最大値 $\sigma_{\max}$ は $u = 0$ のとき

$$\sigma_{\max} = K \quad (11)$$

となり, Bode 線図上の低周波域のゲインに一致する。

[例 2] 1 入力 2 出力系の最大特異値 $\sigma_{\max}$ とゲイン $|G(j\omega)|$ を求めてみよう。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

u から y_1, y_2 への伝達関数を求めると

$$\left. \begin{aligned} G_1(s) &= \frac{Y_1(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2+0.2s+1} \\ G_2(s) &= \frac{Y_2(s)}{u(s)} = \frac{s}{s^2+0.2s+1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となり, 伝達関数マトリクスは

$$G(s) = [G_1(s), G_2(s)] = \left[\frac{1}{s^2+0.2s+1}, \frac{s}{s^2+0.2s+1} \right] \quad (14)$$

$$G(j\omega)^* G(j\omega) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(-j\omega)^2+0.2(-j\omega)+1} \\ \frac{(-j\omega)}{(-j\omega)^2+0.2(-j\omega)+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(j\omega)^2+0.2(j\omega)+1} & \frac{j\omega}{(j\omega)^2+0.2(j\omega)+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{-\omega^2-0.2j\omega+1} \\ \frac{-j\omega}{-\omega^2-0.2j\omega+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{-\omega^2+0.2j\omega+1} & \frac{j\omega}{-\omega^2+0.2j\omega+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^4-1.96\omega^2+1} & \frac{j\omega}{\omega^4-1.96\omega^2+1} \\ \frac{-j\omega}{\omega^4-1.96\omega^2+1} & \frac{\omega^2}{\omega^4-1.96\omega^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

とにおいて, 固有値を求める。

$$|\lambda I - G(j\omega)^* G(j\omega)| = \begin{vmatrix} \lambda - g_{11} & -g_{12} \\ -g_{21} & \lambda - g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - g_{11})(\lambda - g_{22}) - g_{12}g_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (g_{11} + g_{22})\lambda + g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 0 \quad (16)$$

ここで,

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \frac{\omega^2}{(\omega^4-1.96\omega^2+1)^2}$$

となるから,

$$\lambda^2 - (g_{11} + g_{22})\lambda = 0 \quad (17)$$

であるから, 固有値 λ_1, λ_2 は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= g_{11} + g_{22} = \frac{1+\omega^2}{\omega^4-1.96\omega^2+1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となり, 特異値は,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{\lambda_1} = 0 \\ \sigma_2 &= \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{\omega^4-1.96\omega^2+1}} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

よって, 最大特異値は, つぎのようになる。

$$\sigma_{\max}[G(j\omega)] = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{\omega^4-1.96\omega^2+1}} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+(\sigma_2\omega)^2}} \quad (20)$$

また, ゲインは,

$$\left. \begin{aligned} |G_1(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)^2+(0.2\omega)^2}} \\ |G_2(j\omega)| &= \frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+(0.2\omega)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。この $\sigma_{\max}[G(j\omega)]$ と $|G_1(j\omega)|$, $|G_2(j\omega)|$ を Bode 線図で表わすと, Fig.1 のようになる。」

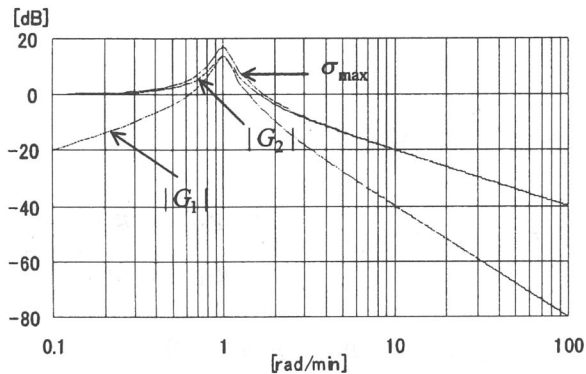


Fig.1 1 入力 2 出力系のゲイン $|G|$ と最大特異値 $\sigma_{\max}$

熊さん「そうすると, H_∞ ノルムはだいたい周波数伝達関数の最大値と同じと考えてよいわけですね。ところで, その物理的意味は何ですかい?」

ご隠居「それはわしもよくわからんのだ。ものの本によれば H_∞ ノルムとは, 最も不利な入力に対する

$$\frac{\text{出力のパワー}}{\text{入力のパワー}}$$

に対する値であるとしてある。 H_∞ 制御とは外生信号 w から制御量 z への通過特性の大きいものを抑え込みたいらしいのじゃ。」

熊さん「もう少し, 時間領域で詳しく説明してもらえませんか。」

ご隠居「多入出力系の H_∞ ノルムについて説明しよう。安定でプロパな伝達関数 $G(s)$ の H_∞ ノルムは, 時間領域ではつぎのように定義される。

$$\|G\|_\infty = \max_{\omega} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (22)$$

ここで,

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}, \quad \|z\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty z(t)^T z(t) dt} \quad (23)$$

である。すなわち, H_∞ ノルムは $\|w\|_2 = 1$ なる条件を満たしながら, 外生信号 w を変化させたときの $\|z\|_2$ の最大値である。ここで, $\|z\|_2$ を最大にする w を最悪外乱という。

2 入力 1 出力系の H_∞ ノルムで説明しよう。

Fig.2 のシステムを考える。

$$\frac{z}{w_1} = \frac{1}{s^2+0.8s+1}, \quad \frac{z}{w_2} = \frac{s+0.8}{s^2+0.8s+1} \quad (24)$$

であるから, このシステムに対する最悪外乱は $\omega = 1$ なる正弦波入力であると予想がつく。

さて, 2 入力であるから, $w = [w_1, w_2]^T$ で $w^T w = w_1^2 + w_2^2$ となり,

$$w_1 = A \cos \omega t, \quad w_2 = B \cos(\omega t + \phi) \quad \text{とすると,}$$

$$\begin{aligned} \|w\|_2 &= \sqrt{\int_0^\infty (w_1^2 + w_2^2) dt} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{\int_0^\infty \cos^2(\omega t + \phi) dt} \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。制御量を $z = C \cos(\omega t + \phi)$ とすると, ここでは 1 出力であるから,

$$\|z\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty z^2 dt} = C \sqrt{\int_0^\infty \cos^2(\omega t + \phi) dt} \quad (26)$$

となる。すなわち, 定常状態において $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ は振幅比となり, 振幅比の最大が ∞ ノルムとなる。

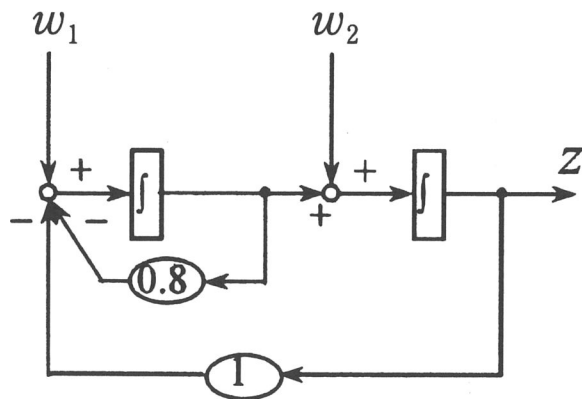


Fig.2 2入力1出力系

熊さん「さっぱりわかりません。 $\cos^2 \omega t$ なんてバイアス分をもっている0から ∞ まで積分したら、 ∞ になるに決まっているじゃありませんか。」

ご隠居「積分区間は定常状態に十分達するとして、 10π から十分長い時間として 1000π と仮定しよう。そうすると、

$$\begin{aligned} \int_{10\pi}^{1000\pi} w_1^2 dt &= \int_{10\pi}^{1000\pi} A^2 \cos^2 \omega t dt \\ &= A^2 \int_{10\pi}^{1000\pi} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\omega} d\theta \quad (\text{ここに } \theta = \omega t) \\ &= \frac{A^2}{\omega} \int_{10\pi}^{1000\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{A^2}{2\omega} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{10\pi}^{1000\pi} \\ &= \frac{A^2}{2\omega} \cdot 990\pi\omega \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} \int_{10\pi}^{1000\pi} w_2^2 dt &= B^2 \int_{10\pi}^{1000\pi} \cos^2(\omega t + \phi) dt \\ &= B^2 \int_{10\pi\omega + \phi}^{1000\pi\omega + \phi} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\omega} d\theta \quad (\text{ここに } \theta = \omega t + \phi) \\ &= \frac{B^2}{\omega} \int_{10\pi\omega + \phi}^{1000\pi\omega + \phi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{B^2}{2\omega} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{10\pi\omega + \phi}^{1000\pi\omega + \phi} \\ &= \frac{B^2}{2\omega} \cdot 990\pi\omega \end{aligned}$$

よって

$$\|w\|_2 = \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{495\pi}$$

となり、(25)式となる。

$\|z\|_2$ の計算も同様にして

$$\begin{aligned} \int_{10\pi}^{1000\pi} z^2 dt &= \int_{10\pi}^{1000\pi} \cos^2(\omega t + \phi') dt \\ &= C^2 \int_{10\pi\omega + \phi'}^{1000\pi\omega + \phi'} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\omega} d\theta \quad (\text{ここに } \theta = \omega t + \phi') \\ &= \frac{C^2}{\omega} \int_{10\pi\omega + \phi'}^{1000\pi\omega + \phi'} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{C^2}{2\omega} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{10\pi\omega + \phi'}^{1000\pi\omega + \phi'} \\ &= \frac{C^2}{2\omega} \cdot 990\pi\omega \end{aligned}$$

よって

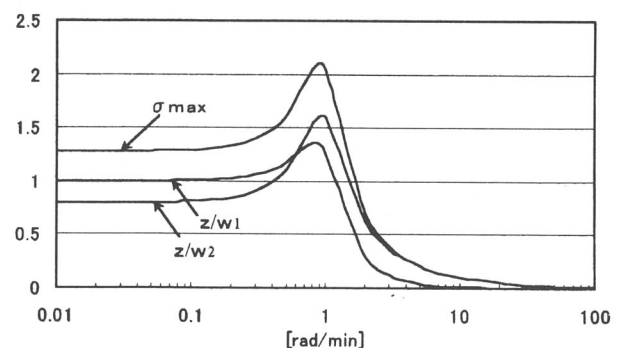
$$\|z\|_2 = \sqrt{C^2} \sqrt{495\pi}$$

となり、(26)式となる。したがって

$$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \frac{\sqrt{C} \sqrt{495\pi}}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{495\pi}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

であり、振幅比ということになる。

さて、Fig.3 は Fig.2 の系の最大特異値、 z/w_1 および z/w_2 のゲインをプロットした結果である。ただし、ゲインの単位は dB ではないことに注意しよう。Fig.3 に示した H_∞ ノルム（最大特異値の最大値）は、MATLAB による数値計算の結果、差の値は 2.1025、周波数は 0.886rad/s であり、減衰項の影響で固有角周波数 1rad/s から若干ずれている。

Fig.3 2出力1入力系のゲインと最大特異値 $\sigma_{\max}$

さて, H_∞ ノルムの意味を知るためには, 前述した入出力の振幅比が, いかなる場合に数値計算の結果である 2.1025 になるかを示せばよいのであろう。そこで, まず,

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 0.886t, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 0.886t$$

を入力した。その結果を Fig.4 に示す。ただし, 振幅は $\sqrt{A^2+B^2} = 1$ なる条件から, $A = B$ として決めている。Fig.4 によると, z/w_1 (w_1 に対する z の応答) と z/w_2 (w_2 に対する z の応答) との位相がずれていることがわかる。このとき, z の振幅は 1.9153 で H_∞ ノルムの 2.1025 より小さい。すなわち, この入力是最悪外乱ではない。

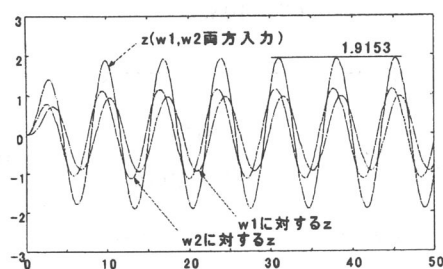


Fig.4 $z/w_1, z/w_2$ と $z/w_1 + z/w_2$

つぎに, z/w_1 と z/w_2 との位相をそろえるために,

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 0.886t, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(0.886t + 5.4)$$

を入力した。その結果を Fig.5 に示す。Fig.5 によると, z/w_1 と z/w_2 との位相はそろっている。しかし, z の振幅は 2.0937 で H_∞ ノルムの 2.1025 より小さい。

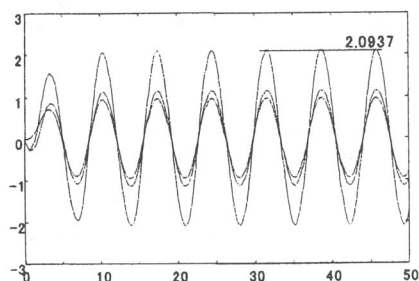


Fig.5 $z/w_1, z/w_2$ と $z/w_1 + z/w_2$

z/w_1 および z/w_2 の振幅が等しいと H_∞ ノルムが得られないので, z が最大の振幅となる w_1 および w_2 の振幅を試行錯誤で求めた。この入力はずぎの通り。

$$w_1 = \sqrt{\frac{412}{100}} \sin 0.886t, w_2 = \sqrt{\frac{588}{100}} \sin(0.886t + 5.4)$$

この結果を Fig.6 に示す。 z の振幅は 2.1019 で H_∞ ノルムの 2.1025 より若干小さいが, この差は w_1 および w_2 の位相差や振幅をより細かく設定すれば埋められると思われる。

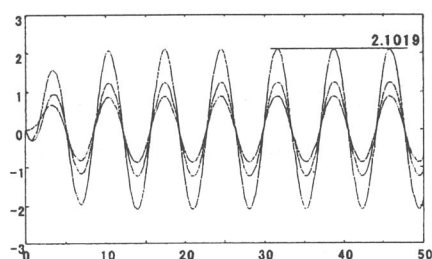


Fig.6 $z/w_1, z/w_2$ と $z/w_1 + z/w_2$

ここでは, $\|w\|_2$ の振幅が 1 となる正弦波 w の位相および振幅を, 制御量 z の振幅が最大となるように検索して H_∞ ノルムを求めた。1 出力のために z の振幅で H_∞ ノルムを求めることができたが, 2 出力以上の場合は $\|z\|_2$ の振幅を最大にする w が最悪外乱であり, 最悪外乱が入力されたときの $\|z\|_2$ の振幅が H_∞ ノルムとなる。

実際の外乱 $\|w\|_2$ が, $\|z\|_2$ を最大にするような位相差や振幅をもつ最悪外乱であるとは考えにくい。 H_∞ 制御は最悪外乱が入力された場合でも閉ループ系を安定にする補償器を設計するが, 最悪外乱が入力される可能性はほとんどないので, H_∞ 補償器は実際にはあまりにも保守的なコントローラということになろう。」

熊さん「実系数行列 A について $A^T A$ の固有値 λ_i の平方根を特異値 σ_i というのが, A に対して $A^T A$

を考える理由, どんな利点があるのですかい?

(たとえばエネルギーの概念を組み入れやすいとか)

$A^T A$ の固有値を考えた理由, その利点は何ですか
い? また, $G(j\omega)$ の共役転置行列 $G(j\omega)^*$ を考
えた理由は何ですか? $G(j\omega)^* G(j\omega)$ の固有値を
考えているが, $G(j\omega)$ 単独の固有値なんて意味な
いのですかい?」

ご隠居「この質問は「ベクトル・行列」の教科書の
受け売りになるが, ノルムについての記述した箇
所を引用して説明に変えることにしよう。

1). 3次元空間 R^3 において, $a = (a_1 a_2 a_3)^T$ (こ
こに T は転置) の長さ $|a|$ は, ピタゴラスの定理

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a^T a} \quad (27)$$

となった。このことを参考につぎの定義を与えた。

n 項数ベクトル空間 R^n のベクトル a に対して

$$\|a\| = \sqrt{a^T a}$$

とおき, a の長さ, またはノルムという。

これまでは, 平面や3次元空間だったこともあり,
ベクトル a の長さを $|a|$ と書いてきた。長さ
という概念は, 定義するも何もはじめから知って
いる明白な概念であった。しかし, 平面や3次元
空間を超えた一般のベクトル空間においては, 長
さは明白なものというより, 定義されなければな
らないものである。この場合, 長さ $\|a\|$ と書かれ
ることが多い。いままで, $|a|$ と書いてきた部分
もすべて, $\|a\|$ でおきかえてよいのである。[な
つとくする行列・ベクトル 講談社 川久保勝夫
p.220]

$$2). \text{ マトリクス } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ & & & \vdots \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{ji} & \cdots & \cdots & a_{ji} \end{pmatrix} \text{ におい}$$

ては, $\sqrt{\lambda_i(A^T A)}$ と $A^T A$ の固有値を用いることで,
それぞれが独立ベクトルの長さを表わすことがで
きる。

3). 複素数 C 上のベクトル空間において,
 $G(j\omega) = (g_1(j\omega) g_2(j\omega) \cdots)^T$ と $G(j\omega)$ の共役転
置である $G(j\omega)^* = (g_1(j\omega) g_2(j\omega) \cdots)^T$ より, つ
ぎの定義を与える。

$$\|G(j\omega)\| = \sqrt{G^*(j\omega) G(j\omega)} \quad (28)$$

とおき, $G(j\omega)$ の長さ, またはノルムという。

ここで,

$$(G^*(j\omega) G(j\omega))^* = G^*(j\omega) (G^*(j\omega))^* = G^*(j\omega) G(j\omega) \quad (29)$$

よって, $G^*(j\omega) G(j\omega)$ は, エルミート行列とい
い, その固有値は実数となる。[なつとくする 行
列・ベクトル p.228]

つまり, ベクトル a , マトリクス A , 複素関数
 $G(j\omega)$ のノルムの定義であるから, $G(j\omega)$ 単独の
ノルムそのものに意味はないし, 考える必要もな
いのじゃ。」

熊さん「ロバスト制御というのが, どうして H_∞
制御に結びついたのですかい?」

ご隠居「1981年 Zames の論文が H_∞ 制御理論のは
じまりだといわれているが, ロバスト制御につい
ての研究の流れから派生してきたことにはまちが
いない。ロバスト制御とは, プラントの動特性の
変動にもかかわらず, 所望の性能が確保できて
ることをいい, それには2つの課題がある。つまり

ロバスト安定性：動特性が変動しても閉ループ系の安定性が保持できる。

定常ロバスト：動特性が変化しても定常偏差が0に保持できる。

ロバスト制御性能：動特性が変動しても過渡応答が変化しない。

いま，つぎのようなフィードバック制御系を考えよう。

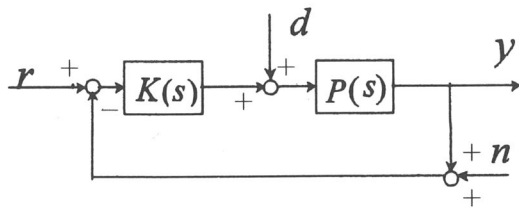


Fig.7 フィードバック制御

外生入力 $r(s)$, $n(s)$, $d(s)$ から出力 $y(s)$ への閉ループ伝達関数は

$$y(s) = T(s)r(s) - T(s)n(s) + S(s)P(s)d(s) \quad (30)$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} T(s) &= \frac{KP}{1+KP} \\ S(s) &= \frac{1}{1+KP} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

目標値追従特性を考えれば， $T(s) \rightarrow 1$ がよいが，雑音除去特性は $T(s) \rightarrow 0$ が理想である。また，外乱抑制特性を考えれば $S(s) \rightarrow 0$ が理想である。この閉ループ系の周波数特性の $T(s)$, $S(s)$ の設計仕様は H_∞ ノルムを導入すると，つぎのように定式化できる。

$$J(T, S) = \left\| \begin{array}{l} W_1 S(j\omega) \\ W_2 T(j\omega) \end{array} \right\|_\infty \quad (32)$$

ここに， W_1 (積分特性) W_2 (微分特性) は重み関数であり，式 (32) を最小化する制御系の設計問題に発展した。

実際は，式 (31) からわかるように $T(s) +$

$S(s) = 1$ なる制約があるから，高周波成分を含む雑音の影響を抑えるために， $T(s)$ はローパス特性をもたせることになる。そうすると， $S(s)$ はハイパス特性をもつことになる。 $P(s)d(s)$ は低周波域で利いてくるから，過渡状態に対しては少々のは目はつぶるとしても定常特性に対しては極力避けたいという要求に合致していることになる。」

3. H_∞ 制御問題

H_∞ 制御問題において一般化制御対象をつぎのように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに， x は状態量， z は制御量， w は状態外乱， u は操作量， y は出力である。DGKF 法では，一般化制御対象は以下の条件を満たしてなければならない。

- (1) (A, B_1) 可安定かつ (C_1, A) 可検出
- (2) (A, B_2) 可安定かつ (C_2, A) 可検出
- (3) $D_{12}^T C_1 = B_1 D_{21}^T = 0$, $D_{12}^T = D_{12} D_{21}^T = I$
- (4) $D_{11} = 0$ かつ $D_{22} = 0$

ここで，条件(1)，(2)は G_{zw} の内部安定化のために必要な仮定。条件(3)は直交条件および正規化条件。条件(4)は一般化制御対象をプロパとする仮定である。

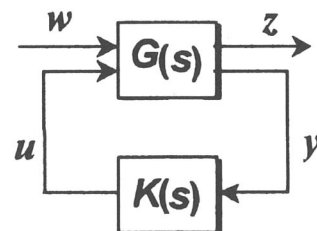


Fig.8 H_∞ 制御問題

八つあん「ご隠居、そうすると、目標値 r から制御量 c への閉ループ伝達関数は

$$\frac{c}{r} = \frac{K(s)P(s)}{1+K(s)P(s)} \quad (1)$$

ですから、コントローラのゲイン $K \rightarrow 0$ にすればよいことになりませんか。つまり、コントローラを設置しない方がよいと…」

ご隠居「ある値以下というからどんな値でもよいが、0 ではそのようなコントローラは設計不能となる。その意味で制御量 c を目標値に一致させる servo 問題は H_∞ 制御の定式化には馴染まない。通常、偏差 $e = r - c$ をとって、 r から e への閉ループ伝達関数がある値以下にする問題に変換する。つまり、 H_∞ 制御では、設計仕様に合せて、外生信号 w および制御量 z を選ぶことが重要となるのじゃ。」

八つあん「 H_∞ 制御では外生信号 w の中に目標値 r も含めてしまうのですかい？」

ご隠居「その通り。 H_∞ 制御では、外部から入る信号をすべて外生信号 w として扱ってしまう。だから、外乱も目標値 r も測定ノイズ w_n も区別しない。これらの点については H_∞ 制御問題を定式化する上で大切なことだから、あとで説明することになるだろう。」

八つあん「(1), (2) は G_{zw} の内部安定化のための前提条件とありますが、内部安定化とは何ですか？それに対して外部安定という概念もあるのですか？」

ご隠居「制御工学の本によれば、つぎのように説明されておる。

(1)内部安定 (制御工学 須田信英著 p.110)
状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (a)$$

において、解は、

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (b)$$

である。

ここで、システムのゼロ入力応答について考える。初期状態を $x(t) = e^{At}x_0$ とすれば、ゼロ入力応答は(b)より

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (c)$$

となる。ここで、どのような x_0 に対しても $t \rightarrow \infty$ で $x(t) \rightarrow 0$ となるとき、システムは内部安定 (internally stable)あるいは、リアプノフの意味で漸近安定 (asymptotically stable in the sense of Lyapurov)である。システムが内部安定である必要十分条件は、 A の固有値、つまり $\det(sI - A) = 0$ の根がすべて負の実数部分をもつことである。

(2)外部安定 (制御工学 須田信英著 p.112)

システムのゼロ状態応答について考える。

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (d)$$

で与えられる。ここで有界な入力、つまりある適当な正の数 K_1 に対して

$$|u(t)| \leq K_1 < \infty \quad 0 \leq t < \infty \quad (e)$$

を満たす $u(t)$ に対して、出力も必ず有界である。

つまり、ある適当な正の数 K_2 に対して

$$|y(t)| \leq K_2 < \infty \quad 0 \leq t < \infty \quad (f)$$

がなりたつとき、システムは、外部安定 (externally stable), あるいは入出力安定 (input-output stable), あるいは有界入力有界出力安定 (bounded-input-bounded-output stable, 略して BIBO 安定)という。システムが外部安定である必

要十分条件は, 伝達関数 $G(s)$ の極

からといって, 内部安定であるということとはなり
たない。

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (g)$$

(ここで, $d(s)$ と $n(s)$ が既約であるとすれば)
において

$$d(s) = 0 \quad (h)$$

の根がすべて負の実数部分を持つことである。こ

こで, 既約とは, 分母多項式

$$d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (i)$$

分子多項式

$$n(s) = \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0 \quad (j)$$

とおくと, $d(s)$ と $n(s)$ をそれぞれ因数分解した
ときに共通因子がないと, すなわち n 次より小さ
い内部表現が存在しないことである。

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0} \\ &= \frac{(s-b_1)(s-b_2)\cdots}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots} \end{aligned} \quad (k)$$

のとき, $a_1, a_2, \dots, a_n \neq b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ である。

(3) 内部安定と外部安定 (制御工学 須田信英著
p.115)

システムが可制御かつ可観測であれば

$$\det(sI - A) = d(s) \quad (l)$$

である。したがって, 内部安定と外部安定は同じ
である。もし, 可制御性が可観測性か少なくとも
どちらか一方が成り立たない場合には, $\det$
 $(sI - A)$ と $c \operatorname{adj}(sI - A)b$ とに共通因子があり,
それが約分した結果が $d(s)$ と $n(s)$ とに一致する。
約分された共通因子を $\varphi(s)$ とすれば,

$$\det(sI - A) = d(s)\varphi(s) \quad (m)$$

となり, $\varphi(s) = 0$ の根の中に実数部分が負でない
ものがある可能性がある。したがって外部安定だ

「受理年月日 2001 年 7 月 9 日」