

制御理論講話 (その 2)

— H_∞ 制御 —

猪瀬善郊, 黒須 茂, 山崎敬則*, 野田善之**

A Lecture on Control Theory (Part2)

— H_∞ Control —

Yoshihiro INOSE, Shigeru KUROSU, Takanori YAMAZAKI*, Yoshiyuki NODA**

1*****

八つあん「条件 (4) $D_{11} = 0, D_{22} = 0$ は w が z に直達項がない, u が y に直達項がないことを規定している。それがどうして一般化制御対象を厳密にプロパーとしていることになるのですか？」

ご隠居「直達項がないから, 印加された入力はあるダイナミックスをもって出力される。よって, 厳密にプロパーとなることを例で説明しよう。

[直達項なし]

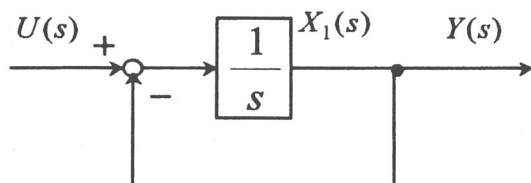


Fig. 9

$$Y = X_1(s)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s}(U(s) - X_1(s))$$

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)X_1(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \quad (34)$$

*) 平成 4 年度機械工学科卒業(現東京都立高専助手)

**) 平成 12 年度電子システム専攻科卒業生(現豊橋技術大修士課程)

よって, $G(s)$ は厳密にプロパーになる。

[直達項あり]

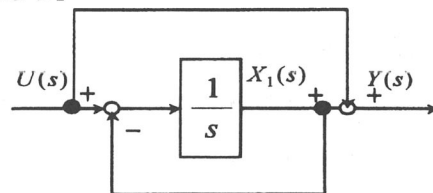


Fig. 10

$$Y(s) = X_1(s) + U(s)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s}(U(s) - X_1(s))$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s+1}U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s+1} \quad (35)$$

よって, $G(s)$ はプロパーになる。」

熊さん「ところで, ご隠居, リアプノフの安定判

別によれば, $\frac{dx}{dt} = Ax$, $V(x) = x^T Y x$ を定義し

て $\frac{dV}{dt} < 0$ であるような $Y = Y^T > 0$ が存在す

れば, そのシステムは安定である。

H_∞ 制御では,

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (36)$$

を定義して, $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ が存在すれば H_∞ 補償器 $K(s)$ は設計可能です。この 2 つの問題は似ていませんか。つまり, H_∞ 制御はもと

もと力学系から生まれた理論ではないですか。それであれば、すべて力学系に結びつけることができるのではないのでしょうか？」

ご隠居「 H_∞ 制御は、外乱から制御量までの伝達関数 $G_{zw}(\omega)$ の H_∞ ノルム $\|G_{zw}\|_\infty$ を γ 以下にする制御のこと。(H_∞ 制御入門 早勢 実 p.111) $\|G_{zw}\|_\infty$ は、外乱から制御量までの伝達関数 G_{zw} の周波数応答の絶対最大値で定義される。このことから、評価関数 $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$ は、周波数応答にも基づいたものであり、力学系から生まれたものではないと思うよ。もっとも H_∞ 制御問題を微分ゲームとしてとらえ、変分法で解いている解説(計測と制御 36-11)もあるから、まったく問題ないともいえないがね。(参考: MATL AB による制御系設計 p.101~p.105)」

熊さん「 H_∞ 制御問題とは、外生記号 w から制御量 z までの通過特性の H_∞ ノルムをある有界な値 γ 以下にする補償器 $K(s)$ を求める問題である。この問題は定式化すると、式(36)のように書ける。しかし、これがどうして Ricatti の方程式の解の存在に結びつくのですか？」

ご隠居「おいおい、いきなり本論に入ってきたな。それは長屋のたな賃で食っているこのわしには荷が重すぎるな。とにかくお寺の和尚からきいた説法をそのまま受け売りするがね。」

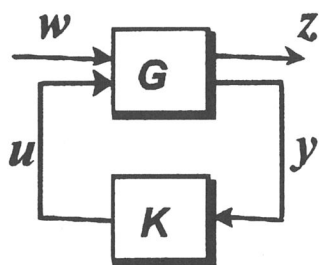


Fig. 11 H_∞ 制御の証明

まず、一般化制御対象 G および補償器 K からなる構成系に対して、

1° 構成系 (制御なし)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (37)$$

に対して、つぎの3つの条件が等価であることを証明している。

- (1) $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$
- (2) $\gamma^2 I - G^* G > 0$
- (3) つぎの Ricatti 代数方程式の解が存在する。

$$A^T P + PA + \gamma^{-2} P B B^T P + C^T C = 0 \quad (38)$$

さらに Ricatti 代数方程式の半正定解 $P \geq 0$ が存在すれば、 A が安定となることを Lyapunov 方程式から導いている。つぎに、

2° 構成系 (制御あり)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \end{cases} \quad (39)$$

に対して、つぎの2つの条件は等価であることを証明している。

- (1) $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$ かつ A が安定
- (2) つぎの Ricatti 代数方程式の半正定解 $X \geq 0$ が存在する。

$$A^T X + X A + X (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C^T C = 0 \quad (40)$$

この証明は周波数領域からのアプローチで伝達関数マトリクスを駆使して証明しているが、時間領域における最適制御 (LQ 制御) から評価関数を負にする必要十分条件からまったく同じ結果を得ている。

さらに、DGKF 法では、

3° 構成系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (41)$$

と拡張して、制御できる量 z と観測できる量 y と

区別したから、つぎのオブザーバ

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}y \\ u &= \hat{C}\hat{x} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

を接続した場合の構成系で論議している。この当りから2つの Ricatti 代数方程式が生まれたと思うよ。」

熊さん「ご隠居、 $u = \hat{C}\hat{x}$ においてPIDコントローラのような動特性がでてくるのですか？」

ご隠居「 $\hat{x}$ は状態ベクトルだから、動特性を考慮しているに決まっておるのじゃ。」

熊さん「 H_∞ 制御では H_∞ ノルムが大きくなるのが最も不利である。つまり外生記号 w が制御量 z に対して不感であればいいといっているのですか？」

ご隠居「外乱抑制、目標値追従、雑音除去などの主要な特性は γ をより小さくすることにより向上できる。オブザーバの追従性や速応性は状態の重み、例えば b_1, c_1 に依存するなんていうことは、ある程度いえるがね。」

熊さん「文献^{3, 4)}で例題をとりあげて、説明しているだろう？よく読んでみると矛盾だらけでさっぱりこちとらにはわかんねえ。まず、例題から説明してもらえませんか？」

4. 2次系の例題

4.1 レギュレータ系

つぎの一般化制御対象に対するレギュレータ問題を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ z_u \\ z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & 0 & b_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_n \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (43)$$

ここで、 $a_1=2, a_2=1$ とする。一般化制御対象を状態線図で表すと、Fig.12となる。なお、 x_1, x_2

:状態量, z_u :制御量(操作量), z_1, z_2 :制御量, y :観測量, w_n :観測ノイズ, w_1, w_2 :状態外乱であり、 b_1, b_2, c_1, c_2 は、それぞれの重み係数である。

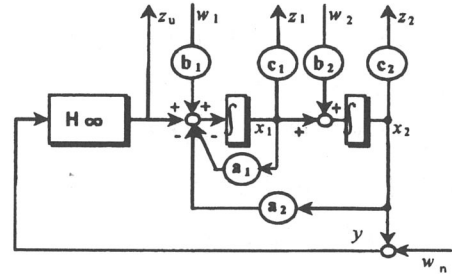
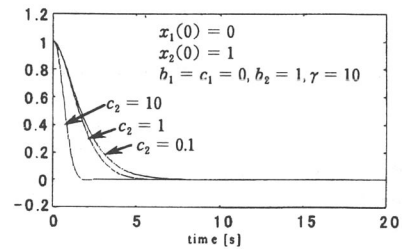
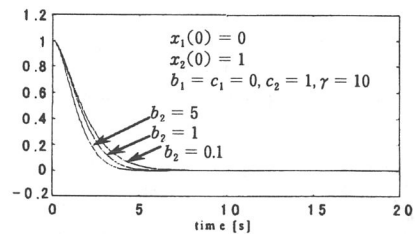


Fig. 12 一般化制御対象

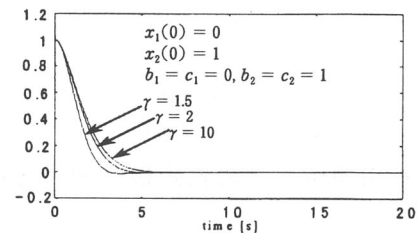
Fig.13(a)~(c)は初期値 $x_1(0)=0, x_2(0)=1$ に対する応答で、(a)は b_1, b_2, c_1, γ を固定して c_2 を可変、(b)は b_1, c_1, c_2, γ を固定して b_2 を可変、(c)は b_1, b_2, c_1, c_2 を固定して γ を可変にした場合の結果である。



(a) x_2 の初期値に対する応答(重み c_2 可変)



(b) x_2 の初期値に対する応答(重み b_2 可変)



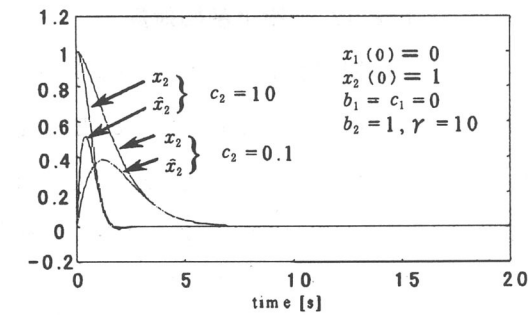
(c) x_2 の初期値に対する応答(γ 可変)

Fig. 13 初期値に対する応答

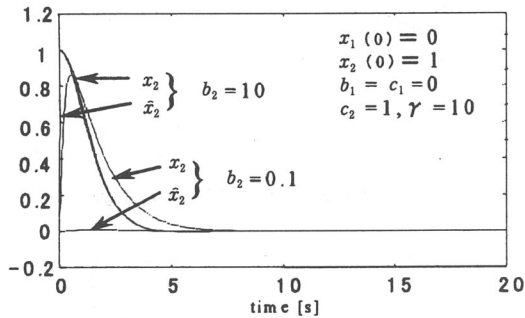
Fig.13(a)によると、 z_2 の重み c_2 を大きくすると x_2 の0への収束が速くなることがわかる。また、Fig.13(b)の結果から、 w_2 の重み b_2 を大きくしても

x_2 の 0 への収束が速くなることがわかる。さらに, Fig.13(c)によると, γ を小さくすることでも同様の結果が得られる。

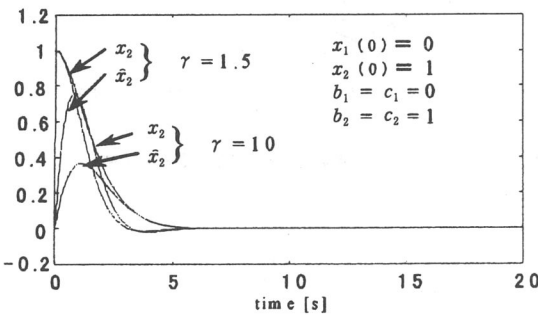
Fig.14(a)~(c)は x_2 の 0 への収束が速くなる原因を探るために, 初期値 $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ に対する応答の x_2 と x_2 の推定値 $\hat{x}_2$ とを比較した結果で, Fig.13 と同様に, (a)は b_1, b_2, c_1, γ を固定して c_2 を可変, (b)は b_1, c_1, c_2, γ を固定して b_2 を可変, (c)は b_1, b_2, c_1, c_2 を固定して γ を可変にした場合の結果である。



(a) $\hat{x}_2$ の x_2 に対する追従性 (重み c_2 可変)



(b) $\hat{x}_2$ の x_2 に対する追従性 (重み b_2 可変)



(c) $\hat{x}_2$ の x_2 に対する追従性 (γ 可変)

Fig. 14 初期値とその推定値に対する応答

Fig.14(a)によると, c_2 を大きくすることで x_2 の 0 への収束は速くなるが, $\hat{x}_2$ の x_2 への追従はそれほどよくなることがわかる。ここで, 最適制御系では分離定理 (フィードバック系とオブザーバとの極が分離して配置できること) が成り立つ

が, H_∞ 制御系では成り立たないことに注意しよう。

Fig.14(b)の結果から, b_2 を大きくすることで x_2 の 0 への収束が速くなると同時に $\hat{x}_2$ の x_2 への追従性もよくなることがわかる。これは, H_∞ 制御系では分離定理が成り立たないとは言え, b_2 がオブザーバゲイン Y を決めるリカッチ方程式に影響するためであると考えられる。

Fig.14(c)によると, γ を小さくすることでも x_2 の 0 への収束が速くなることがわかる。ただし, $\hat{x}_2$ の x_2 への追従性は c_2 を大きくしたときよりは良いが, b_2 を大きくしたときよりは悪くなっている。つまり, γ を小さくすることは, c_2 を大きくすることと b_2 を大きくすることとを, それぞれの効果は小さくなるが, 同時に行っていると考えられる。

4.2 サーボ系

つぎの制御対象に対して H_∞ 補償器を設計する。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (44)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

ここで, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 1$ とする。一般化制御対象をつぎのように定義する。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B}_1 & \overline{B}_2 \\ \overline{C}_1 & \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} \\ \overline{C}_2 & \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (46)$$

式 (44), (45) を式 (46) の一般化制御対象へ適用すると, つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ z_u \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ w_{n1} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix} \quad (47)$$

この一般化制御対象を, Fig.15 の状態線図で表す。

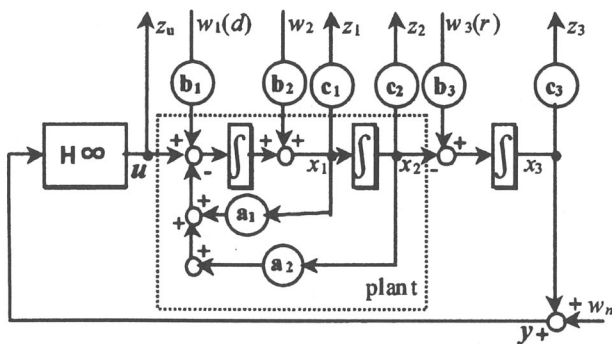


Fig. 15 一般化制御対象

ここで, $x_1 \sim x_3$:状態量, z_u :制御量 (操作量), z_1 , z_3 :制御量, z_2 :制御量 (出力を制御量と見たもの), y :観測量, w_n :観測ノイズ, w_1 :状態外乱 (外乱), w_2 :状態外乱, w_3 :状態外乱 (目標値) とする。 $b_1 \sim b_3$, $c_1 \sim c_3$, は, それぞれの重み係数であり, すべて1とした。また, 目標値 $w_3(r)$, 外乱入力 $w_1(d)$ に対する定常偏差をなくすために, 積分器を付加する。

熊さん「この例題では, 目標値追従特性または外乱抑制特性を主眼にしているか設計者の狙いがはっきりしてません。だいたい, 重み係数 $b_1 \sim b_3$, $c_1 \sim c_3$ をすべて1としたという前提は何を根拠にしているんですかい。」

ご隠居「まあまあ, そう矢つぎ早にたたみかけるんじゃない。これは例題であるために, すべての入力, 出力の重みを1にしたまでじゃ。そうすれば, 周波数特性は z_2/r のゲインが1番大きくなるから, 目標値追従特性が良好となることになるわけじゃ。」

5. 1次おくれ+むだ時間系の例題

文献4) では, 重み係数マトリクス B_1 と C_1 に, $c_1 \sim c_4$ と $d_1 \sim d_4$ をとり, 読者に混乱を招いた。そこで文献6) では, それぞれに $b_1 \sim b_4$ と

$c_1 \sim c_4$ に訂正している。本稿では訂正した記号を用いて話を展開することにする。 H_∞ 制御系と一般化制御対象はつぎのようになる。

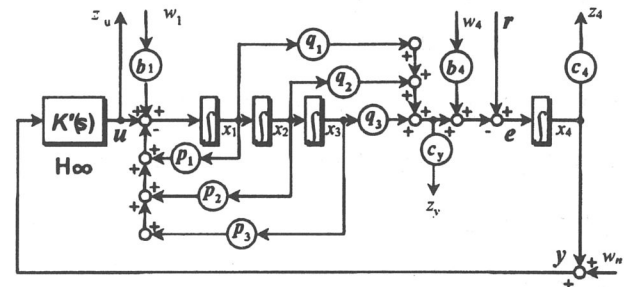


Fig. 16 H_∞ 制御系

一般化制御対象の一般的な状態方程式表現はつぎのように示される。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (48)$$

本研究で用いた一般化制御対象 (特性変動考慮なし) は Fig.16 の状態線図より, つぎのとおり。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ z_u \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_y q_1 & c_y q_2 & c_y q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ w_n \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ r \\ u \end{bmatrix} \quad (49)$$

八つあん「観測ノイズ w_n はなんのために導入したんですかい？」

ご隠居「 w_n は仮想的な観測ノイズで D_{21} の行フルランク性の条件を満たすために導入したまでじゃ。」

八つあん「目標値追従特性を良好にするために

$$\|z_4/r\|_\infty \rightarrow 0$$

にしていますね。しかし、プロセス制御ではもっぱら外乱抑制特性を良好にするのが主眼ですぜ。なぜ、外乱を考えなかったのですかい？」

ご隠居「もちろん、考えてもよい。そのさいには

$$\|z_4/w_1\|_\infty \rightarrow 0$$

を考えることになる。結局、 H_∞ 制御では目標値追従特性でも外乱抑制特性でも同じ結果になると予想してるがね……」

八つあん「そりゃあ、可笑しいじゃねえですかい。外乱に対しても目標値に対しても良い応答を示すために2自由度制御系が生まれたのではねえですかい？」

ご隠居「 H_∞ 制御では外乱も目標値もすべて外生信号として扱っていることは、さっきいったばかりじゃ。種々の応答特性の包含しているところに H_∞ 制御の威力があるんだなあ。」

八つあん「それでは制御量にプラントの出力 z_y をとらないで、偏差 e を積分した z_4 をとった理由はなぜですかい？」

ご隠居「外乱抑制のとき、プラントの伝達関数 $P(s)$ とすれば

$$|z_4/w_1| = b_1 c_y \left| \frac{P(s)}{1 + \frac{K'(s)P(s)}{s}} \right| < \gamma \quad (50)$$

となる。ここで c_y を大きくすると、伝達関数ゲインは

$$\left| \frac{P(s)}{1 + \frac{K'(s)P(s)}{s}} \right| \rightarrow \text{小} \quad (51)$$

になるのだが、逆に低周波域のゲインを上げてしまう。これが外乱の定常特性を悪化させてなかなか元に復帰しない応答を生みだす。そこで $\|z_y/w_1\|$ に周波数重み $1/s$ を考慮して $\|z_4/w_1\|_\infty$

→小 とすることによって $\|z_y/w_1\|$ の低周波域のゲインを大きくさせないことを和尚さんが思いついたのだよ⁶⁾。」

八つあん「 w_1 から z_4 への通過特性を求めると

$$\frac{z_4}{w_1} = b_1 c_4 \frac{\frac{P}{s}}{1 + \frac{PK'}{s}}$$

となり、 $b_1 \rightarrow \text{大}$, $c_4 \rightarrow \text{大}$ とともに同じ効果を与えると思うんですがね？」

ご隠居「 $\gamma \rightarrow \text{大}$ としてリカッチ方程式を書くと、

$$A^T X + XA - X B_1 B_2^T X + C_1^T C_1 = 0 \quad (52)$$

$$A Y + T A^T - Y C_1^T C_2 Y + B_1 B_2^T = 0 \quad (53)$$

となるので、 b_1 はオブザーバゲイン (Y) に影響し、 c_4 はフィードバックゲイン (X) に影響するので、ちがった影響を与える。どちらかを大きくしてもよいというわけにはいかないのじゃ」

八つあん「偏差 e を制御量に選ぶと、 D_{11} が0でなくなり、DGKF法で H_∞ 補償器が求められないとはどういうこってすかい？」

ご隠居「 H_∞ 制御系のブロック線図より

$$e = r - b_4 w_4 - q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3$$

と書けるから、 e に r と w_4 が陽にでてきて $D_{11} \neq 0$ となってしまうのじゃ。I動作を入れてやれば状態量 x_4 が出現して、制御量 z_4 は x_4 に関与するだけで、 r と w_4 とは分離されて $D_{11} = 0$ となるわけじゃ。」

八つあん「それじゃ、偏差 e は永遠に制御量にはなれないということですかい。それではLQ問題(レギュレータ)と矛盾しないんですかい？」

ご隠居「そういうことだ。偏差に周波数重みを付加するということは偏差の積分値を小さくしよう

としていることであり、LQ問題と矛盾するわけではない。」

八つあん「さて、状態外乱 w_4 がない、つまり、 $b_4 = 0$ の場合、 $\|z_4/r\|_\infty \rightarrow 0$ を H_∞ 制御問題で実現するには、 z_4/r の H_∞ ノルムが外乱 w から制御量 z までのあらゆる通過特性、すなわち、 r, w_n の2つの外生入力から z_u, z_y, z_4 の3つの制御量への6つの通過特性（ゲイン）の最大値となっていなければならないとありますが、こりゃどういうことですかい？」

ご隠居「 $\|z_4/r\|_\infty \rightarrow 0$ を実現するために $\|z_4/r\|_\infty < \gamma$ の形にする必要がある。よって、外乱 $w \rightarrow$ 制御量 z のあらゆる通過特性の最大値となれば、 $\|z_4/r\|_\infty < \gamma$ の形になり、 γ を小さくすることで、 $\|z_4/r\|_\infty \rightarrow 0$ が実現するわけじゃ。」

八つあん「文献⁴⁾では、6つの通過特性を示してますね。ほかの重み c_u とか c_y とか1にして z_4 にかかる重み c_4 だけを800にすることで、 $|z_4/r|$ が最大値をとっているから、目標値追従特性が良好となるといってます。そんなべら棒な話はありません。重みなんていうものは勝手に大きくしていいんですかい？」

ご隠居「そりゃあ、おめえさんがいったLQ問題だって同じだよ。設計問題とはつねに設計者が勝手にとる箇所があるんだよ。それをどういう値にとるのは経験と勘がものをいうのだ。」

八つあん「またまたご隠居はごまかした。自分がちょっと都合悪くなると、いつも煙に巻いちゃうだから…」

ご隠居「おいおい、人聞きの悪いことをいうなよ。わしだって、和尚さんの受け売りだからね。でも、おめえさんたちよりは少しはわかっているだけじゃ。」

もう少し、わかり易くいうと、 z_4/w_1 の通過特性は積分器により低周波域の重みに増大するので、 γ を小さく、そして b_1, c_4 を大きくすることで、 z_4/w_1 の通過特性の低周波域のゲインを減少させることができる。その結果、外乱抑制特性は良好となるわけじゃ。」

熊さん「I型サーボ系となるようにプラントに積分器を付加しましたね。これはPIDコントローラと関連づけたために入れたのではねえですかい？」

ご隠居「 H_∞ 補償器にはオフセットを除去するためにI動作を、減衰を増すためにD動作を入れるという構造になっていない。もともとはLQ問題に近い。だからPIDコントローラと比較検討したければ、予めI動作ならびにD動作を組み込んでおけばよい。ただし、D動作は状態フィードバックが片替りしているがね。この場合には周波数重みとして積分器を考慮したと考えるのが自然だがね…」

熊さん「プラントの出力 x_3 の z_y とし、 z_y は制御量（出力を制御量と見ている）である。一般化制御対象には、出力という概念はないですかい？コントローラ $K(s)$ の入力を観測量 y とするのは、物理的に可笑しいんじゃないですかい？」

ご隠居「一般化制御対象には、出力という概念はない。最終的にはI動作のあとの x_4 に観測ノイズ w_n を加えて、 y を観測量としている。一般化制御対象をつくる上で、便宜上観測量 y としているのじゃ。」

熊さん「I動作のあとの x_4 に関心があるわけではないので、そこに y として観測量とした点は人為的なことなのですか。そうしないと困るのですかい？」

ご隠居「その通り，便宜的に観測量としている。

$y = x_4 + w_n$ とすることで， H_∞ 補償器に直接観測ノイズが印加する。こうすることで， $D_{21}D_{21}^T = 1$ となり，DGKF 法が扱える。」

熊さん「 $b_1 \sim b_3, c_1 \sim c_3$ の値を変えても， r から z_y へのステップ応答にほとんど影響しなかったのだからとした理由はなんですかい？」

ご隠居「重み係数 $b_1 \sim b_3, c_1 \sim c_3$ を与えて， $\|H_\infty\| < \gamma$ を解いた結果， r から z_y へのステップ応答に差異はなかったという和尚のいい方はまちがっているね。制御仕様の外乱抑制特性に関係ないから重みなんか0でよいのだ。」

熊さん「 $b_1 \sim b_3, c_1 \sim c_3$ を0にしたにもかかわらず，一般化制御対象に残しておく理由はなんですか。計算上，可笑しいことが起きないのですか？」

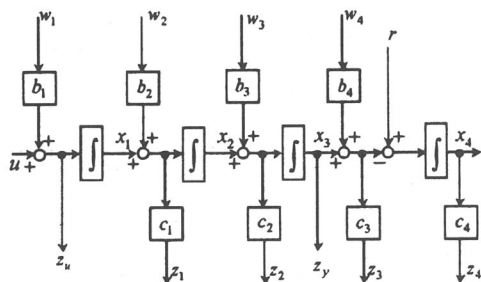


Fig. 17 重み関数

ご隠居「 B_1 マトリクス上の $b_1 \sim b_4$ を0にすることと，その列を削除することとは，Riccati 代数方程式で用いる $B_1 B_1^T$ が同じマトリクスになることから， B_1 マトリクス上に $b_1 \sim b_4$ を残しておいても $b_1 \sim b_4 = 0$ としておけば問題はない。

① $b^1 \sim b^4 = 0$ としたマトリクス

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 B_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

② $b_1 \sim b_4$ に関わる列を削除したマトリクス

$$B'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B'_1 B_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

また， C_1 マトリクス上の $c_1 \sim c_4$ を0としても，またその行を削除しても， $C_1^T C_1$ は，同じマトリクスになる。そして， C_1 や B_1 の行や列を削除するよりも，重み $b_1 \sim b_4, c_1 \sim c_4$ を0とした方が問題に柔軟に対応できることから重み $b_1 \sim b_4, c_1 \sim c_4$ を残しているのじゃ。」

熊さん「 c_4 を大きくすることと γ を小さくすることとは等価であるといっている。だから何だといいたいのですかい。 c_4 を固定して， γ だけを小さくすればよいとでもいうのですか？」

ご隠居「その通りだ。しかし， γ を小さくすると，ほかの通過特性に影響する可能性はあるがね…おいおい，ちょうど和尚さんが家の前を通りかかったぞ。あとは和尚さんに聞いてくれよ。ちょっと，熊！和尚さんをよんでこい。」

和尚「やあやあ，煩惱のとりこの熊さんや八つあん！何か騒動でも起こったのかね？」

ご隠居「いやいや，八と熊がPIDコントローラと H_∞ 補償器にやけに興味をもちやがって，和尚さんからうまく教えてやってくれませんか。」

八つあん「和尚！文献によると，ノミナルモデルとパラメータ変動がある場合とでは補償器 $K(s)$ の次数がちがいますね。こりゃまた，どうしてです？」

和尚「そりゃあ，一般化制御対象にモデル化誤差を考慮したために状態量が1つ増えたんだ。だから補償器の次数が1つ上がったのじゃ。」

八つあん「 H_∞ 補償器の閉ループ特性では共振を示

していますが、閉ループ特性では、それが消えて応答が速く整定しています。その理由はどうしてで～す？」

和尚「 H_∞ 補償器自身が共振の項をもっており、開ループ系では、その特性がそのまま現れる。閉ループ系では、 $1+G_p(s)K(s)$ より共振の項が消えたまでじゃ。」

八つあん「文献では、制御系の閉ループ特性は、当然のことながら補償器の特性とよく似た傾向になるといってます。なにが当然といえるんですかい？」

和尚「補償器 $K(s)$ 、プラント $P(s)$ のなら閉ループ $K(s)P(s)$ だから $K(s)$ の特性が $K(s)P(s)$ の特性に反映されるのは当然だ。 $K(s)$ の極やゼロ点は、 $K(s)P(s)$ になっても変わらないのだ。」

八つあん「閉ループ系において、PID 制御では、 $0.1 \sim 1$ rad/min でゲインが 1 を超えてオーバシュートを許容している。 H_∞ 制御ではそれが無い。その理由はなんですか？」

和尚「重みの与え方で変わる。外乱応答を PID と同じにした時の H_∞ 補償器は、オーバシュートを許容することになるな。」

八つあん「 H_∞ 制御系と PID 制御系と閉ループ周波数特性 (Fig.9) を見ると、低周波域で似ていますが、高周波域においては PID 制御の方がゲインは高くなっています。これは応答特性にどのような違いになって現れるのですかい？」

和尚「ゲインの高くなった分だけ、帯域幅を広げて速応性を上げていると解釈できる。Fig.6 の目標値応答がそれを示しているのじゃ。」

八つあん「それは、D 動作のおかげでしょう。」

H_∞ 補償器には D 動作の概念はない。それでは永

久に H_∞ 制御は PID 制御を追い越せないということになりませんか？」

和尚「それはちょっと早計というもんじゃよ。観測ノイズの影響を考えると H_∞ 制御が優れていることになる。伝達特性で示すと、

$$z_y = \frac{PK'}{1 + \frac{PK'}{s}} w_n \quad (56)$$

高周波域 ($s \rightarrow \infty$) では

$$z_y \doteq PK' w_n \quad (57)$$

となるから、 K' の高周波ゲインは H_∞ では小、PID では大である。よって、観測ノイズが存在すると PID 制御では抑えられないことになる。」

八つあん「和尚の文献では、

$L_p \rightarrow$ 小 PID 制御では安定、 H_∞ 制御では不安定

$L_p \rightarrow$ 大 PID 制御では不安定、 H_∞ 制御では安定
周波数特性の観点から、その理由を説明してもらえませんか？」

和尚「PID コントローラの閉ループ特性より、ゲイン $|P(j\omega)K(j\omega)|$ は、高周波域になればなるほど、ゲインは減少する。しかし、むだ時間によってゲインは変わらない。しかし、位相 $\angle P(j\omega)K(j\omega)$ はプラントのむだ時間が増加するほど遅れるから、 -180° になる位相交点は、低周波数に移り、安定余裕は小さくなる。つまり、 $L_p \rightarrow$ 大ならば、不安定となる。 H_∞ 補償器の開ループ特性より、 $|P(j\omega)K(j\omega)|$ は、共振点をもっているために、安定性を確保する 0dB 以下になる位相交点は、 0.35 rad/min $\sim$ 1.5 rad/min と制限されている。したがって、むだ時間が変化すると位相交点も変化するので、先に示した安定性を確保する位相交点からはずれるようなむだ時間の変動では、

むだ時間が大きくても小さくても不安定となる。これより，PID コントローラは，ノミナルモデルのむだ時間に対して変動したプラントのむだ時間が小さければ安定となる。しかし， H_∞ 補償器は，共振点をもっていることから，むだ時間が小さすぎても不安定となる。この周波数特性は Bode 線図を画かせると明白になる。この事実はわしがはじめて発見したのじゃ。」

八つあん「ロバスト安定性

$$\left\| \frac{KW}{1+KP} \right\|_\infty < 1 \quad (58)$$

は補助的な条件として考えるのであって， H_∞ 制御を解く上では関係ないのですかい？」

和尚「その通り。この条件を吟味しないと，ロバスト安定性は保証されない。陽に考えているのは，あくまでも $\|z_4/r\|_\infty < \gamma$ であるのだ。ロバスト安定を満たさなければ計算はやり直しになるのじゃ。」

八つあん「和尚の文献の Fig.13 のモデル化誤差と $W(s)$ の関係が図示されているが， $P_{L=1}-P_{L=3}$ が $P_{L=6}-P_{L=3}$ よりも小さくなっている。これは $L_p \rightarrow$ 小のとき H_∞ 制御が不安定になるという Fig.11 の結果と矛盾しないですか？ $P_{L=1}-P_{L=3}$ の方が大きくなって当然と思うがね…。」

和尚「まず， $L_p \rightarrow$ 小のとき， H_∞ 補償器が不安定になるというのは，前の質問で答えている。補償器自身がつ共振点の影響が大きい。だから，モデル化誤差とは別である。そして， $L_p \rightarrow$ 小のときが，モデル化誤差が最悪になるということではなく $T_p \rightarrow$ 小， $K_p \rightarrow$ 大， $L_p \rightarrow$ 小の組み合わせが最悪になるのである。これはその組み合わせで Bode 線図上から判明したことじゃが…。」

$$\text{八つあん「 } \left| \frac{z_4}{r} \right| = \left| \frac{c_4}{s+KG_p} \right| < \gamma \quad (59)$$

$$\left| \frac{z_5}{r} \right| = \left| \frac{KW}{1+KG_p} \right| < 1 \quad (60)$$

とは，トレードオフの関係にあるというが…なにが，どのようにトレードオフの関係にあるのですかい？」

和尚「 $\left| \frac{c_4}{s+KP} \right| < \gamma$ より， c_4 を大きくすると補償器 K のゲインが大きくなる。そして， $W = \delta P$

$$\text{とすると } \left| \frac{z_5}{r} \right| = \left| \frac{KW}{1+KP} \right| < \frac{1}{\delta} \text{ より，}$$

補償器 K のゲインが大きくなるとこの条件が厳しくなる。あちらを立てれば，こちらがひっこむ，つまり設計というものはそういうものじゃよ。」

ご隠居「まあまあ。今日はその位にして，生ビールでも一杯やりましょうや。そうしなきゃあ，仏さまも成仏できませんぜ。」

熊さん「ちょっちょっと。最後にもう一つ質問させて下せえ。和尚さんが開発した H_∞ 制御の解法のノウハウを教えてくださいませんか？」

和尚「わしがこの間からやっているアルゴリズムの特長は，つぎの 2 ステップである。

- 1) ノミナルモデルに対して求められた γ と c_4 を固定して，ロバスト安定性を満たすように b_1 を小さくする。
- 2) γ を徐々に大きくして， b_1 ， c_4 をロバスト安定性を満たす範囲で大きくしていくと，外乱応答が不変となる γ と c_4 と b_1 を最終的な到達値とする。

ところで， b_1 はロバスト安定性に対する感度が高いということの意味はオブザーバゲイン Y による影響と考えられる。」

「受理年月日 2001 年 7 月 9 日」