小山工業高等専門学校研究紀要
第 35 号 (2003), 135 − 140

立体トラスにおける節点の絶対変位を算定する新解法に関する研究

Study of new solution for absolute displacement of node in space truss

山本嘉孝
Yoshitaka YAMAMOTO

[1] はじめに

一般に大スパンの屋根を構成する場合、立体トラスで作られる場合が多い。この時、立体トラスの1単位は概ね四面体であり、これを連結して屋根等が作られる。そのとき各部材に応力が作用して節点が変形・変位する。

そして各部材の許容応力の算定だけでなく、節点の変位も検証しなければならない。これは種々の解法により求めることが可能であり、電算機等で計算されている。

本研究は、既報で報告している(1-1)式の節点変位式を応用して立体トラスの各部材の節点変位を求めて、節点の絶対変位を解く新しい解法を提案する。この解法は現在のところ電算化を対象としておらず、あくまで解の手法を研究するものである。しかし電算化は容易に実施できることは推察できる。

$$\Sigma(\vec{V}+\vec{U}) = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

[2] 立体トラスにおける節点変位

1. 単位機構の諸条件

立体トラスは、図2-1のような四面体A-B-C-Dで示すような単体が結合した構造体で構成されている。この単体においてωを各部材の回転角、εを各部材の伸度（縮み）として表すことにする。

そして各節点のx、yとz軸に対する座標を以下のように表す。

A (x_1, y_1, z_1)、B (x_2, y_2, z_2)、C (x_3, y_3, z_3)、
D (x_4, y_4, z_4)

また単位機構は6個の部材で構成されている。そして個々の部材には回転角ωと伸度εが未知数として存在する。

それに回転角と伸度はx方向、y方向そしてz方向の成分から成っている。例えばA-B材のそれは ω_1

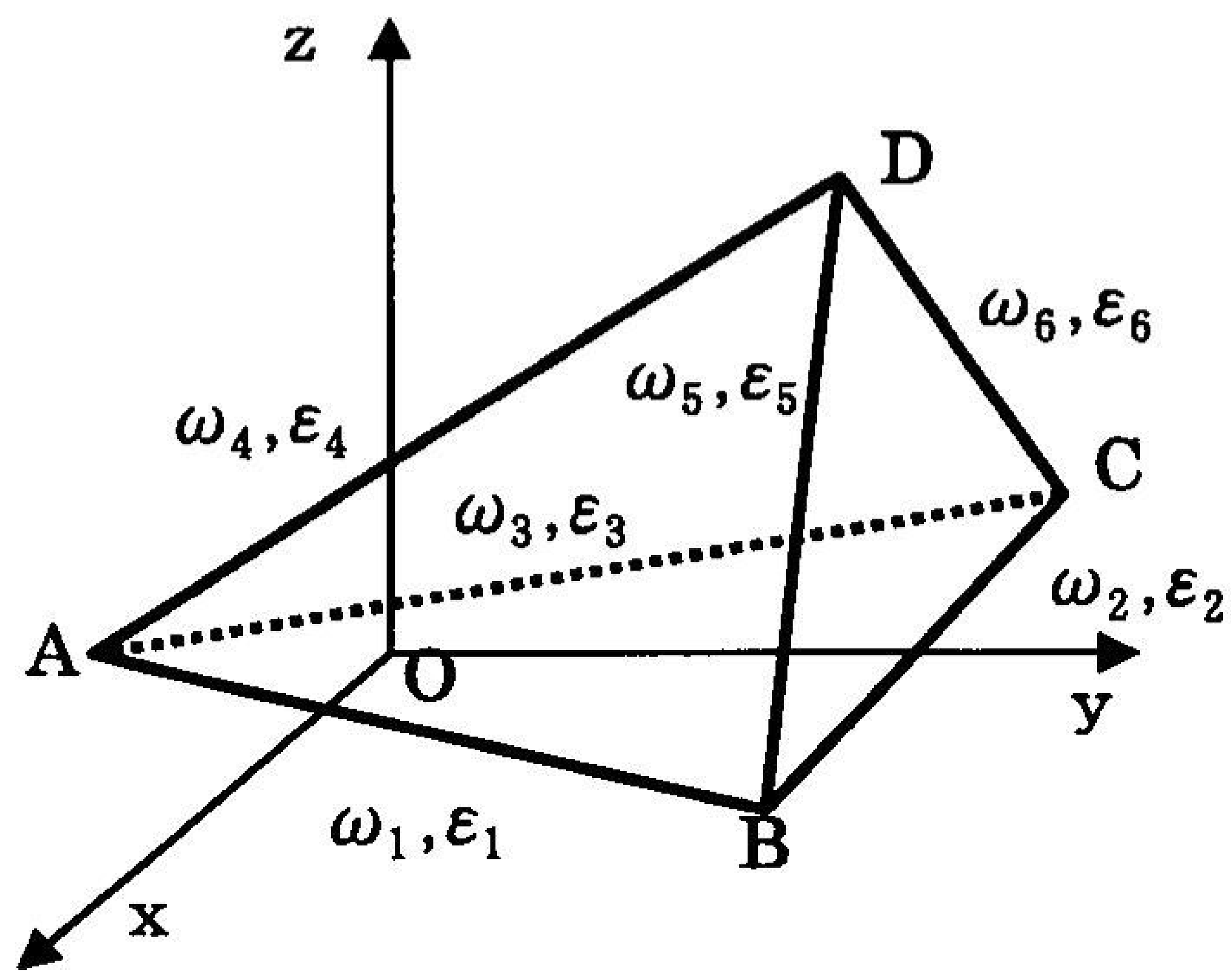

図 2-1　単位機構

とε_1で、これらは各軸方向の成分 $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$と$\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}, \varepsilon_{z1}$に分配される。しかし回転角においては各軸方向に単純に分配されるものではない。この点は十分に配慮が必要なことである。

他の部材の回転角および伸度も同様に分配される。本研究は、応力解析を行うことを主眼としておらず各部材の応力は既知という条件で検証する。

応力が既知ならば伸度はその応力により算定されるから未知数でなくなる。結局、部材1個につきx、y、z方向に対する回転角3個が未知数となり、単位機構は6個の部材を持つから合計18個の未知数を持つことになる。

2. 四面体と節点変位の解析

図2-1の四面体は4個の構面で構成されている。

それで各構面毎に節点変位式を算定し既知の項と未知の項を明らかにする。

まず構面A-B-Dに属する各部材の節点変位式を導く。このとき構面を左回りに節点変位式を算出すると便利である。そうすると構面A-B-Dを構成する3部材の各々の回転ベクトルと伸度ベクトルは

$$\vec{V}_{AB}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\{\omega_{y1}(z_2-z_1)-\omega_{z1}(y_2-y_1)\}\vec{I}\\&+\{\omega_{z1}(x_2-x_1)-\omega_{x1}(z_2-z_1)\}\vec{J}\\&+\{\omega_{x1}(y_2-y_1)-\omega_{y1}(x_2-x_1)\}\vec{K}\end{aligned}\tag{2-1}$$

$$\vec{V}_{BD}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ \omega_{x5} & \omega_{y5} & \omega_{z5}\\ x_4-x_2 & y_4-y_2 & z_4-z_2\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\{\omega_{y5}(z_4-z_2)-\omega_{z5}(y_4-y_2)\}\vec{I}\\&+\{\omega_{z5}(x_4-x_2)-\omega_{x5}(z_4-z_2)\}\vec{J}\\&+\{\omega_{x5}(y_4-y_2)-\omega_{y5}(x_4-x_2)\}\vec{K}\end{aligned}\tag{2-2}$$

$$\vec{V}_{DA}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ \omega_{x4} & \omega_{y4} & \omega_{z4}\\ x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\{\omega_{y4}(z_1-z_4)-\omega_{z4}(y_1-y_4)\}\vec{I}\\&+\{\omega_{z4}(x_1-x_4)-\omega_{x4}(z_1-z_4)\}\vec{J}\\&+\{\omega_{x4}(y_1-y_4)-\omega_{y4}(x_1-x_4)\}\vec{K}\end{aligned}\tag{2-3}$$

$$\vec{U}_{AB}=(x_2-x_1)\varepsilon_1\vec{I}+(y_2-y_1)\varepsilon_1\vec{J}+(z_2-z_1)\varepsilon_1\vec{K}\tag{2-4}$$

$$\vec{U}_{BD}=(x_4-x_2)\varepsilon_5\vec{I}+(y_4-y_2)\varepsilon_5\vec{J}+(z_4-z_2)\varepsilon_5\vec{K}\tag{2-5}$$

$$\vec{U}_{DA}=(x_1-x_4)\varepsilon_4\vec{I}+(y_1-y_4)\varepsilon_4\vec{J}+(z_1-z_4)\varepsilon_4\vec{K}\tag{2-6}$$

のように導かれる。(2-1)式から(2-6)式までを(1-1)式の節点変位式に代入して各単位ベクトル別に整理すれば

$$\begin{aligned}&\omega_{y1}(z_2-z_1)-\omega_{z1}(y_2-y_1)+\omega_{y5}(z_4-z_2)\\&-\omega_{z5}(y_4-y_2)+\omega_{y4}(z_1-z_4)-\omega_{z4}(y_1-y_4)\\&+(x_2-x_1)\varepsilon_1+(x_4-x_2)\varepsilon_5+(x_1-x_4)\varepsilon_4\\&=0\end{aligned}\tag{2-7}$$

$$\begin{aligned}&\omega_{z1}(x_2-x_1)-\omega_{x1}(z_2-z_1)+\omega_{z5}(x_4-x_2)\\&-\omega_{x5}(z_4-z_2)+\omega_{z4}(x_1-x_4)-\omega_{x4}(z_1-z_4)\\&+(y_2-y_1)\varepsilon_1+(y_4-y_2)\varepsilon_5+(y_1-y_4)\varepsilon_4\\&=0\end{aligned}\tag{2-8}$$

$$\begin{aligned}&\omega_{x1}(y_2-y_1)-\omega_{y1}(x_2-x_1)+\omega_{x5}(y_4-y_2)\\&-\omega_{y5}(x_4-x_2)+\omega_{x4}(y_1-y_4)-\omega_{y4}(x_1-x_4)\\&+(z_2-z_1)\varepsilon_1+(z_4-z_2)\varepsilon_5+(z_1-z_4)\varepsilon_4\\&=0\end{aligned}\tag{2-9}$$

となる。

構面 D-B-C、構面 C-A-D、構面 A-C-B も同様な式が得られる。この結果単位機構１面から合計12個の方程式が得られることが分かる。

１節で単位機構における回転角 ω の未知数は18個であることが明らかにされている。このことから6個の未知数に対して拘束条件により対処しなければならない。この処理の手法と節点変位式との融合により節点の変位を導く。

3．立体トラスの変位の解析

図 2-2 で与えられた立体トラスの各節点に関する変位を(1-1)式の節点変位式を使って解く手順を進める。

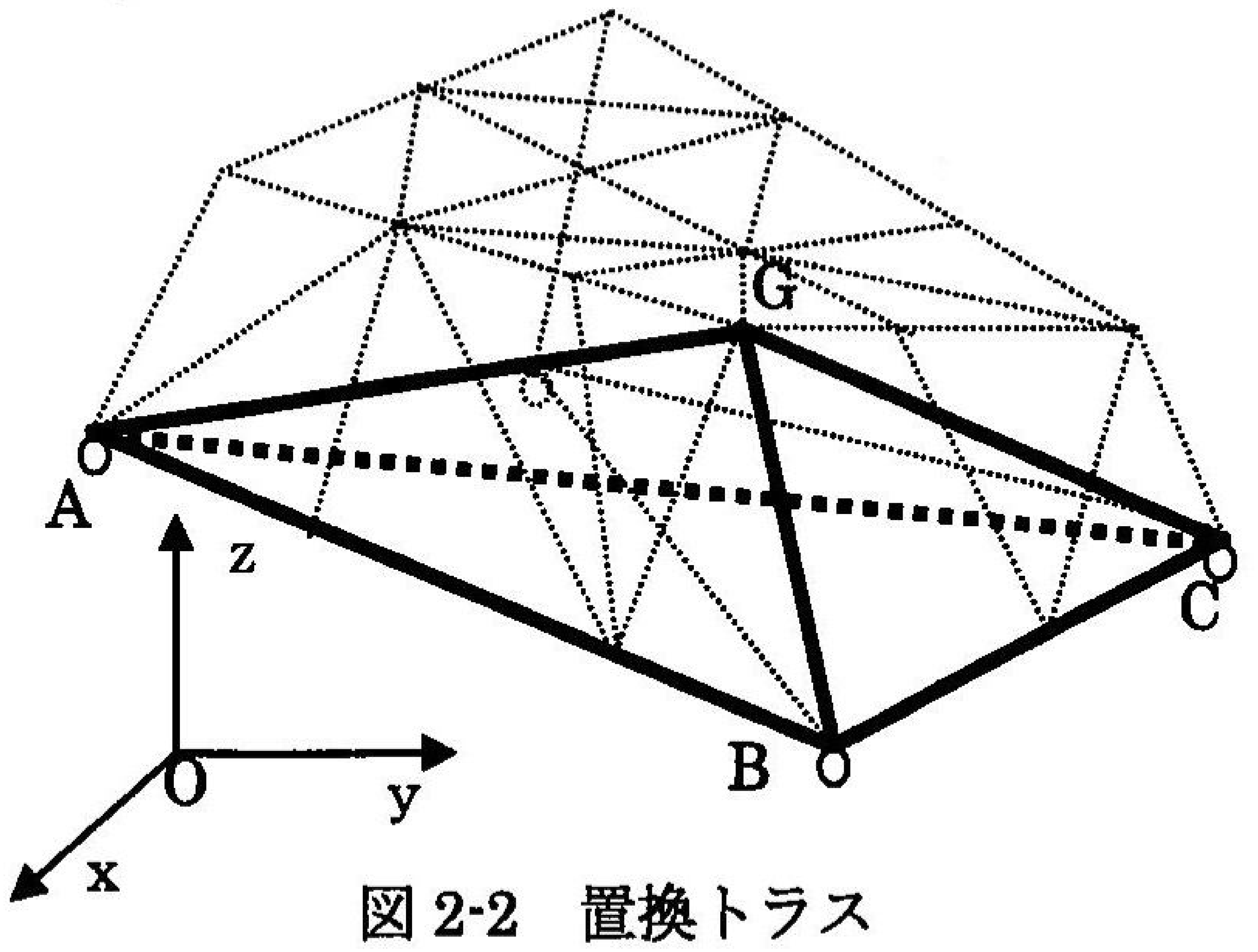

図 2-2　置換トラス

一般に、構造物はｘ方向、ｙ方向そしてｚ方向の移動と回転を拘束できるような支持点を有すれば安定であると判定できる。この拘束条件を満足するような支持点を予め選択して、安定構造物である一部分を採取する。このような構造物は本体が安定であ

りさえすれば必ず存在する。

図 2-2 の立体トラスを A 点と C 点がヒンジ支持でB点と D 点がユニバーサルジョイントと設定して各節点の変位を解析してみる。

A 点と C 点をヒンジ支持としたのは計算が容易に理解できる機構ということで、節点の変位を求める解法に関して、その汎用性に問題はない。1 節で単位機構 1 個の四面体では、18 個の未知数に比して、12 個の方程式しか立てられないことが実証されている。

まず G-B 材の回転角を求める手順を追いかけてみる。図 2-2 から置換トラス A-B-C-G を仮に設定する。このとき A-B 材、B-C 材、C-A 材、A-G 材 G-C材そして G-B 材については直線材が一直線に連結されている必要は無い。そのとき変位を拘束している 2 点間を入り組んだ部材で連結されていても支障はない。

この置換トラスから D-B 材以外の各節点間を連結する部材は仮部材である。すなわち仮部材の回転角と伸度を求めるのであるが、その後の計算、あるいはその結果得られた値は以後必用がない。言い換えるとD-B 材の回転角を求めるための一過性の値である。

以上から現実と合い等しい部材は G-B 材だけであり、この部材の回転角を求めることが目的である。

それで G-B 材の回転角を求める場合にまず A-G間の伸度を知る必要がある。それは A 点から始まる部材を如何様な道順を通ろうとも一筆書きでさえあれば A-G 間の伸び度に一致することを証明済みである。この結果、節点間を構成する部材はその過程にある全ての部材の伸び度を各軸方向ごとに合計でき、単位成分ごとに仮材の伸度の解が得られる。G-C材についても同様である。

次に重要なことは、この四面体の底面にあたる構面 A-B-C に関する扱いである。結論から言うとこの構面 A-B-C は単独で A-B 材、B-C 材そして C-A 材の回転角（当然だが伸度は既知）が得られる。

なぜならば底面 A-B-C に段差（A 点、B 点と C 点における z 方向の値の違い）がある無しに関わらず、A, 点, B 点と C 点は如何なる構面を選択しようと、明らかに 1 個の平面上にある。これは重要な点で幾何的にも証明される。

それで、前述したように構造物が安定を維持している場合、任意の支持点間（本節では A-C 間）を選ぶ。そうすると A-C 間のように必ず回転が拘束されている節点間が存在する。

本節では説明を容易にするため A-C 間で両端をヒンジとしたが、ヒンジが無くてローラー支持だけで構成されている場合でも、何れかの節点を選択すれば回転角が生じないような節点間は存在する（存在しない場合の構造物は不安定)。

そして構面 A-B-C は 1 平面上にあるとみなし、A-C 材に回転角が生じないのだから、この構面は図2-3のような x-y 平面にモデル化した平面トラスあるいは、平面ラーメンの変位と同様の機構として考えても差し支えない。

この図 2-3 は置換トラスの構面 A-C-G そのものと考えることができる。

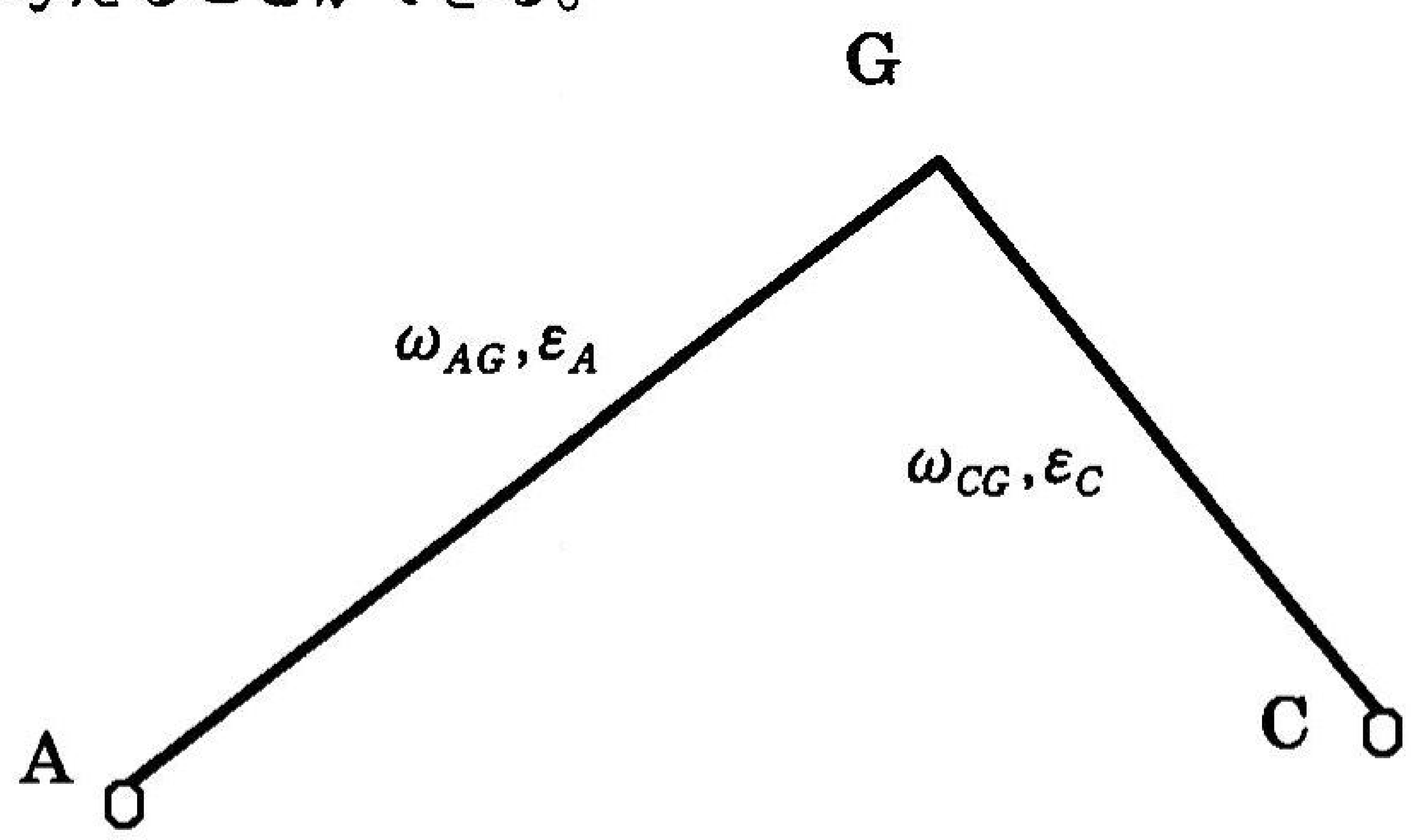

図 2-3　平面の部材角

当然 A-C 材の回転角はゼロで伸度は既知かゼロである。本報の設定はゼロとしている。勿論外的要因等で回転角や伸度がゼロで無い場合も考えられる。そのときは A 点か C 点の何れかがローラー支持であるとき、回転角はゼロになるが伸度は既知として解けば良い。

本節の仮定で解くと ε_{AG} と ε_{CG} は既知であるから ω_{AG},ω_{CG} は独立した値を取ることはできない。つまり、この機構の $\varepsilon_{AG},\varepsilon_{CG}$ が既知の独立部材角、ω_{AG},ω_{CG} を未知の従属部材角とすれば A-G 材とC-D 材の部材角 ω_{AG},ω_{CG} を求めることができる。

要するに ω_{AG},ω_{CG} は図 2-3 に示されるような単独機構から求めることができる。それに当初の考えからすれば、これらの値は既知として進めても良いことになる。

ここで解決された条件を整理すると四面体A-B-C-G において回転角と伸度に関しての未知数は 、ω_{AG},ω_{BG} と ω_{CG} であり、それぞれが x-y-z 軸方向の回転角 3 個を有し合計 9 個になることが明らかになった。そうすると構面 A-B-G、B-C-G と C-A-Gに対して各々の節点変位式を導くと、それぞれに 3個の方程式が立ち、合計 9 個の連立方程式が得られる。

しかるに構面A-B-G、B-C-GとC-A-Gに対する3構面の未知の回転角は9個であるからこれらの部材の回転角は求められることになる。つまり仮材でないG-B材の回転角がここに得られた。

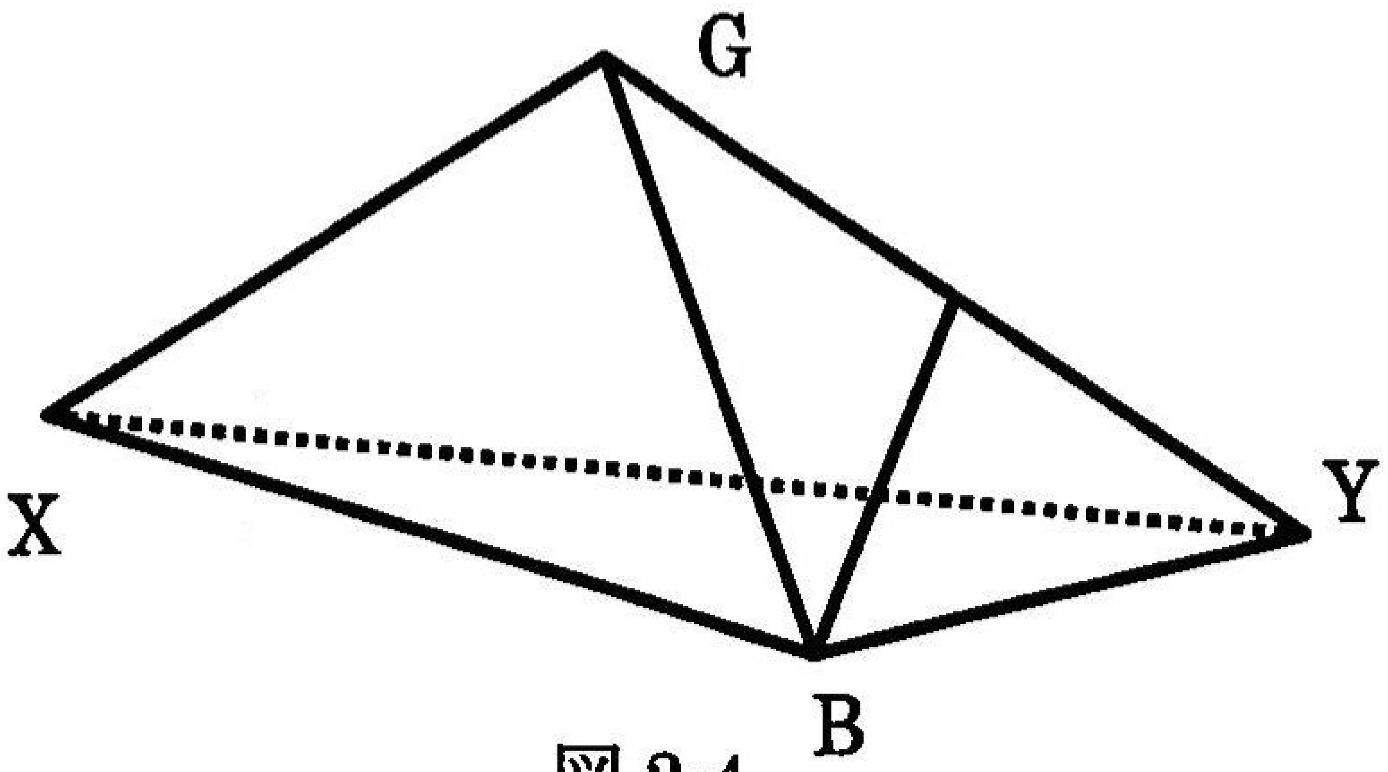

図 2-4

次に、図2-4の仮トラスから仮材でないB-Y材の回転角を求めてみる。四面体は回転角と伸度が判明したG-X-Bを底面とする単位機構となりB-Y材の回転角が得られる。

以上のことを一般論としてまとめると仮材でない真の部材の回転角を求める場合は、

① 回転角を求める部材を含む単位機構を作り出す。
② 四面体を構成している6材のうち任意の3材は回転角が拘束条件やすでに計算済み等であること。
③ 例えば図2-4からB-Y材の回転角を求める場合はX-B材とX-Y材は拘束条件により、またG-B材は計算により回転角は既知として解けばよい。
④ 底面の3角形の部材を既知として計算するのは1つの方法にすぎないことは留意すべき点である。

これらの値を使って降順で代入していけば既報の平面トラスの解と同様に各部材の回転角が順次求められ、各節点の変位が求められる。そして最後の単位機構は真の部材だけで構成された単位機構となることは明らかである。

[3]　立体トラスの節点変位の解析

前章において立体トラスの各節点の変位を求める場合、単位架構の四面体を解析すればよいことが判明した。しかもその構造体の支持条件を勘案すれば底面に設定する構面は独立して解決できることが明らかにされている。

本章では図3-1に示すようにA,B,C点をヒンジ支点で、O点では球状ヒンジで結合された構造物に荷重Pが作用している場合を解析してみる。

事前の解析により、各部材の部材応力は次のように求められたとする。

$$S_{OA} = -4P/5$$

$$S_{OB} = +\sqrt{2}\,P$$

$$S_{OC} = -3P/5 \tag{3-1}$$

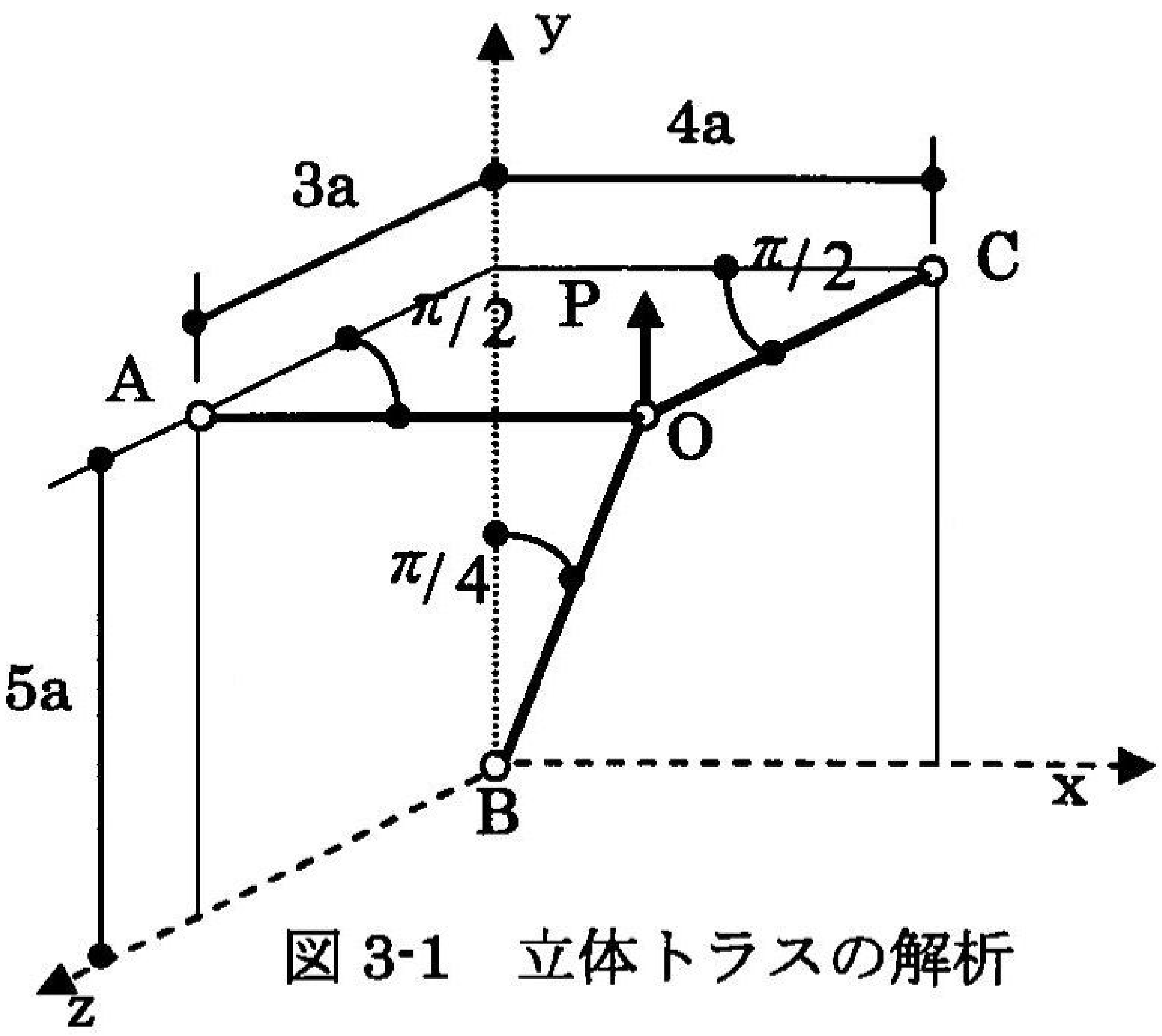

図 3-1　立体トラスの解析

ここで、$a = 100cm$ 、断面積 $A = 2cm^2$ 、ヤング係数 $E = 2.1\times10^6 kg/cm^2$ とすると 歪度と外力の関係は次式で表されるから

$$\varepsilon = \sigma/E = P/(AE)$$

上式を使って各部材の歪度を求めると次のようになる。

$$\varepsilon_{OA} = -4P/(5AE)$$
$$= -4\times100\times1000kg/(5\times2cm^2\times2.1\times10^6 kg/cm^2)$$
$$= -0.019$$
$$\varepsilon_{OB} = +\sqrt{2}\,P/(AE)$$
$$= +1.414\times100\times1000kg/(2cm^2\times2.1\times10^6 kg/cm^2)$$
$$= +0.034$$
$$\varepsilon_{OC} = -3P/(5AE)$$
$$= -3\times100\times1000kg/(5\times2cm^2\times2.1\times10^6 kg/cm^2)$$
$$= -0.014$$

図3-1から分かるように、節点変位式を求めるときの構面はA-O-B、A-O-CそしてB-O-Cの3個である。それぞれの構面について節点変位式を立てると次のようになる。まず構面A-O-Bの場合の節点変位

式は

$$\vec{V}_{AO}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1}\\ 4a & 0 & 0\end{vmatrix}=4a\omega_{z1}\vec{J}-4a\omega_{y1}\vec{K}$$

$$\vec{V}_{OB}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ \omega_{x2} & \omega_{y2} & \omega_{z2}\\ -4a & -5a & -3a\end{vmatrix}$$

$$=(-3a\omega_{y2}+5a\omega_{z2})\vec{I}+(-4a\omega_{z2}+3a\omega_{x2})\vec{J}$$

$$+(-5a\omega_{x2}+4a\omega_{y2})\vec{K}$$

$$\vec{U}_{AO}=4a\varepsilon_{AO}\vec{I}$$

$$\vec{U}_{OB}=-4a\varepsilon_{OB}\vec{I}-5a\varepsilon_{OB}\vec{J}-3a\varepsilon_{OB}\vec{K}$$

であるから、上式を節点変位式(1-1)に代入すると

$$\begin{aligned}&\Sigma(\vec{V}+\vec{U})\\ &=(-3a\omega_{y2}+5a\omega_{z2}+4a\varepsilon_{OA}-4a\varepsilon_{OB})\vec{I}\\ &\quad+(4a\omega_{z1}-4a\omega_{z2}+3a\omega_{x2}-5a\varepsilon_{OB})\vec{J}\\ &\quad+(-4a\omega_{y1}-5a\omega_{x2}+4a\omega_{y2}-3a\varepsilon_{OB})\vec{K}\\ &=0\end{aligned}$$

となり、この式は単位ベクトルに対して恒等式であるから次式が成り立ち

$$-3\omega_{y2}+5\omega_{z2}+4\varepsilon_{OA}-4\varepsilon_{OB}=0 \tag{3-2}$$

$$4\omega_{z1}-4\omega_{z2}+3\omega_{x2}-5\varepsilon_{OB}=0 \tag{3-3}$$

$$-4\omega_{y1}-5\omega_{x2}+4\omega_{y2}-3\varepsilon_{OB}=0 \tag{3-4}$$

となる。次に構面 A-O-C の場合の節点変位式は

$$-3\omega_{y3}+4\varepsilon_{OA}=0 \tag{3-5}$$

$$4\omega_{z1}+3\omega_{x3}=0 \tag{3-6}$$

$$-4\omega_{y1}-3\varepsilon_{OC}=0 \tag{3-7}$$

となり構面 B-O-C の場合の節点変位式は

$$3\omega_{y2}-5\omega_{z2}-3\omega_{y3}+4\varepsilon_{OB}=0 \tag{3-8}$$

$$4\omega_{z2}-3\omega_{x2}+3\omega_{x3}+5\varepsilon_{OB}=0 \tag{3-9}$$

$$5\omega_{x2}-4\omega_{y2}-3\varepsilon_{OB}-3\varepsilon_{OC}=0 \tag{3-10}$$

となる。(3-2)式から(3-4)式、(3-5)式から(3-7)式そして(3-8)式から(3-10)式まで9個の方程式が立てられ、未知数の回転角ωが9個であることから、この連立方程式が成立している。

[4] おわりに

節点変位式を使って立体トラスの絶対節点変位を容易に解く新解法を提案できた。

しかし提案した本解法を電算化するには置換トラスの選択と設定をいかに素早く、簡潔にできるかが今後の課題である。

参考文献

(1) 山本嘉孝：建築架構における節点変位についてのベクトルによる解法　小山高専研究紀要5号、1974
(2) 岸、山本：三次元構造物における節点間の適合条件に関する考察　(回転、伸度ベクトルの節点変位への応用　その1)　日本建築学会大会梗概集　2000
(3) 樋下、山本：平面トラスにおける各節点の部材角と絶対変位に関する考察（回転、伸度ベクトルの節点変位への応用　その2）日本建築学会大会梗概集　2000
(4) 山本：不静定トラス部材の塑性流れを考慮した節点の変位について（回転、伸度ベクトルの節点変位への応用　その3）日本建築学会大会梗概集　2000
(4) 山本：不静定トラスの反力と部材応力の解法に関する考察（回転、伸度ベクトルの節点変位への応用　その4）日本建築学会大会梗概集　2001

小山工業高等専門学校　建築学科
E-mail　yamayosi@oyama-ct.ac.jp

「受理年月日　2002年9月25日」