小山工業高等専門学校研究紀要
第 35 号 (2003), 37 － 46

微分方程式と差分方程式〔I〕(山辺の方法を中心として)

Differential Equations and Difference Equations〔I〕(with a special focus on Yamabe's method)

河島　博

Hiroshi KAWASHIMA

1. はじめに

線形の定数係数の微分方程式の特解を求めるのに，微分演算子の多項式で，多項式を割って出す“山辺の方法”という算法が有る。

この算法の未定係数法より優れている点は，(ｉ)アルゴリズムがユニークであるので，正解のチェックがやりやすいこと。(ⅱ)解の形が直感的に出て来ること。(ⅲ)その為に未定係数法と違って解の究極の形が自然に求まること。(ⅳ)実用的な問題の場合には，この方が無駄なく速いこと。

この長所は，線形の定数係数の差分方程式の特解を求めるのにも，そのまま通用することである。但し，微分方程式の時と違い，差分方程式の場合には，多項式を階乗関数というもので書き直して計算する必要がある。その分，差分方程式の解き方は，非同次の場合，微分方程式より計算が少し複雑となるし，面倒で分りにくい所がある。

それで，微分方程式の特解を出すのを，先導役として，夫に準じて，差分方程式の特解の出し方を押さえて行くことにする。(２階以上の時には)

2. 差　分

$D \equiv \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ を定義域とする関数 $f(x)$ を考える。これから，次の数例 $\{f(x)\}$ が考えられる。(但し $x = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$)

$f(0), f(1), f(2), f(3), \cdots\cdots$

このとき

$$\Delta f(x) \equiv f(x+1) - f(x) \tag{2.1}$$

を考え，これを $f(x)$ の“差分”という。

また，

$$Ef(x) \equiv f(x+1) \tag{2.2}$$

を導入すると，

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x)$$

より

$$\Delta = E - 1 \Leftrightarrow E = 1 + \Delta \tag{2.3}$$

となる関係が得られる。

これより

$$E^n f(x) = f(x+n) \tag{2.4}$$

また，$\Delta = E - 1$ より

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r E^{n-r}(-1)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_nC_r E^{n-r}$$

であるから

$$\Delta^n f(x) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r {}_nC_r f(x+n-r) \tag{2.5}$$

を得る。

<注：$\Delta^2 f(x) = \sum_{r=0}^{2} (-1)^r {}_2C_r f(x+2-r)$

$= (-1)^0 {}_2C_0 f(x+2) + (-1)^1 {}_2C_1 f(x+1)$

$+ (-1)^2 {}_2C_2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$

$\Delta^3 f(x) = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r {}_3C_r f(x+3-r)$

$= (-1)^0 {}_3C_0 f(x+3) + (-1)^1 {}_3C_1 f(x+2)$

$+ (-1)^2 {}_3C_2 f(x+1) + (-1)^3 {}_3C_3 f(x)$

$= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$ >

3. 差分方程式

一般に，変数 x と未知関数 $y(x)$ の差分を含んだ方程式で，$g(x)$ を既知関数として

$$F(x, y(x), \Delta y(x), \Delta^2 y(x), \cdots, \Delta^n y(x)) = g(x) \tag{3.1}$$

となるものを“n 階差分方程式”という。(但し，(3,1)には，最高次の $\Delta^n y(x)$，最低次の $\Delta^0 y(x) = y(x)$ が本質的に入っているとする。)

<注１：(3,1)は

$G(x, y(x), y(x+1), \cdots, y(x+n)) = g(x)$ (3.2)
とかける。(但し，(3,2)では $y(x+n)$, $y(x)$ が本質的に入っているとは限らないとする。)〉

〈注2：
$\Delta^3 y(x)-\Delta y(x) = x^2+1 \Leftrightarrow \Delta\{\Delta^2 y(x)-y(x)\} = x^2+1 \Leftrightarrow \Delta\{y(x+2)-2y(x+1)\} = x^2+1 \Leftrightarrow \{y(x+3)-2y(x+2)\}-\{y(x+2)-2y(x+1)\} = x^2+1 \Leftrightarrow y(x+3)-3y(x+2)+2y(x+1) = x^2+1$ より，2階の差分方程式である。〉

〈注3：(3,2)に含まれる $f(x+k)$ について，k の最大と最小の差を差分方程式の“階数”という。
注2では $z(x) = y(x+1)$ とすれば
$y(x+3)-3y(x+2)+2y(x+1) = x^2+1 \Leftrightarrow$
$z(x+2)-3z(x+1)+2z(x) = x^2+1$
となるから，本質的に2階差分方程式となる。〉

ここでは，主に，1階，2階の差分方程式を扱うことにする。

また，微分方程式は，差分方程式より，一般には良く知られているし，算法がより簡潔であるので，ほとんど新しく準備するものはない。

微分方程式では
$f(D)y(x) = e^{kx}P_n(x)$
差分方程式では
$f(E)y(x) = \gamma^x P_n(x)$
に原則として限るので，夫に必要な準備をする。(但し，$f(x)$ は1次か，2次の x の整式，k, γ は0でない定数，$P_n(x)$ は n 次の多項式とする。)

4．和 分

次の方程式を解く。

$$\Delta y(x) = g(x) \Leftrightarrow y(x+1)-y(x) = g(x) \quad (4.1)$$

(但し，$y(x)$ は未知関数，$g(x)$ は既知関数とする)

(4.1)より

$$\sum_{k=0}^{x-1} \Delta y(k) = \sum_{k=0}^{x-1} \{y(k+1)-y(k)\} = \sum_{k=0}^{x-1} g(k)$$

$$\Leftrightarrow y(x)-y(0) = \sum_{k=0}^{x-1} g(k) \Leftrightarrow$$

$$y(x) = C+\sum_{k=0}^{x-1} g(k) \quad (4.2)$$

これが，(4.1)の解である。

一方，(4.1)の前の式により

$$y(x) = \Delta^{-1}g(x) \quad (4.3)$$

が出るので，(4.2)，(4.3)より

$$\Delta^{-1}g(x) = C+\sum_{k=0}^{x-1} g(k)$$

ここで，g の代わりに f を使えば

$$\Delta^{-1}f(x) = \sum_{k=0}^{x-1} f(k)+C \quad (4.4)$$

となる重要な公式を得たことになる。

〈注：(4.4)の左辺を“和分”または“不定和分”という。夫に対して，右辺の第1項を“定和分”という。〉

これより，$m<n$ である2つの自然数 m, n に対して

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = [\Delta^{-1}f(x)]_m^{n+1} \quad (4.5)$$

という，公式が得られる。〈注：左辺 $= \sum_{k=0}^{n} f(k) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) = \left\{\sum_{k=0}^{n} f(k)+C\right\}-\left\{\sum_{k=0}^{m-1} f(k)+C\right\} = \Delta^{-1}f(n+1)-\Delta^{-1}f(m) =$ 右辺で良い。〉

これが，本来の“定和分の公式”の公式である。

〈注1：$1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = [\Delta^{-1}x]_1^{n+1} = \left[\frac{1}{2}x(x-1)\right]_1^{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)n-0 = \frac{1}{2}n(n+1)$

($\because \Delta\left\{\frac{1}{2}x\times(x-1)\right\} = \frac{1}{2}(x+1)x-\frac{1}{2}(x-1)x = \frac{1}{2}x\{(x+1)-(x-1)\} = x$ より)〉

〈注2：$a \neq 1$ のとき

$$1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a^k=\left[\Delta^{-1}a^x\right]_0^n$$

$$=\left[\frac{a^x}{a-1}\right]_0^n=\frac{a^n}{a-1}-\frac{a^0}{a-1}=\frac{a^n-1}{a-1}=\frac{1-a^n}{1-a}$$

$(\because \Delta\left(\dfrac{a^x}{a-1}\right)=\dfrac{a^{x+1}}{a-1}-\dfrac{a^x}{a-1}=\dfrac{a^x}{a-1}(a-1)$
$=a^x$ より))〉

〈 Δ と Δ^{-1} の基本的な性質〉

(i) $\Delta\{f(x)+g(x)\}=\Delta f(x)-\Delta g(x)$

(ii) $\Delta\{af(x)\}=a\Delta f(x)$ (但し a は定数)

(iii) $\Delta^{-1}\{f(x)+g(x)\}=\Delta^{-1}f(x)+\Delta^{-1}g(x)$

(iv) $\Delta^{-1}\{af(x)\}=a\Delta^{-1}f(x)$ (但し a は定数)

〈注:(iii),(iv)では,両辺の定数項の差は無視するとする。($\because \Delta C=0$(但し C は定数)より)〉

〔証明〕

(i) $\Delta\{f(x)+g(x)\}=\{f(x+1)+g(x+1)\}-\{f(x)+g(x)\}=\{f(x+1)-f(x)\}+\{g(x+1)-g(x)\}=\Delta f(x)+\Delta g(x)$

(ii) $\Delta\{af(x)\}=af(x+1)-af(x)=a\{f(x+1)-f(x)\}=a\Delta f(x)$

(iii),(iv)は $\Delta\{$(左辺)$-$(右辺)$\}=0\Longleftrightarrow\Delta$(左辺)$-\Delta$(右辺)$=0\Longleftrightarrow\Delta$(左辺)$=\Delta$(右辺)を言えば良いから,

(iii)は Δ(左辺)$=\Delta[\Delta^{-1}\{f(x)+g(x)\}=f(x)+g(x)$, Δ(右辺)$=\Delta\{\Delta^{-1}f(x)\}+\Delta\{\Delta^{-1}g(x)\}=f(x)+g(x)$ で良い。

(iv)は Δ(左辺)$=\Delta[\Delta^{-1}\{af(x)\}]=af(x)$ Δ(右辺)$=a\Delta\{\Delta^{-1}f(x)\}=af(x)$ で良い。//

5. 2項係数と階乗関数

一般の二項定理

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}z^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n(\text{但し }|z|<1)\qquad(5,1)$$

は良く知られている。〈注:$\dbinom{\alpha}{0}\equiv 1$ とする〉

そして

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\text{但し }n\geqq 1)\qquad(5,2)$$

を一般の2項係数と呼ぶ。〈注:$\dbinom{\alpha}{0}\equiv 1$ とする〉

このとき,分子を $\alpha^{\langle n\rangle}$ とかくと(5,2)は

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha^{\langle n\rangle}}{n!}\qquad(5,3)$$

とかける。

特に,$\dbinom{\alpha}{0}=1$ より $\alpha^{\langle 0\rangle}=1$,また,$n\geqq 1$ のときは,

$$\alpha^{\langle n\rangle}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\qquad(5,4)$$

となる。

この(5,4)を"階乗関数"という。

後の展開の都合上,α の代わりに x を使うと,
$x^{\langle 0\rangle}\equiv 1$, $x^{\langle 1\rangle}=x$, $x^{\langle 2\rangle}=x(x-1)$, $x^{\langle 3\rangle}=x(x-1)\times(x-2)$, 一般には,次のようになる。

$$x^{\langle n\rangle}=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)\qquad(5,4)'$$

(但し n は1以上の整数で $x^{\langle 0\rangle}\equiv 1$ とする)

このとき

$$\Delta x^{\langle n\rangle}=nx^{\langle n-1\rangle}\quad(n=1,2,\cdots\cdots)\qquad(5,5)$$

が成り立つ。

〔証明〕$n\geqq 2$ のときは,

$(x+1)^{\langle n\rangle}=(x+1)(x)(x-1)\cdots\{(x+1)-n+1\}$
$=(x+1)\times x(x-1)(x-2)\cdots\{x-(n-1)+1\}$
$=(x+1)\times x^{\langle n-1\rangle}$ (イ)

$x^{\langle n\rangle}=x(x-1)\cdots\{x-(n-1)+1\}\times(x-n+1)$
$=x^{\langle n-1\rangle}\times(x-n+1)$ (ロ)

よって,(イ)$-$(ロ)を辺々計算して

左辺 $=(x+1)^{\langle n\rangle}-x^{\langle n\rangle}=\Delta x^{\langle n\rangle}$,

右辺 $=x^{\langle n-1\rangle}\{(x+1)-(x-n+1)\}$
$=nx^{\langle n-1\rangle}$

で良い。

$n=1$ のときは,直接に

左辺 $= \Delta x^{\langle 1\rangle} = \Delta x = (x+1)-x = 1$，右辺 $= 1\times x^{\langle 1-1\rangle} = 1\times x^{\langle 0\rangle} = 1\times 1 = 1$ で，確認出来る。//

さらに，n が負の整数の場合には，$N \equiv -n$ として，

$$x^{\langle n\rangle} = x^{\langle -N\rangle} \equiv \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)} \quad (5,6)$$

(但し，$N = 1, 2, 3\cdots\cdots$) と定義する。

$$\Delta x^{\langle n\rangle} = nx^{\langle n-1\rangle} \quad (n = 0, -1, -2, \cdots) \quad (5,5)'$$

が成り立つ。〈注：$n = 0$ のときは明らか〉

(5,5)′ を N でかくと，$n = -N$ より

$$\Delta x^{\langle -N\rangle} = (-N)x^{\langle -(N+1)\rangle} \quad (イ)$$

となる。(但し $N = 1, 2, 3, \cdots\cdots$)

〔証明〕

$$x^{\langle -(N+1)\rangle} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)(x+N+1)}$$

を基準にして

$$(x+1)^{\langle -N\rangle} = \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+N)(x+1+N)}$$

$$= x^{\langle -(N+1)\rangle}\times(x+1) \quad (ロ)$$

$$x^{\langle -N\rangle} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+N)}$$

$$= x^{\langle -(N+1)\rangle}\times(x+N+1) \quad (ハ)$$

よって，(ロ)−(ハ)を計算して

$\Delta x^{\langle -N\rangle} = (x+1)^{\langle -N\rangle} - x^{\langle -N\rangle} = x^{\langle -(N+1)\rangle} \times\{(x+1)-(x+N+1)\} = (-N)x^{\langle -(N+1)\rangle}$ で可。//

(5.5)，(5.5)′ をまとめると

$$\Delta x^{\langle n\rangle} = nx^{\langle n-1\rangle} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (5.7)$$

また，

$$\Delta\left\{\frac{1}{n+1}x^{\langle n+1\rangle}\right\} = \frac{1}{n+1}\Delta x^{\langle n+1\rangle} = \frac{1}{n+1}\times(n+1)x^{\langle n\rangle}$$

$= x^{\langle n\rangle}$ より

$$\Delta^{-1}x^{\langle n\rangle} = \frac{1}{n+1}x^{\langle n+1\rangle}+C \quad (5.8)$$

(但し n は -1 ではない整数とする)

〈注：多項式の差分・和分を求めるときには，この(5.7)，(5.8)が基本的な役目をする。〉

例1．次の関数の差分と和分を求めよ。

(1) $f(x) \equiv 2x^{\langle 4\rangle}-4x^{\langle 3\rangle}+2x^{\langle 1\rangle}+6$

(2) $g(x) \equiv x^{\langle -3\rangle}-3x^{\langle -2\rangle}+4$

〔解〕

(1)は

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= 2\Delta x^{\langle 4\rangle}-4\Delta x^{\langle 3\rangle}+2\Delta x^{\langle 1\rangle}+\Delta 6\\ &= 2\times 4x^{\langle 3\rangle}-4\times 3x^{\langle 2\rangle}+2\times 1+0\\ &= 8x^{\langle 3\rangle}-12x^{\langle 2\rangle}+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}f(x) &= 2\Delta^{-1}x^{\langle 4\rangle}-4\Delta^{-1}x^{\langle 3\rangle}+2\Delta^{-1}x^{\langle 1\rangle}+\Delta^{-1}6\\ &= 2\times\frac{1}{5}x^{\langle 5\rangle}-4\times\frac{1}{4}x^{\langle 4\rangle}-2\times\frac{1}{2}x^{\langle 2\rangle}+6x\\ &= \frac{2}{5}x^{\langle 5\rangle}-x^{\langle 4\rangle}+x^{\langle 2\rangle}+6x\end{aligned}$$

(2)は

$$\begin{aligned}\Delta g(x) &= \Delta x^{\langle -3\rangle}-3\Delta x^{\langle -2\rangle}+\Delta 4\\ &= (-3)x^{\langle -4\rangle}-3(-2)x^{\langle -3\rangle}+0\\ &= -3x^{\langle -4\rangle}+6x^{\langle -3\rangle}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}g(x) &= \Delta^{-1}x^{\langle -3\rangle}-3\Delta^{-1}x^{\langle -2\rangle}+\Delta^{-1}4\\ &= \frac{1}{(-3)+1}x^{\langle -2\rangle}-3\times\frac{1}{-2+1}x^{\langle -1\rangle}+4x\\ &= -\frac{1}{2}x^{\langle -2\rangle}+3x^{\langle -1\rangle}+4x\end{aligned}$$

(但し Δ^{-1} のときは，C(任意定数)を略した)//

6．階乗関数の一次結合

$x^{\langle n\rangle}$ の差分・和分は，x^n の微分・積分に対応しているので取り扱いが便利である。また，階乗関数の一次結合 $f(x) \equiv a_0x^{\langle n\rangle}+a_1x^{\langle n-1\rangle}+\cdots+a_{n-1}x^{\langle 1\rangle}+a_n$ (但し，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ は定数で，$a_0 \fallingdotseq 0$ とする)は n 次の多項式となるのは明らかである。逆に，$f(x) \equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$ (但し，$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_n$ は定数で，$b_0 \fallingdotseq 0$)は，階乗関数の一次結合で表わされるだろうか。

夫は正しいので，定理の形にして証明する。

定理6．1

$$n \text{ 次の多項式 } f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \quad (イ)$$

$$\text{に対して } f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{\langle n-k\rangle} \quad (ロ)$$

となる $b_k (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ がユニークに決まる。

〈注：証明の根本は

$$x^{\langle n\rangle} = x(x-1)\cdots\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \text{ に}$$

より，(ロ)が(イ)の形にかき直せるように，

$$x^n = \sum_{r=0}^{n} d_r x^{\langle r\rangle} (\text{但し } n \geqq 1) \quad (S)$$

となるように，係数 $d_r(r=0,1,2,\cdots)$ がユニークに決まることが言えればよい。〉

〔(S)の証〕(1°) $n=1$ のとき，左辺 $=x$，右辺 $=d_0+d_1x^{\langle 1\rangle}$ $\because d_0=0,\ d_1=1(\because x^{\langle 1\rangle}=x$ より) で(S)は成り立つ。

(2°) もし(S)が $n=k$ のとき成り立つならば

$$x^k=\sum_{r=0}^{k}d_rx^{\langle r\rangle}(注：d_0=0) \qquad (イ)$$

となる。よって，両辺に x をかけて

$\because x^{k+1}=\sum_{r=0}^{k}d_rx^{\langle r\rangle}x=\langle$所で $x^{\langle r\rangle}x=x(x-1)\cdots(x-r+1)x=x(x-1)\cdots(x-r+1)\{(x-r)+r\}=x^{\langle r+1\rangle}+rx^{\langle r\rangle}$ より$\rangle=\sum_{r=0}^{k}d_r\{x^{\langle r+1\rangle}+rx^{\langle r\rangle}\}=\sum_{r=0}^{k}\{d_rx^{\langle r+1\rangle}+rd_rx^{\langle r\rangle}\}$

$=\sum_{r=0}^{k}rd_rx^{\langle r\rangle}+\sum_{r=1}^{k}d_rx^{\langle r+1\rangle}=\sum_{r=0}^{k}rd_rx^{\langle r\rangle}+\sum_{R=2}^{k+1}d_{R-1}x^{\langle R\rangle}=\sum_{r=0}^{k+1}D_rx^{\langle r\rangle}$(但し $D_0=0,\ D_1=d_1,\ D_{k+1}=d_k,\ D_r=rd_r+d_{r-1}(r=2,3,\cdots k)$ とする)

つまり，(イ)から，次の(ロ)が得られた。

$$x^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}D_rx^{\langle r\rangle}\quad(注：D_0=0) \qquad (ロ)$$

これより，(S)は $n=k+1$ の時にも成り立つ。

(3°) これより(S)は全ての自然数 n について成り立つ。//

〈注：ユニーク性はほとんど明らかなので略す〉

7．定数係数差分方程式

$$L(y)\equiv y(x+1)-ay(x)=b(x) \qquad (7.1)$$

(但し，a は0でない定数，$b(x)$ は既知関数)

(7.1)に対して

$$L(y)=y(x+1)-ay(x)=0 \qquad (7.2)$$

を(7.1)の"余方程式"という。その一般解を $y_0(x)$ と表わすと

$$y_0(x)=\begin{cases}Ca^x & (a\neq 1)\\ C & (a=1)\end{cases} \qquad (7.3)$$

となる。〈注：$a=1$ のとき $y(x)=y(0)=C$ より，$a\neq 1$ のとき $\dfrac{y(x+1)}{y(x)}=a$ より

$\prod_{k=0}^{x-1}\dfrac{y(k+1)}{y(k)}=\prod_{k=0}^{x-1}a\Longleftrightarrow\dfrac{y(x)}{y(0)}=a^x\Longleftrightarrow y(x)=a^xy(0)=Ca^x$〉

(7.1)の特解を求めるのに，$y(x)\equiv a^xY(x)$ とおいて，(7.1)に代入すれば

$a^{x+1}Y(x+1)-a^{x+1}Y(x)=b(x)\Longleftrightarrow\Delta Y(x)=\dfrac{b(x)}{a^{x+1}}\Longleftrightarrow Y(x)=\Delta^{-1}\left(\dfrac{b(x)}{a^{x+1}}\right)+C$

$$\because y(x)=a^x\left[C+\Delta^{-1}\left\{\frac{b(x)}{a^{x+1}}\right\}\right] \qquad (7.4)$$

が(7.1)の解の公式である。〈注：$y_0(x)\equiv Ca^x$, $y*(x)=\left[\Delta^{-1}\left\{\dfrac{b(x)}{a^{x+1}}\right\}\right]a^x$ と分けると，前者が一般解，後者が特解といわれるものである。〉

例1　$y(x+1)-y(x)=3x^2-2x+4$

〔解〕$x^2=x(x-1)+x=x^{\langle 2\rangle}+x^{\langle 1\rangle}$ より右辺 $=3(x^{\langle 2\rangle}+x^{\langle 1\rangle})-2x^{\langle 1\rangle}+4=3x^{\langle 2\rangle}+x^{\langle 1\rangle}+4$, 左辺 $=\Delta y(x)$ であるから

与式 $\Longleftrightarrow y(x)=\Delta^{-1}(3x^{\langle 2\rangle}+x^{\langle 1\rangle}+4)+C=3\times\dfrac{1}{2+1}x^{\langle 3\rangle}+\dfrac{1}{1+1}x^{\langle 2\rangle}+4x+C=x^{\langle 3\rangle}+\dfrac{1}{2}x^{\langle 2\rangle}+4x+C=\dfrac{1}{2}\{2x(x-1)(x-2)+x(x-1)+8x\}+C$

$=\dfrac{1}{2}(2x^3-5x^2+11x)+C$ //

例2　$y(x+1)-y(x)=3^x(x-3)$

〔解〕$y(x)\equiv 3^xY(x)$ とおいて，代入すると

与式$\iff 3^{x+1}Y(x+1)-3^xY(x)=3^x(x-3)\iff$
$3Y(x+1)-Y(x)=x-3\iff Y(x)\{3E-1\}$
$=x-3\iff Y(x)\{3(\Delta+1)-1\}=x-3\iff$
$(2+3\Delta)Y(x)=x-3$

$$\frac{1}{2}x^{\langle 1\rangle}-\frac{9}{4}\equiv\frac{1}{4}(2x-9)\equiv Y^*(x)$$
$$2+3\Delta\,\overline{\big)\,x^{\langle 1\rangle}-3}$$
$$\underline{x^{\langle 1\rangle}+\frac{3}{2}}\quad(\because 3\Delta\frac{1}{2}x^{\langle 1\rangle}=\frac{3}{2}\Delta x^{\langle 1\rangle}=\frac{3}{2})$$
$$-\frac{9}{2}$$
$$\underline{-\frac{9}{2}}$$
$$0$$

余方程式の一般解は$y_0(x)=C$，また特解は
$y^*(x)=3^xY^*(x)=Y^*(x)3^x=\frac{1}{4}(2x-9)3^x$より

〔答〕$y(x)=C+\frac{1}{4}(2x-9)3^x$　//

〈注：上の割り算で出す方法が“山辺の方法”といわれるものである。〉

山辺の方法を使うと，次の定理は容易である。

定理7.1

差分方程式$y(x+1)-ay(x)=\gamma^xP_n(x)$の特解は次のように求めてよい。(但し,$a,\gamma$は0でない定数とし,$P_n(x)$は$n$次の多項式とする。)

(ⅰ)$\gamma\neq a$の場合：$y^*(x)=\gamma^xQ_n(x)$

(ⅱ)$\gamma=a$の場合：$y^*(x)=\gamma^x xQ_n(x)$

(但し,$Q_n(x)$はn次の多項式とする。)

〔証明〕$y(x)\equiv\gamma^xY(x)$とおいて，代入すると
与式$\iff\gamma^{x+1}Y(x+1)-a\gamma^xY(x)=\gamma^xP_n(x)\iff$

$$Y(x)\{\gamma(1+\Delta)-a\}=P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}p_kx^{\langle n-k\rangle}$$

(ⅰ)のとき

$$\frac{p_0}{\gamma-a}x^{\langle n\rangle}+\cdots$$
$$(\gamma-a)+\gamma\Delta\,\overline{\big)\,p_0x^{\langle n\rangle}+p_1x^{\langle n-1\rangle}+\cdots\cdots}$$
$$\underline{p_0x^{\langle n\rangle}+\frac{\gamma p_0}{\gamma-a}nx^{\langle n-1\rangle}}$$
$$q_1x^{\langle n-1\rangle}+\cdots\cdots$$
$$(\text{但し}\ q_1=p_1-\frac{\gamma p_0}{\gamma-a}n)$$

と割り算を続ければ,商$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}q_kx^{\langle n-k\rangle}$となる$q_k(k=0,1,2,\cdots,n)$を得る。(注：$q_0=\frac{p_0}{\gamma-a}$)

(ⅱ)のとき，余式$\iff\gamma\Delta Y(x)=P_k(x)\iff Y(x)$

$$=\frac{1}{\gamma}\Delta^{-1}P_n(x)=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{n}p_k\times\frac{1}{n-k+1}\times x^{\langle n+1-k\rangle}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{\gamma(n+1-k)}x^{\langle n+1-k\rangle}=\sum_{k=0}^{n}q_kx^{n+1-k}$$

$=x\sum_{k=0}^{n}q_kx^{n-k}$となる$q_k(k=0,1,2,\cdots,n)$を得る。//

例3　$y(x+1)+2y(x)=x^2+3$

〔解〕与式$\iff y(x)\{(1+\Delta)+2\}=x^{\langle 2\rangle}+x^{\langle 1\rangle}+3$

$$\frac{1}{3}x^{\langle 2\rangle}+\frac{1}{9}x^{\langle 1\rangle}+\frac{26}{27}$$
$$3+\Delta\,\overline{\big)\,x^{\langle 2\rangle}+x^{\langle 1\rangle}+3}$$
$$\underline{x^{\langle 2\rangle}+\frac{2}{3}x^{\langle 1\rangle}}\quad(\because\Delta\frac{1}{3}x^{\langle 2\rangle}=\frac{1}{3}\times 2x^{\langle 1\rangle})$$
$$\frac{1}{3}x^{\langle 1\rangle}+3$$
$$\underline{\frac{1}{3}x^{\langle 1\rangle}+\frac{1}{9}}$$
$$\frac{26}{9}$$
$$\underline{\frac{26}{9}}$$
$$0$$

より$y^*(x)=\frac{1}{27}\{9x^{\langle 2\rangle}+3x^{\langle 1\rangle}+26\}=\frac{1}{27}(9x^2-6x+26)$,
また$y_0(x)=C(-2)^x$であるから

$y(x)=C(-2)^x+\frac{1}{27}(9x^2-6x+26)$〔答〕//

8．ガンマ関数

$(x-1)$ の階乗 $(x-1)!$ は，次の差分方程式の解である。

$$y(x+1)-xy(x)=0,\ y(1)\equiv 1 \qquad (8.1)$$

〈注：(8.1)$\Longleftrightarrow \dfrac{y(x+1)}{y(x)}=x$ より $\displaystyle\prod_{k=1}^{x-1}\frac{y(k+1)}{y(k)}$

$=\displaystyle\prod_{k=1}^{x-1}k \Longleftrightarrow \frac{y(x)}{y(1)}=1\times2\times3\times\cdots\times(x-1)$

$=(x-1)! \Longleftrightarrow y(x)=(x-1)!$ で，$y(1)=0!$

$=1,\ y(x+1)=x!=xy(x)$ でよい。〉

しかし，$x!$ は0以上の整数でしか定義されていない。この制限を突破するのが次の式で定義されるガンマ関数であって，$x!$ を補間する最も重要な関数である。

$$\Gamma(x)\equiv\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt(\text{但し}\ x>0) \qquad (8.2)$$

x が負のときは，$0<x<1$ における(8.1)の値を初期値とした差分方程式の解として定義される。〈注：例えば $x\epsilon(-1,0)$ のとき $y(x)=y(x+1)/x$ と考えれば良い。〉 なお x が0以下の整数では $\Gamma(x)$ の値は定義されない。

まず $\Gamma(x)$ が(8.1)を満足することを確認する。

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty t^0e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty=-0+e^{-0}=1 \qquad (8.3)$$

$(\because \displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-t}=e^{-\infty}=0$ より)一般には $t\to\infty$ のとき $0\leqq\dfrac{t^n}{e^t}\leqq\dfrac{t^n}{\dfrac{t^{[n]+2}}{([n]+2)!}}=\dfrac{([n]+2)!}{t^{[n]-n+2}}\to 0$

より $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^ne^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^t}=0$ が成り立つ。

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}d(-e^{-t})=[t^{x-1}(-e^{-t})]_0^\infty-$$

$$\int_0^\infty(-e^{-t})\times d(t^{x-1})=\int_0^\infty(x-1)t^{x-2}e^{-t}dt$$

$=(x-1)\Gamma(x-1)$

(但し $x>1$ とした)

これより $x>0$ として(注：$x-1\to x$ とした)

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad (8.4)$$

特に x が正の整数のとき $\Gamma(1)=1$ の初期条件と，(8.1)の注により $\Gamma(x)=(x-1)!$

これを n にかき直して

$$\Gamma(n)=(n-1)! \qquad (8.5)$$

(但し，n は正の整数)

となる訳である。

〈注：$\Gamma(x)$ の深い性質は成書を見て欲しい。〉

階乗関数の和分の公式(5.8)では $n=-1$ が抜けていた。つまり $\Delta^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が求められない訳である。これが，(8.4)により可能となった。

いま，$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ より

$\log_e|\Gamma(x+1)|=\log_e|\Gamma(x)|+\log_e|x|$

の両辺に D を施すと

$$D\log_e|\Gamma(x+1)|=D\log_e|\Gamma(x)|+\frac{1}{x}\Longleftrightarrow$$

$$D\Delta\log_e|\Gamma(x)|=\frac{1}{x}\Longleftrightarrow\Delta(D\log_e|\Gamma(x)|=\frac{1}{x}$$

$(\because D\Delta=\Delta D$ より)が得られる。そこで

$$\Psi(x)\equiv D\log_e|\Gamma(x)|=\frac{D\Gamma(x)}{\Gamma(x)}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \qquad (8.6)$$

によって，$\Psi(x)$ を定義すれば

$$\Delta\Psi(x)=\frac{1}{x} \qquad (8.7)$$

$$\Longleftrightarrow\Delta^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\Psi(x)+C \qquad (8.8)$$

これから，

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}=\left[\Delta^{-1}\frac{1}{x}\right]_m^{n+1}=\Psi(n+1)-\Psi(m) \qquad (8.9)$$

〈注：(4.5)を参照せよ！〉が得られる。

$\Psi(x)$ の数値表により，左辺の和が求められる。たとえば，$\Psi(20)=2.970524,\ \Psi(11)=2.351753$ より

$$\sum_{k=11}^{19}\frac{1}{k}=\Psi(20)-\Psi(11)=0.618771$$

〈注：ポケコンの結果より左辺 $=0.6187714032$〉

$\Psi(x)$ は，“プサイ関数”，または“ディガンマ関数”と言われ，0と負の整数以外の x で意味を持つ。

所で，(8.7)に D を施して

$$\Delta(D\Psi(x))=-\frac{1}{x^2} \qquad (8.10)$$

$$\Longleftrightarrow\Delta^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-D\Psi(x)+C \qquad (8.11)$$

が得られる。一般に

$\Delta(D^{n-1}\Psi(x))=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$

$=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\Longleftrightarrow\Delta^{-1}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}\Psi(x)+C \qquad (8.12)$$

が得られる。〈注：$x\to x+a$ (但し a は定数)としても(8.12)は成り立つ。〉

$\Psi(x), D\Psi(x), D^2\Psi(x),\cdots\cdots$ を総称して，“多ガンマ関数”と呼ぶ。

0．例1　$\Delta^{-1}\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ を求めよ。

〔解〕$\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$（$a, b$ は定数）（イ）

$\Longleftrightarrow x=a(x+2)+b(x+1)$　（ロ）

（ロ）で $x\equiv -1$ として　右辺 $=a\times 1=a$，左辺 $=-1 \therefore a=-1$

（ロ）で $x\equiv -2$ として　右辺 $=b\times(-1)=-b$，左辺 $=-2 \therefore b=2$

$$\therefore \Delta^{-1}\left\{\frac{x}{(x+1)(x+2)}\right\}=(-1)\Delta^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)+2\Delta^{-1}\frac{1}{x+2}=(-1)\Psi(x+1)+2\Psi(x+2)+C$$

（答）

$$=\{\Psi(x+2)-\Psi(x+1)\}+\Psi(x+2)=\Delta\Psi(x+1)+\Psi(x+2)=\frac{1}{x+1}+\Psi(x+2)+C \quad /\!/$$

〈注：答に相当する所だけ任意定数 C を入れる。〉

例2　$\Delta^{-1}\left\{\dfrac{x^2+2}{x(x+1)(x+2)}\right\}$ を求めよ。

〔解〕$\dfrac{x^2+2}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$（イ）

$\Longleftrightarrow x^2+2=a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)$（ロ）

（但し，a, b, c は定数とする）

（ロ）で，$x=0$ とおくと，左辺 $=0^2+2=2$，右辺 $=a\times 1\times 2=2a$ より $a=2/2=1$

（ロ）で，$x=-1$ とおくと，左辺 $=(-1)^2+2=3$，右辺 $=b\times(-1)\times 1=-b$ より $b=3/-1=-3$

（ロ）で，$x=-2$ とおくと，左辺 $=(-2)^2+2=6$，右辺 $=c\times(-2)\times(-1)=2c$ より $c=6/2=3$

$$\therefore \Delta^{-1}\left\{\frac{x^2+2}{x(x+1)(x+2)}\right\}=1\times\Delta^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+(-3)\Delta^{-1}\frac{1}{x+1}$$

$$+3\times\Delta^{-1}\left(\frac{1}{x+2}\right)=\Psi(x)-3\Psi(x+1)+3\Psi(x+2)+C \quad （答）$$

$$=\Psi(x)+3\{\Psi(x+2)-\Psi(x+1)\}=\Psi(x)+3\Delta\Psi(x+1)$$

$$=\Psi(x)+3\times\frac{1}{x+1}=\Psi(x)+\frac{3}{x+1}+C \quad /\!/$$

9．1階線形差分方程式

（Ⅰ）同次1階線形差分方程式

$$y(x+1)-a(x)y(x)=0（但し\ a(x)\neq 0） \tag{9.1}$$

に対して対数をとることにより

$$\log_e y(x+1)=\log_e a(x)+\log_e y(x) \Longleftrightarrow$$

$\Delta\log_e y(x)=\log_e a(x) \Leftrightarrow \log_e y(x)=\Delta^{-1}\{\log_e a(x)\}+c \Leftrightarrow y(x)=e^c e^{\Delta^{-1}\{\log_e a(x)\}}$ より

$$y(x)=Ce^{\Delta^{-1}\{\log_e a(x)\}} \tag{9.2}$$

が(9.1)の一般解である。（但し C は任意定数）

例1　$y(x+1)-\alpha(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)y(x)=0$

（但し，$\alpha, a_k(k=1, 2, \cdots, m)$ は定数で，$\alpha\neq 0$）

〔解〕移項して対数をとれば

$$\log_e y(x+1)=\log_e\alpha+\sum_{k=1}^{m}\log_e(x-a_k)+\log_e y(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Delta\log_e y(x)=\log_e\alpha+\sum_{k=1}^{m}\log_e(x-a_k) \Longleftrightarrow$$

$$\log_e y(x)=\Delta^{-1}\{\log_e\alpha\}+\sum_{k=1}^{m}\Delta^{-1}\{\log_e(x-a_k)\}=$$

〈所で $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ より $\log_e\Gamma(x+1)=\log_e x+\log_e\Gamma(x) \Leftrightarrow \Delta\log_e\Gamma(x)=\log_e x \Leftrightarrow \Delta^{-1}\{\log x\}=\log_e\Gamma(x) \therefore \Delta^{-1}\{\log_e(x-a_k)\}=\log_e\Gamma(x-a_k)$〉

$$=x\log_e\alpha+\sum_{k=1}^{m}\log_e\Gamma(x-a_k)=\log_e\{\alpha^x\times\prod_{k=1}^{m}\Gamma(x-a_k)\}$$

$$\Leftrightarrow y(x)=C\alpha^x\times\prod_{k=1}^{m}\Gamma(x-a_k) \quad 〔答〕$$

〈注：ガンマ関数なしで表現すると，(9.1)の解は

$y(x)=\prod_{k=0}^{x-1}a(k)y(0)=C\prod_{\ell=0}^{x-1}a(\ell)$ であるから，

$=C\alpha^x\times\prod_{k=1}^{m}\prod_{\ell=0}^{x-1}(\ell-a_k)$ となる。つまり

$\prod_{\ell=0}^{x-1}(\ell-a_k)=\Gamma(x-a_k)$ と見られる訳である。

正確には $\Gamma(x-a_k)=\prod_{\ell=0}^{x-1}(\ell-a_k)\times\Gamma(-a_k)$ である。〉

例2　$y(x+1)-a^x y(x)=0$

〔解〕$y(x)=\prod_{k=0}^{x-1} a^k y(0)=Ca^{\sum_{k=0}^{x-1} k}=Ca^{\frac{x(x-1)}{2}}$

例3　$y(x+1)-c\times a^x y(x)=0$

(但し c, a は0でない定数とする)

〔解〕$a(k)\equiv c\times a^k$ より

$$y(x)=C\prod_{k=0}^{x-1}(c\times a^k)=C\times c^x\times a^{\frac{x(x-1)}{2}}$$

〈注：$y(x+1)+a^x y(x)=0 \Leftrightarrow y(x)=C(-1)^x a^{\frac{x(x-1)}{2}}$ となる。($\because$ $c\equiv -1$ としたから)〉

問　　$y(x+1)-ca^{2x}y(x)=a^{x^2+x}(\ell x+m)\times c^{x+n}$ を解け。(但し，c, a, ℓ, m, n は定数で，c, a は共に0でないとする)

〈注：この論文の最後においても良い問題である。〉

(Ⅱ)非同次1階線形差分方程式

方程式

$$y(x+1)-a(x)y(x)=b(x) \tag{9.3}$$

に対応する同次方程式(余方程式)

$$y(x+1)-a(x)y(x)=0 \tag{9.1}$$

の一般解は

$$y(x)=Ce^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x)}\}} \tag{9.2}$$

であった。

このCを $C(x)$ にかき直して(9.3)の一般解を求めて見る。〈注：この方法を“定数変化法”という。〉

$$y(x)\equiv C(x)e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x)}\}} \qquad (イ)$$

として，(9.3)に代入すると

$$C(x+1)e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x+1)}\}}-a(x)C(x)e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x)}\}}=b(x) \qquad (ロ)$$

一方，$e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x)}\}}$ は(9.1)の特解より

$$e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x+1)}\}}=a(x)e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x)}\}} \qquad (ハ)$$

(ハ)を使って，(ロ)をかき直すと，

$$C(x+1)e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x+1)}\}}-C(x)e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x+1)}\}}=b(x)$$

$$\Leftrightarrow \Delta C(x)=b(x)e^{-\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x+1)}\}} \Leftrightarrow C(x)$$

$$=C+\Delta^{-1}\{b(x)e^{-\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x+11)}\}}\} \qquad (ニ)$$

となる。(ニ)を(イ)に代入して

$$y(x)=e^{\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x)}\}}[C+\Delta^{-1}\{e^{-\Delta^{-1}\{\log_e{}^{a(x+1)}\}}b(x)\}]$$

が得られる。〈注：これを(9.4)とする。〉

((注意：(9.1)の一般解 $y(x)$ は

$$y(x)=\prod_{k=0}^{x-1}a(k)y(0)=C\prod_{k=1}^{x-1}a(k)$$

であるから，(9.3)の一般解を求めるのに

$y(x)\equiv C(x)\prod_{k=0}^{x-1}a(k)$ を(9.3)に代入して

$$C(x+1)\prod_{k=0}^{x}a(k)-a(x)\times C(x)\prod_{k=0}^{x-1}a(k)$$

$$=b(x)\Longleftrightarrow \Delta C(x)=\frac{b(x)}{\prod_{k=0}^{x}a(k)}\Longleftrightarrow C(x)$$

$$=\Delta^{-1}\left\{\frac{b(x)}{\prod_{k=0}^{x}a(k)}\right\}+C$$

元に戻して

$$y(x)=C\prod_{k=0}^{x-1}a(k)+\prod_{k=0}^{x-1}a(k)\times\Delta^{-1}\left\{\frac{b(x)}{\prod_{k=0}^{x}a(k)}\right\} \tag{9.5}$$

を得る。

(9.5)より，(9.4)の方が非同次1階線形微分方程の一般解を表現する公式により似ている。))

例1　$y(x+1)-xy(x)=1$ $(x>0)$　　(イ)

〔解〕余方程式は

$$y(x+1)-xy(x)=0 \qquad (ロ)$$

であるが，$y(x)=\Gamma(x)$ は(ロ)の解である。

よって，(イ)の一般解を求める為に

$$y(x)=C(x)\Gamma(x) \qquad (ハ)$$

として，(イ)に代入すると

$$C(x+1)\Gamma(x+1)-x\Gamma(x)C(x)=1\Longleftrightarrow \Delta C(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(x+1)}\Longleftrightarrow C(x)=\Delta^{-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(x+1)}\right\}+C$$

であるから

〔答〕 $y(x)=\Gamma(x)\left[C+\Delta^{-1}\left\{\dfrac{1}{\Gamma(x+1)}\right\}\right]$ //

〈注1：公式(9.4)によれば
$e^{\Delta^{-1}\{\log_e x\}}=e^{\log_e\Gamma(x)}$ ($\because\ \Delta\log_e\Gamma(x)=\log_e x$)
$=\Gamma(x)$ となる。よって{ } $=e^{-\Delta^{-1}\{\log_e(x+1)\}}\times 1$
$=e^{-\log_e\Gamma(x+1)}=\dfrac{1}{\Gamma(x+1)}$ であるから，

$$y(x)=C\Gamma(x)+\Gamma(x)\Delta^{-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(x+1)}\right\}$$ で良い。〉

〈注2：ガンマ関数を導入した差分方程式では，独立変数を整数だけに制限すると無理が出る。

そのときには，任意定数 C ではなく，1を周期とした周期関数を C の代わりに使う。

普通，それらは

$$P_1(x), P_2(x), \cdots\cdots, \pi_1(x), \pi_2(x), \cdots\cdots$$

などと表わす。しかし，1階の差分方程式では，最終的に $P(x)$，または $\pi(x)$ だけですむ。〉

例2　$y(x+1)-a^{2x}y(x)=a^{x^2+x}(bx+c)$
(但し, a, b, c は0でない定数とする)を解け。

〔解〕 $y(x)=\prod\limits_{k=0}^{x-1}a^{2k}=a^{\sum_{k=0}^{x-1}2k}=a^{2\times\frac{(x-1)x}{2}}=a^{x(x-1)}$

が余方程式

$$y(x+1)-a^{2x}y(x)=0$$

の1つの解より

$$y(x)=a^{x(x-1)}C(x)$$

として，与式に代入すれば

$$a^{x(x+1)}C(x+1)-a^{2x+(x^2-x)}C(x)=a^{x^2+x}(bx+c)$$

$$\Longleftrightarrow \Delta C(x)=bx+c=bx^{\langle1\rangle}+c \quad \Longleftrightarrow$$

$$C(x)=b\Delta^{-1}x^{\langle1\rangle}+c\Delta^{1}1=b\times\frac{1}{1+1}x^{\langle2\rangle}+cx=\frac{b}{2}x^{\langle2\rangle}$$

$$+cx+C=C+\left\{\frac{b}{2}x^2+\left(c-\frac{b}{2}\right)x\right\}$$

を元の式に戻して

$$y(x)=a^{x(x-1)}C+a^{x^2-x}\left\{\frac{b}{2}x^2+\left(c-\frac{b}{2}\right)x\right\}$$

//

例3　$y(x+1)-a^{2x}y(x)=a^{x^2+2x}(bx+c)$
(a, b, c は0でない定数)を解け。

〈注：$a=1$ のとき，例2と同じになるから，そのときは $y(x)=C+\left\{\dfrac{b}{2}x^2+\left(c-\dfrac{b}{2}\right)x\right\}$〉

よって $a\neq 1$ として考えて

$$y(x)\equiv a^{x(x-1)}C(x) \qquad (イ)$$

として，与式に代入すれば

$$a^{x(x+1)}C(x+1)-a^{x^2+x}C(x)=a^{x^2+2x}(bx+c)$$

$$\Longleftrightarrow C(x+1)-C(x)=a^x(bx+c) \qquad (ロ)$$

(ロ)を解くために

$$C(x)\equiv a^xD(x) \qquad (ハ)$$

として，(ロ)に代入すれば

$$a^{x+1}D(x+1)-a^xD(x)=a^x(bx+c)$$

$$\Longleftrightarrow aD(x+1)-D(x)=bx+c$$

$$\Longleftrightarrow D(x)\{a(1+\Delta)-1\}=bx+c$$

$$\Longleftrightarrow \{(a-1)+a\Delta\}D(x)$$

$$=bx+c$$

$$=bx^{\langle1\rangle}+c$$

また

$$c-\frac{ab}{a-1}=\frac{a(c-b)-c}{a-1}$$

に注意して，右の割算が出る。

$$\begin{array}{r|l} & \frac{b}{a-1}x^{\langle1\rangle}+\frac{a(c-b)-c}{(a-1)^2} \\ \hline (a-1)+a\Delta & bx^{\langle1\rangle}+c \\ & bx^{\langle1\rangle}+\frac{ab}{a-1} \\ \hline & \frac{a(c-b)-c}{a-1} \\ & \frac{a(c-b)-c}{a-1} \\ \hline & 0 \end{array}$$

よって $D^*(x)=\dfrac{b}{a-1}x+\dfrac{a(c-b)-c}{(a-1)^2}$

$$C^*(x)=a^x\left\{\frac{b}{a-1}x+\frac{a(c-b)-c}{(a-1)^2}\right\}$$

$$y^*(x)=a^{x^2}\left\{\frac{b}{a-1}x+\frac{a(c-b)-c}{(a-1)^2}\right\}$$

また，余方程式の一般解 $y_0(x)=Ca^{x^2-x}$ であるから

〔答〕 $y(x)=Ca^{x^2-x}+a^{x^2}\left\{\dfrac{b}{a-1}x+\dfrac{a(c-b)-c}{(a-1)^2}\right\}$

//

10. あ と が き

後は次回に送ることにする。(ⅰ)1階の定数係数の微分方程式における山辺の方法の使い方と積分への応用。(ⅱ)2階の定数係数の微分・差分方程式における山辺の方法の使い方。

これらを次回で論ずることにする。

「受理年月日　2002年9月30日」