

3次元異材接合体の特異応力場の解析

The Analysis of Singular Stress Fields for Three-Dimensional Bonded Structure

山下 進

古口日出男*

Susumu YAMASHITA, Hideo KOGUCHI

1. はじめに

近年、材料の高性能化、高機能化を目的として、材料の持つ特性を生かした異材接合技術が発展し、多くの機械部品や電子部品に利用されている。

このように異なる特性を持った材料を接合した場合、その界面付近において、変形特性（ヤング率、ポアソン比）や熱特性（熱膨張係数）の違いから、応力やひずみの集中が生じ、き裂の発生や強度低下を引き起こすことがある。このことから、異材接合材に対する強度評価、信頼性評価が重要な課題となっている。

図1は機械や電子部品に見られる接合の代表的な例である接着接合継手を示している。この図から、継手形状には、いくつかの角部が存在し、その角部は2本の応力特異線の交点となるため、角部近傍での応力特性を解明することが重要な課題であることがわかる。

特に電子部品などのような金属とセラミックスの接合体の応力特異場を考えると、多くは熱ひずみを伴い、解析には熱を考慮することが望ましい。しかしながら、これまで角部近傍の応力特異場に関する理論的、数値的な研究はいくつか行われているが、3次元モデルに対しての熱ひずみを伴う現象を扱った研究はほとんどない^{1)~3)}。

図2は実際に用いられているコーナー部の接着継手の一例である。このように接合端部角度は必ずしも直角ではなく、さまざまな角度のものが存在する。しかしながら、今まで行ってきた解析では図3(a)に示すように、2つの材料の接合端部角度 θ_1, θ_2 が共に 90° の場合のみであった。

そこで、本研究では金属とセラミックスの2相異材接合体を解析対象として取り上げる。そして、Pageau ら⁴⁾ が用いた有限要素法の定式化に基づいた固有値解析を行ない、特異性オーダーを求める。

具体的には、接合端部角度の違い（図3(b)参照）による特異性オーダーの変化、および接合端部角度が直角の場合における一様な温度変化のある3次元異材接合体角部近傍の熱変位および熱応力特性を明らかにする。

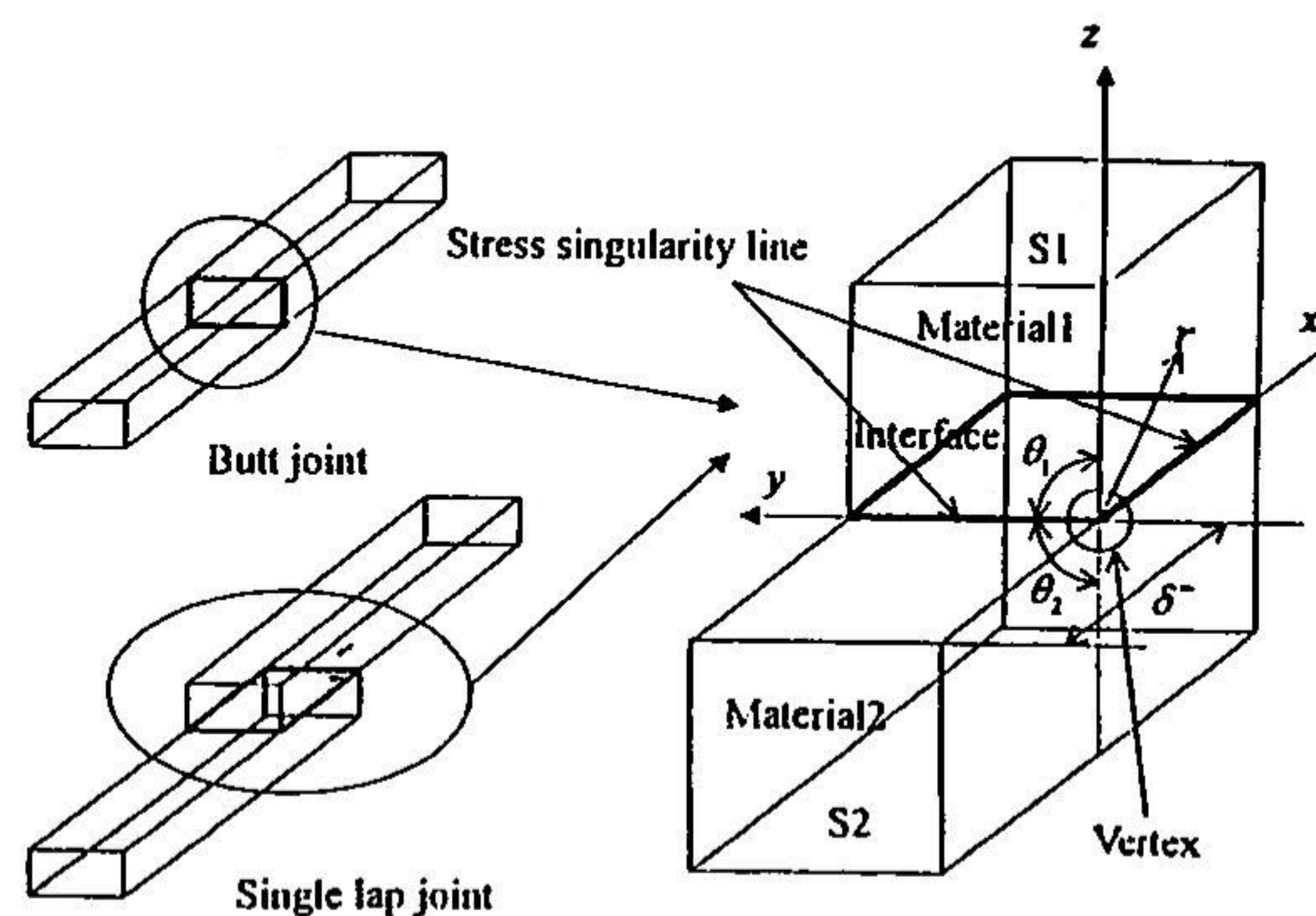


Fig.1 Three-Dimensional bonded structure

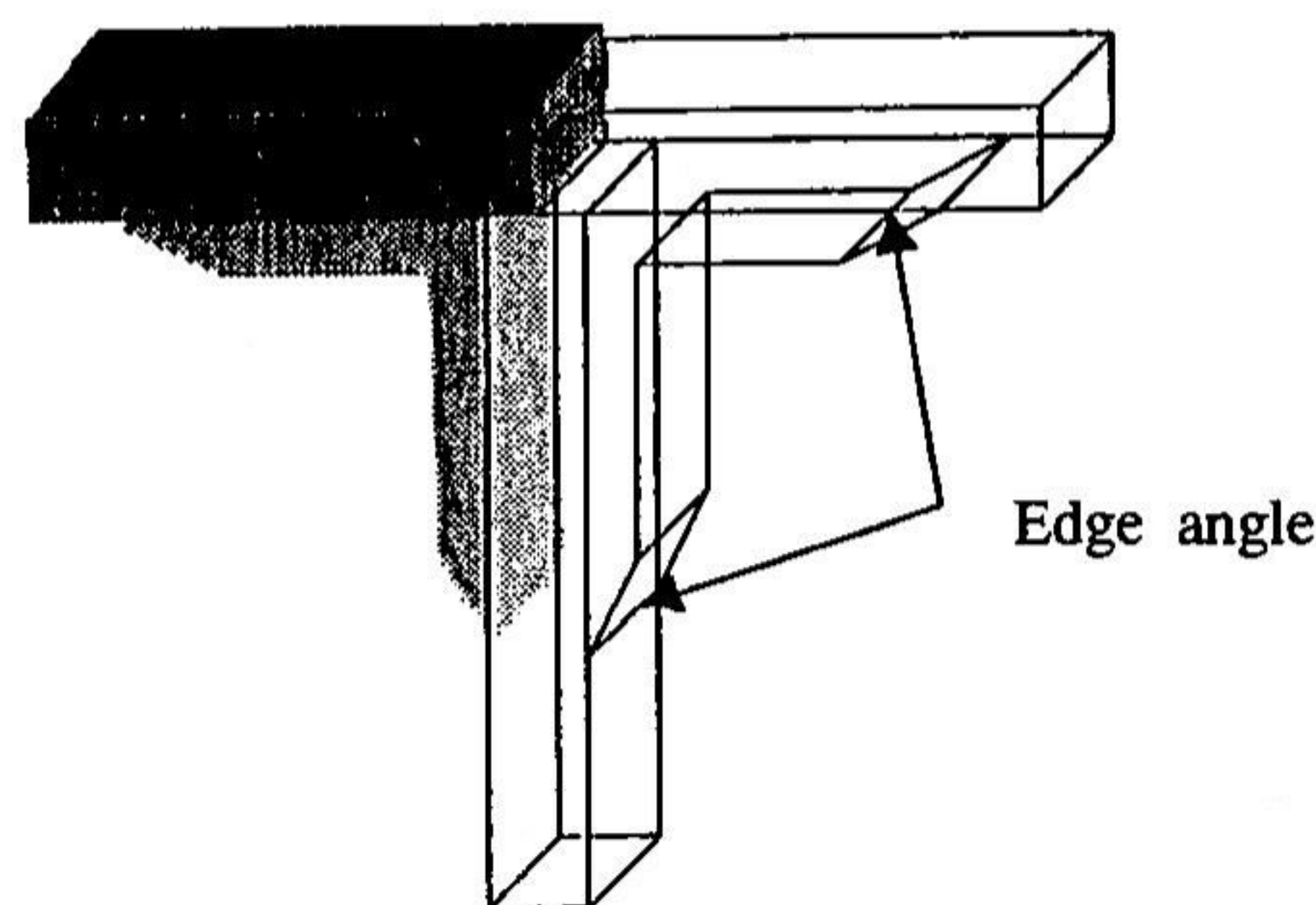


Fig.2 Example of glued joint

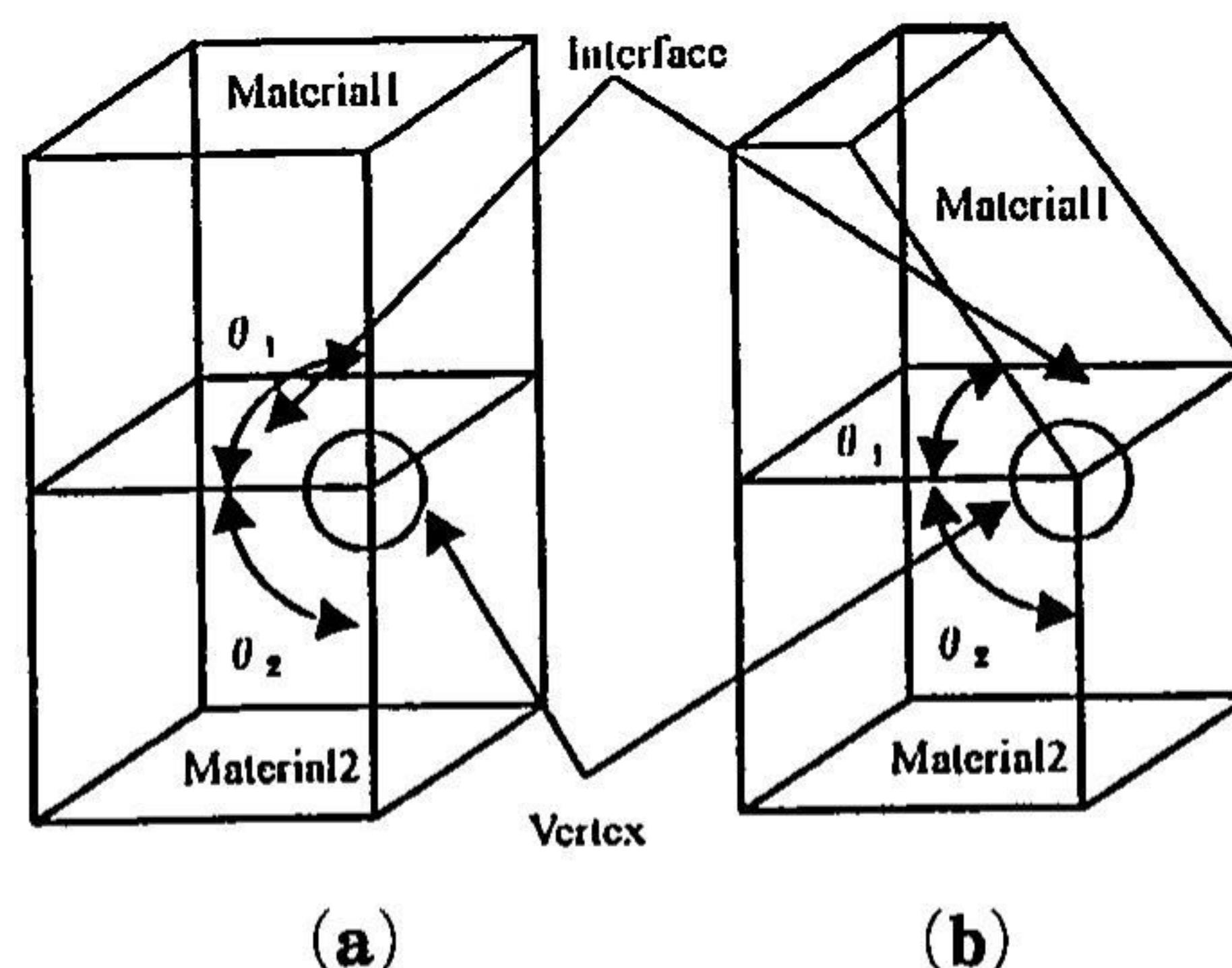


Fig.3 Variation of edge angle

* 長岡技術科学大学機械系教授

2. 解析方法

3次元接合体の接合界面端角部の応力は、図4に示すように角部を原点($r=0$)とした球座標を用いると、式(1)のように表される。

$$\sigma_{ij} \propto r^{p-1} = r^{-\lambda} \quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力成分、 r は角部から任意の点までの距離、 p は固有方程式の特性根、 $\lambda(=1-p)$ は特異性オーダーを表す。

本研究ではPageauらの用いた方法⁴⁾を用いているが、その詳細は文献4)を参照されたい。この方法は、有限要素法により特性根 p を応力分布からではなく、直接ベクトルの固有値として求めることができる。また未知量である変位が r に依存するため、界面上の分割を必要としないので、3次元を2次元的に扱うことができる。したがって、要素分割は球面上のみでよい。要素は図5に示すような8節点のセレンディピティ族2次要素を用いる。角部において、応力は特異状態にあるとする。それぞれの要素の節点は点 O を頂点とした球座標で表され、要素内の点 $Q(r, \theta, \phi)$ は、以下のように与えられる。

$$r = \rho r_0 = r_0 \left(\frac{1+\zeta}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^8 H_i \theta_i, \quad \phi = \sum_{i=1}^8 H_i \phi_i$$

ここで、 r_0 は球の半径、 $-1 \leq \zeta \leq 1$ 、 θ_i, ϕ_i は節点 i の角度、 H_i は式(3)に示すような内挿関数である。

$$H_1 = -\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi)(\eta+\xi+1)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2)$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\xi)(-\eta+\xi-1)$$

$$H_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$H_5 = \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi)(\eta+\xi-1)$$

$$H_6 = \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$H_7 = \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi)(\eta-\xi-1)$$

$$H_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

なお、 (ξ, η) は正規化された座標である。

原点における変位を0とすると、内点 Q における変位は、次式のように表せる。

$$u_j = \rho^p \left[\sum_{i=1}^8 H_i u_{ji} \right] \quad (j = r, \theta, \phi) \quad (4)$$

ここで、 ρ は r/r_0 である。

図4に示す要素が平衡状態にあるとすると、仮想仕事の原理を満足しなければならない。体積力が作用しないと仮定すると、球座標表示した仮想仕事の原理は以下のように記述される。

$$\begin{aligned} & \int_{r_0} \int_{\theta} \int_{\phi} \delta \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= r_0^2 \int_{\theta} \int_{\phi} \delta \{ u_0 \}^T \{ F \} \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\{u_0\}$ は球面($r=r_0$)における変位ベクトル、 $\{F\}$ は外部境界に加えた荷重ベクトルを表す。

熱ひずみを考慮した応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\{ \sigma \} = [D] (\{ \epsilon \} - \{ \epsilon_t \}) \quad (6)$$

ここで、 $\{ \epsilon_t \}$ は熱ひずみベクトルである。すなわち、

$$\{ \epsilon_t \} = \{ \epsilon_{rr} \epsilon_{\theta\theta} \epsilon_{\phi\phi} \epsilon_{r\theta} \epsilon_{r\phi} \epsilon_{\theta\phi} \}^T = \alpha \Delta T (111000)^T \quad (7)$$

である。ここで、 α は熱膨張係数、 ΔT は温度変化を示す。

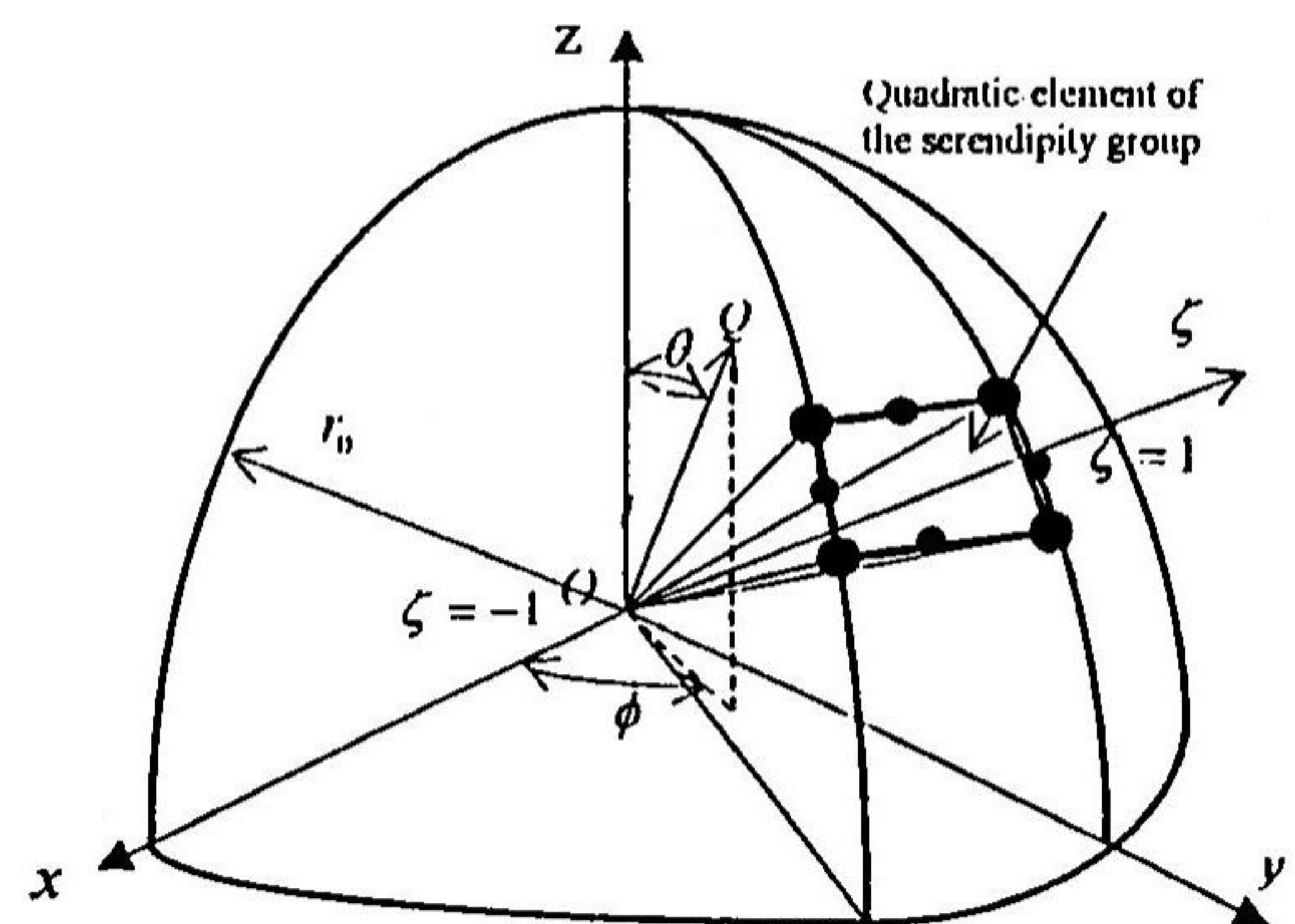


Fig.4 Finite element mesh and spherical coordinate system

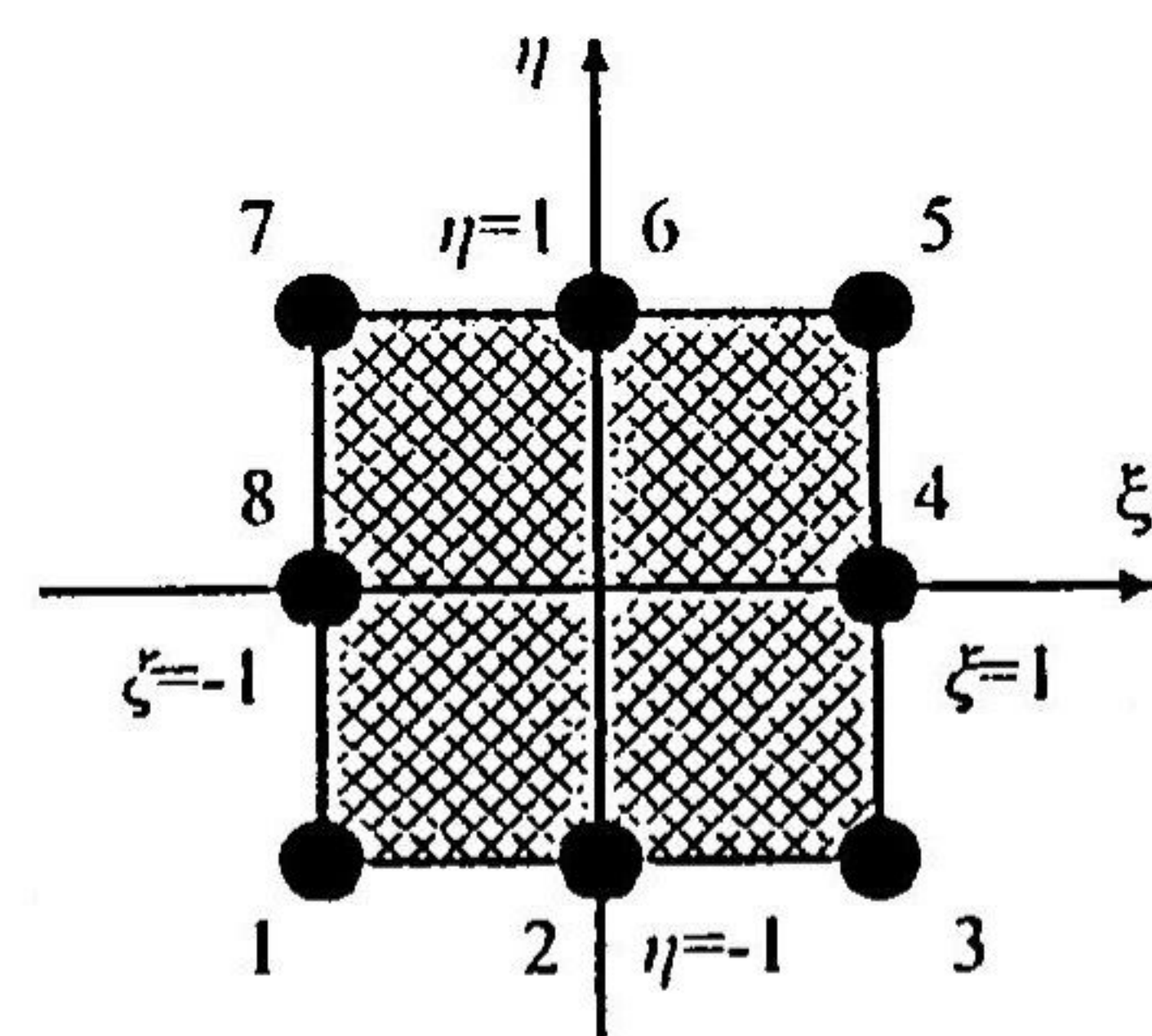


Fig.5 Quadratic element of the serendipity group

また変位とひずみの関係は次のように表すことができる。

$$\{\varepsilon\} = \frac{\rho^{p-1}}{r_0} \sum_i (p[B_{ai}] + [B_{bi}]) \{u_i\} \quad (8)$$

ここで、 $[B_{ai}]$, $[B_{bi}]$ は、内挿関数およびその微分を含むマトリックスである。

式(6), (7), (8)を式(5)に代入して、 p について整理すると、次の式が得られる。

$$(p^2[A] + p[B] + [C])\{U\} = \{F_i\} \quad (9)$$

ここで、 $\{F_i\}$ は熱ひずみによる節点力ベクトルである。具体的には以下のように与えられる。

$$\{F_i\} = \frac{2p+1}{p+2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] \{\varepsilon_i\} \sin \theta |J_1| d\xi d\eta \quad (10)$$

ここで、 $|J_1|$ は、座標変換に伴うヤコビアンである。

式(9)の右辺を0と置くと、特性根 p を決定する式が得られる。すなわち、

$$(p^2[A] + p[B] + [C])\{U\} = \{0\} \quad (11)$$

$$|p^2[A] + p[B] + [C]| = 0 \quad (12)$$

特性方程式(12)を満足する特性根を式(4)に代入すると、任意の点における r, θ, ϕ 方向の熱変位が計算できる。また、この変位を式(7)に代入することによって、熱ひずみを求めることができる。さらに熱応力は、以下の式を用いて計算される。

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\phi}, \sigma_{\theta\phi}\} \\ &= [D] \frac{r^{p-1}}{r_0^p} \sum_{i=1}^8 (p[B_{ai}] + [B_{bi}]) \{u_{ji}\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$(j = r, \theta, \phi)$$

$[D]$ は応力-ひずみマトリックスで、具体的には以下のように与えられる。

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & C_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ただし、

$$C_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad C_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (15)$$

E はヤング率、 ν はポアソン比である。

3. 解析結果と考察

3-1 接合端部角度の変化による特性根(model 1)

図3の接合端部角度を $\theta_1 = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ とし、図6に示すような有限要素モデルを使用した。また材料1の要素分割領域の境界は、材料1の接合端部角度を α とすると、式(16)のような式で与えられる曲線になる。

$$\theta = \cos^{-1}(\sin \alpha \sin \phi) \quad (16)$$

解析には、窒化けい素セラミックスと銅の異材接合体を用いた。計算に用いた材料定数を表1に示す。なお温度変化 ΔT は50[K]とした。角部 O で全方向、 $\theta = 0^\circ$ で θ, ϕ 方向の変位を0とした。

Table 1 Material properties

	material	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio	Thermal expansion coefficients ($\times 10^{-6} \text{K}^{-1}$)
material 1 (ceramics)	Si_3N_4	304	0.27	4.2
material 2 (metal)	Cu	108	0.33	16.7

図7は、横軸を接合端部角度 α 、縦軸を特性根 P としたときの角度の変化と特性根の関係を示している。なお $\alpha = 90^\circ$ のときには、グラフ上にはプロットしてないが $P = 0.89362$ なる特性根が存在する。これを除いては、値が全て0に近く、特異応力場になるとは考えにくい。また角度の変化による一定の傾向は見られない。

次に、2つの材料のヤング率の比をパラメータとして、接合端部角度の違いによる特性根の分布を調べた。材料1のヤング率 $E_1 = 200 \text{ GPa}$ 、2つの材料のポアソン比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 、ヤング率の比を変えて特性根の計算を行い、 $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の場合の結果を図8に示す。計算した範囲では、接合端部角度が 90° に近づくほど、特異応力場になる組合わせが多くなる。また $E_1 > E_2$ の条件では、 30° の場合は $E_1/E_2 = 100.0$, 60° の場合は $E_1/E_2 = 50.0$, 90° の場合は $E_1/E_2 = 5.0$ で応力特異場が現れる。

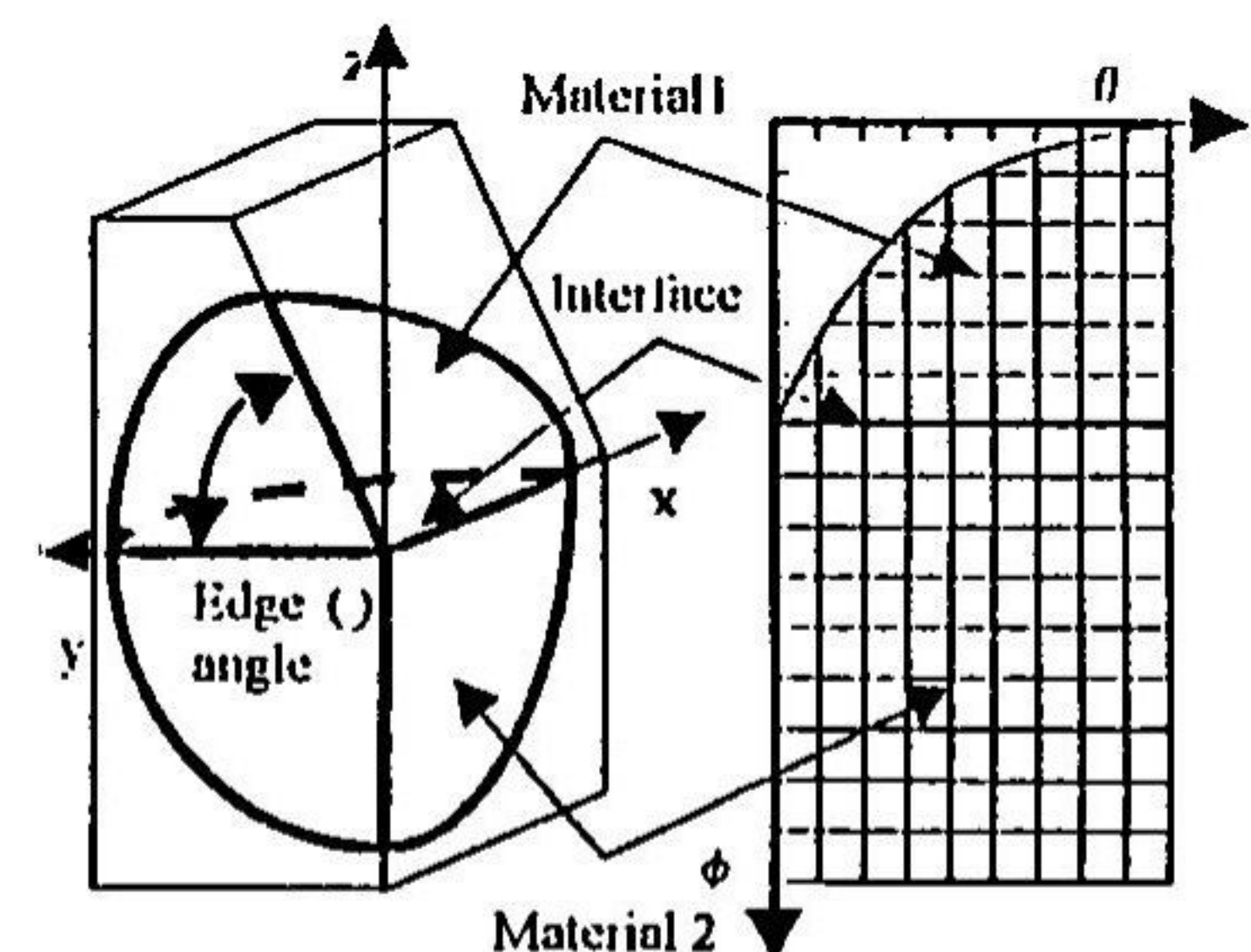
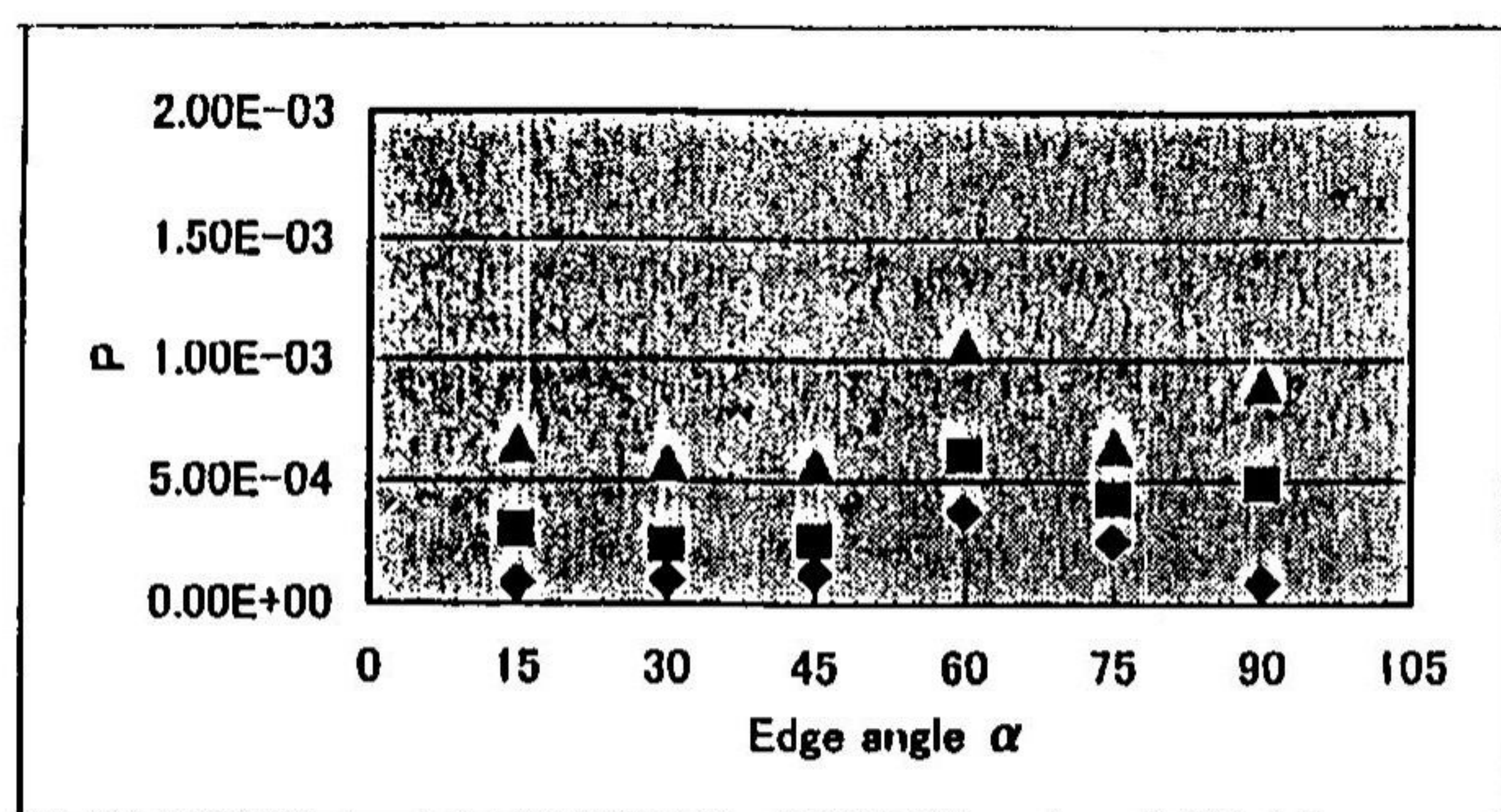
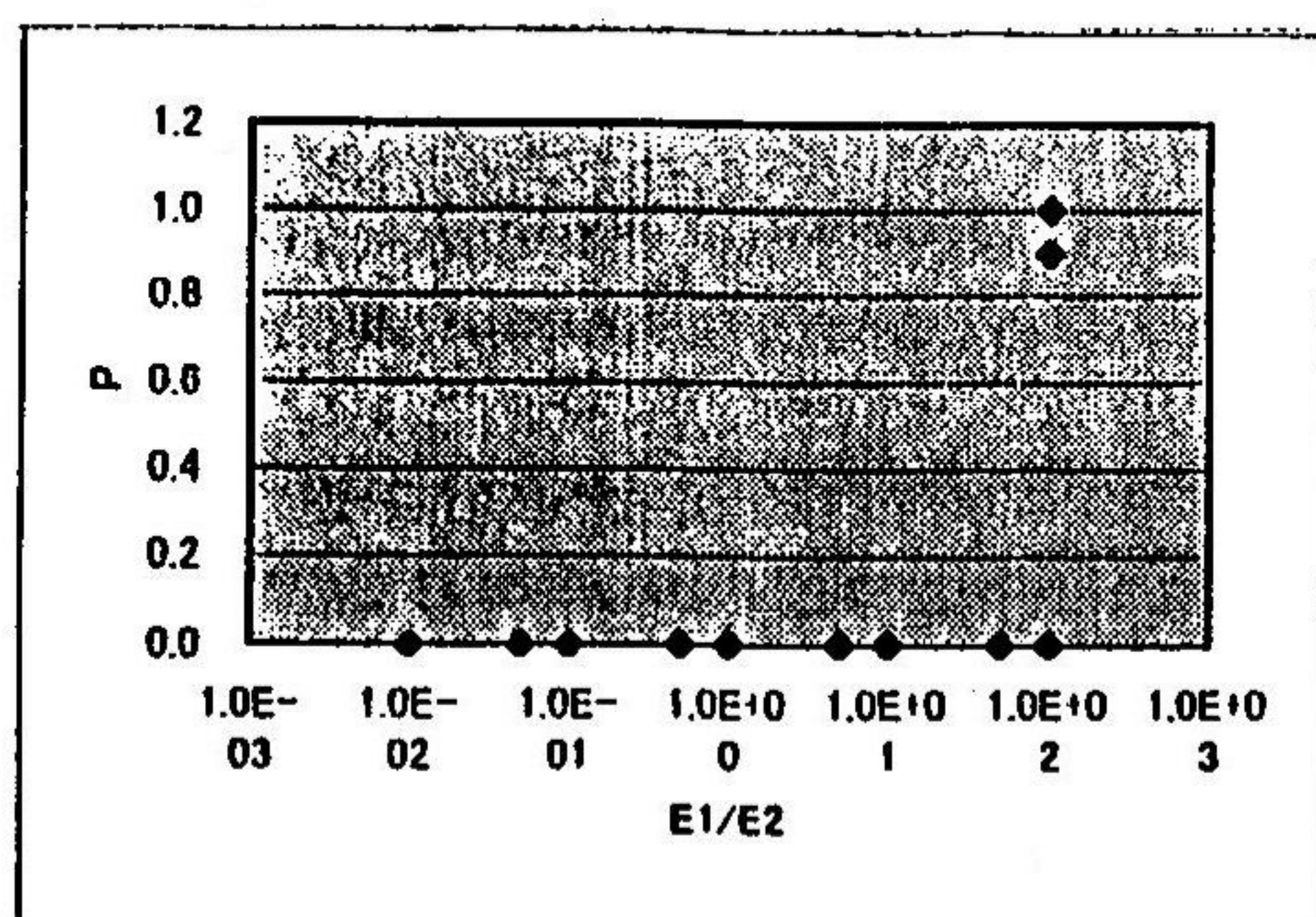
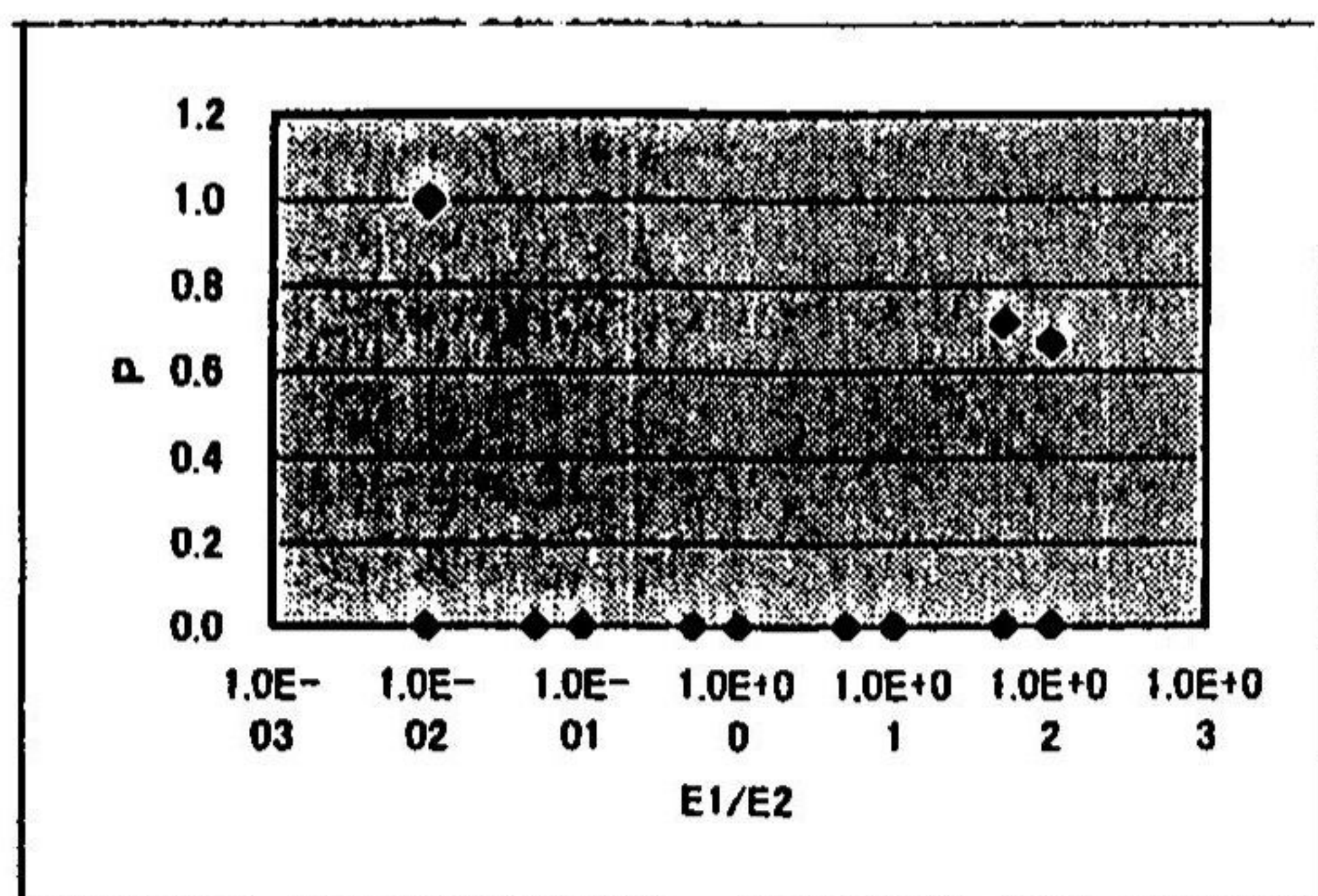
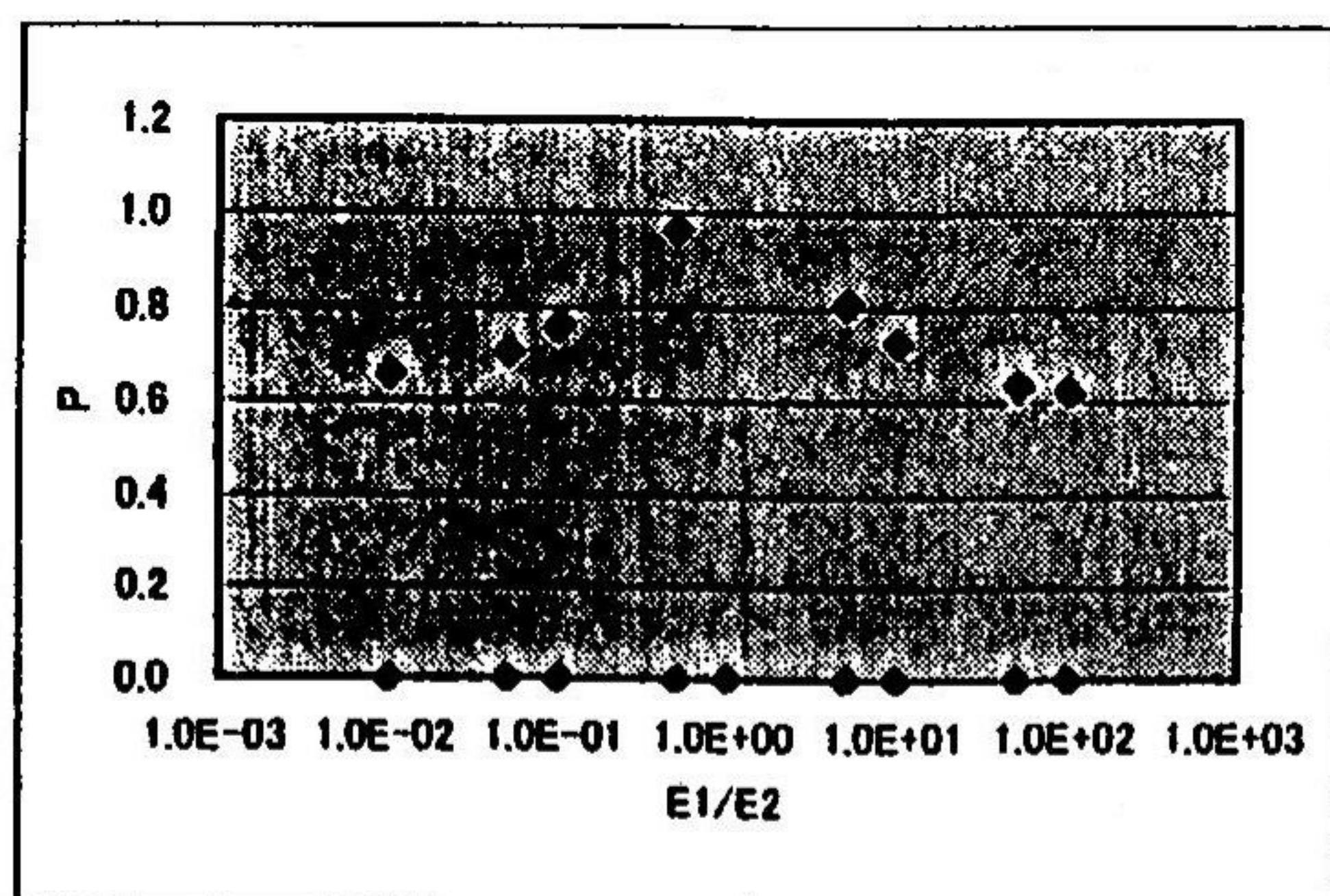


Fig.6 A schema of model 1 for analysis

Fig.7 Relation of edge angle and $p(\text{Si}_3\text{N}_4\text{-Cu})$ (a) $\alpha = 30^\circ$ (b) $\alpha = 60^\circ$ (c) $\alpha = 90^\circ$ Fig.8 Relation of E_1/E_2 and p for variation of edge angle3-2 $90^\circ - 90^\circ$ 接合モデル(model 2)

解析モデルは、図9(a)に示すような界面端の全ての角度(θ_1, θ_2)を 90° とし、1/8球体どうしを接合したものである。要素分割は図9(b)に示すように θ 方向に8分割、 ϕ 方向に4分割とした。なお、解析に用いた材料および解析条件は温度変化 ΔT を5[K]とした以外は3-1と同様である。

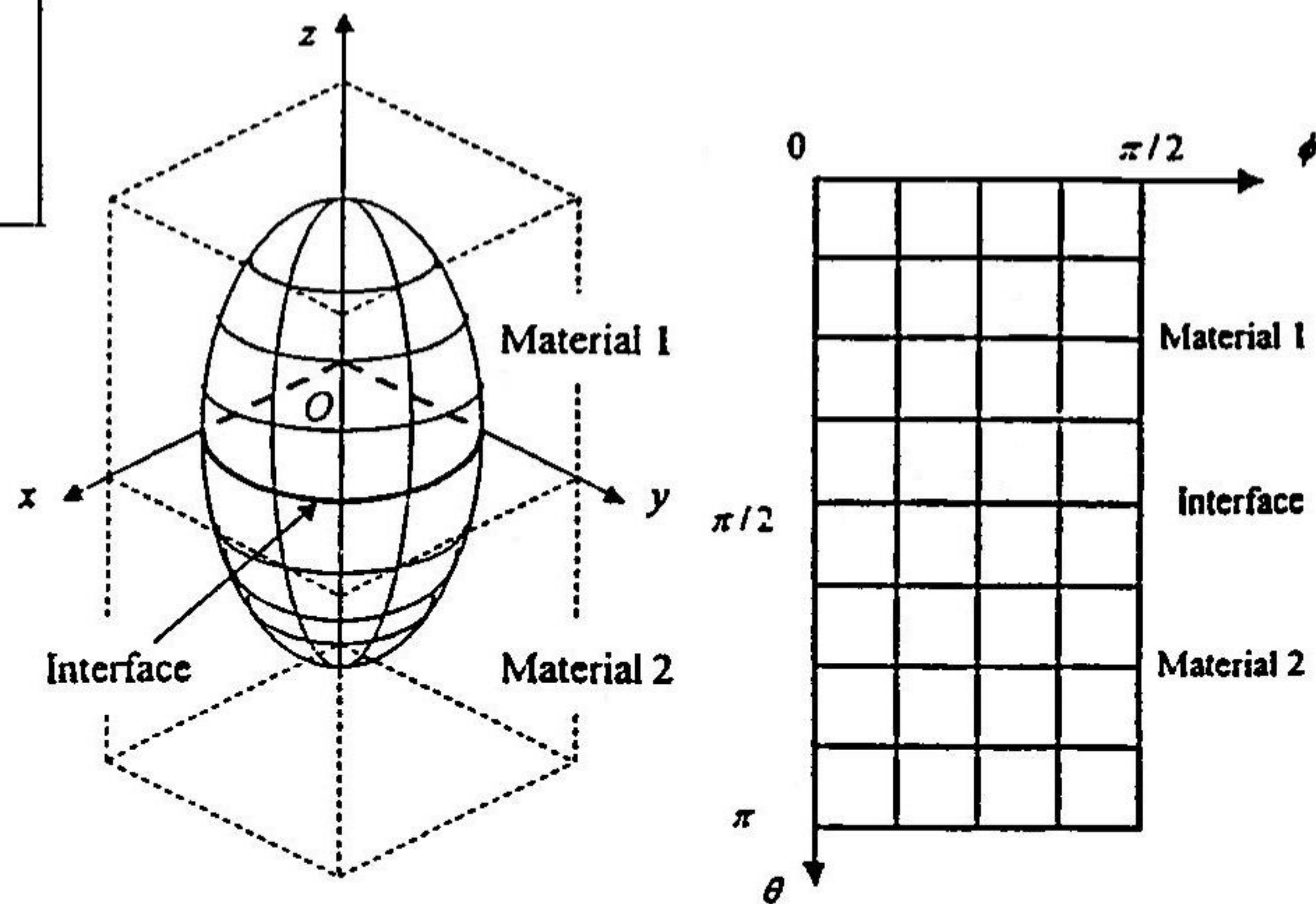


Fig.9 A schema of model 2 for analysis

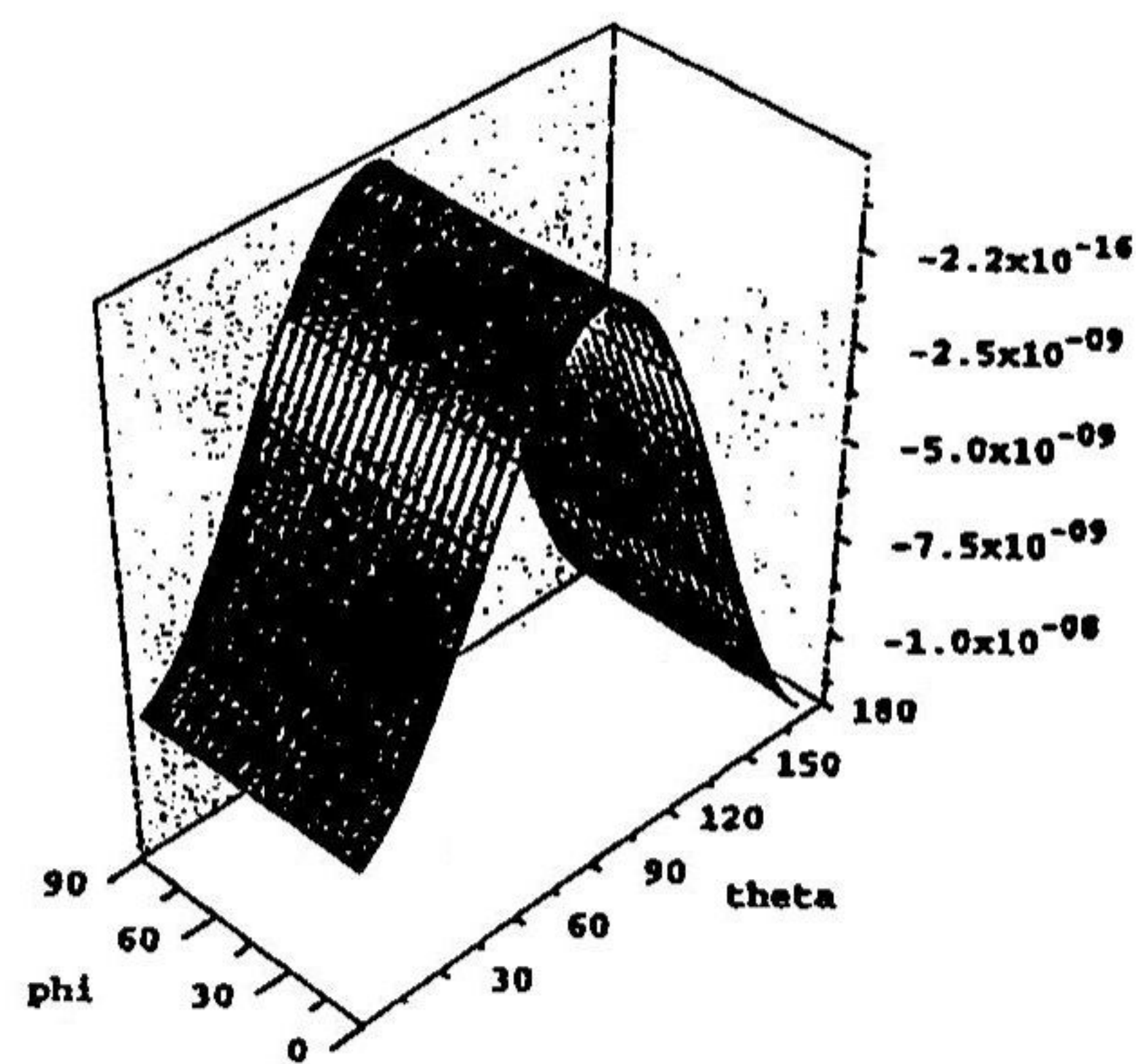
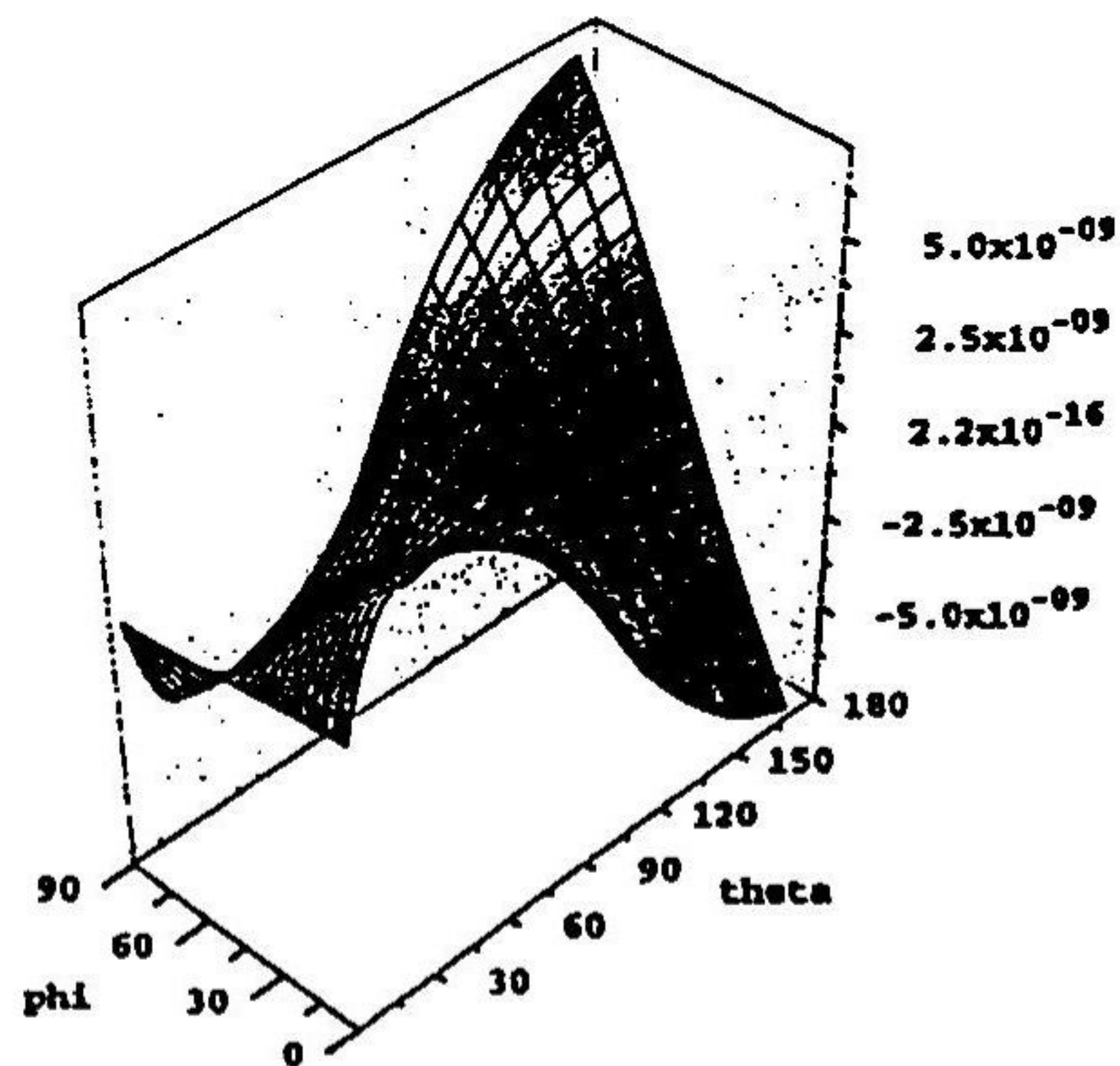
(a) r -direction(b) ϕ -direction

Fig.10 Distribution of thermal displacement

3次元異材接合体の特異応力場の解析

この異材接合体の場合、式(12)の特性根 p は、0.9278908であった。求められた特性根に対する角部近傍($r = 10^{-6}$)における熱変位分布の一例を図10に示す。図10(a)は r 方向の分布を示している。赤道部($\theta = 90^\circ$)において、変位が最大となり、 ϕ 方向には一定の値を示す分布になっている。図10(b)は ϕ 方向の分布である。 $\phi = 45^\circ$ を中心として、反対称な分布を示している。同様に角部近傍の熱応力分布の一例を図11に示す。図11(a)は熱応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布である。 $\theta = 0^\circ$ で最大値をとり、 ϕ 方向には変化しない。図11(b)はせん断熱応力 $\sigma_{r\phi}$ の分布である。セラミックス側の応力分布はほぼ一様で、金属に対する分布は $\phi = 45^\circ$ に対して反対称である。

3-3 埋め込み型モデルに対する解析(model 3)

図12は一方の材料の中に、もう一方の材料が埋め込まれている異材接合体である。この埋め込み型モデルに対して、特性根および熱変位、熱応力の計算を行った。ここでは、表2に示すの3つの場合について解析を行った。計算に用いた材料定数は表3の通りである。温度変化は300[K]とした。また図13に ϕ - θ 座標系に展開した要素分割図を示す。表4は計算された特性根である。

図14、図15、図16に熱変位と熱応力分布を示す。どの場合においても、埋め込まれた材料の熱変位はほぼ一定であることがわかる。

Table 2 Case of analysis

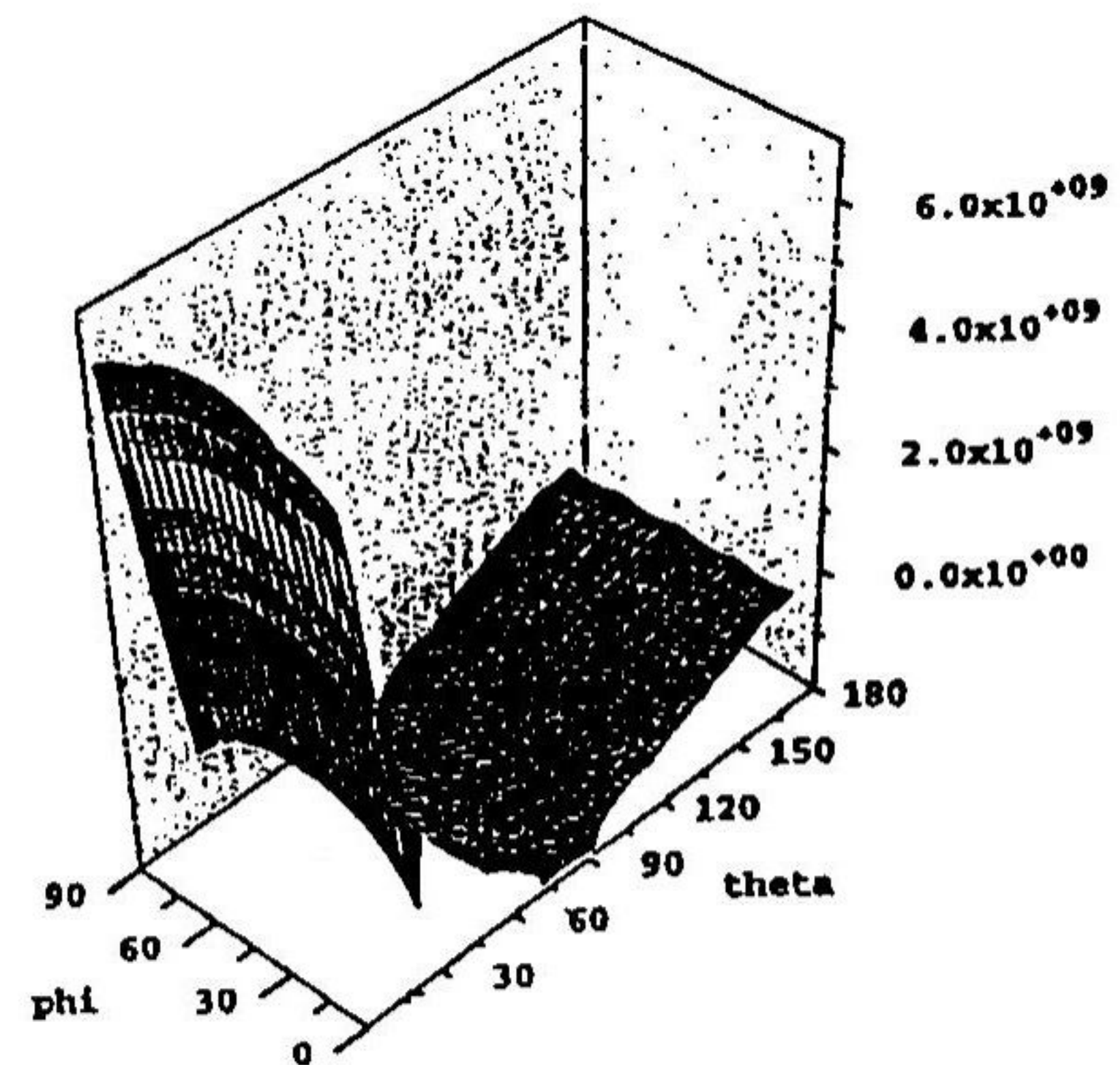
Case 1	No delamination
Case 2	Delamination at interface S1
Case 3	Delamination at interface S2

Table 3 Material properties

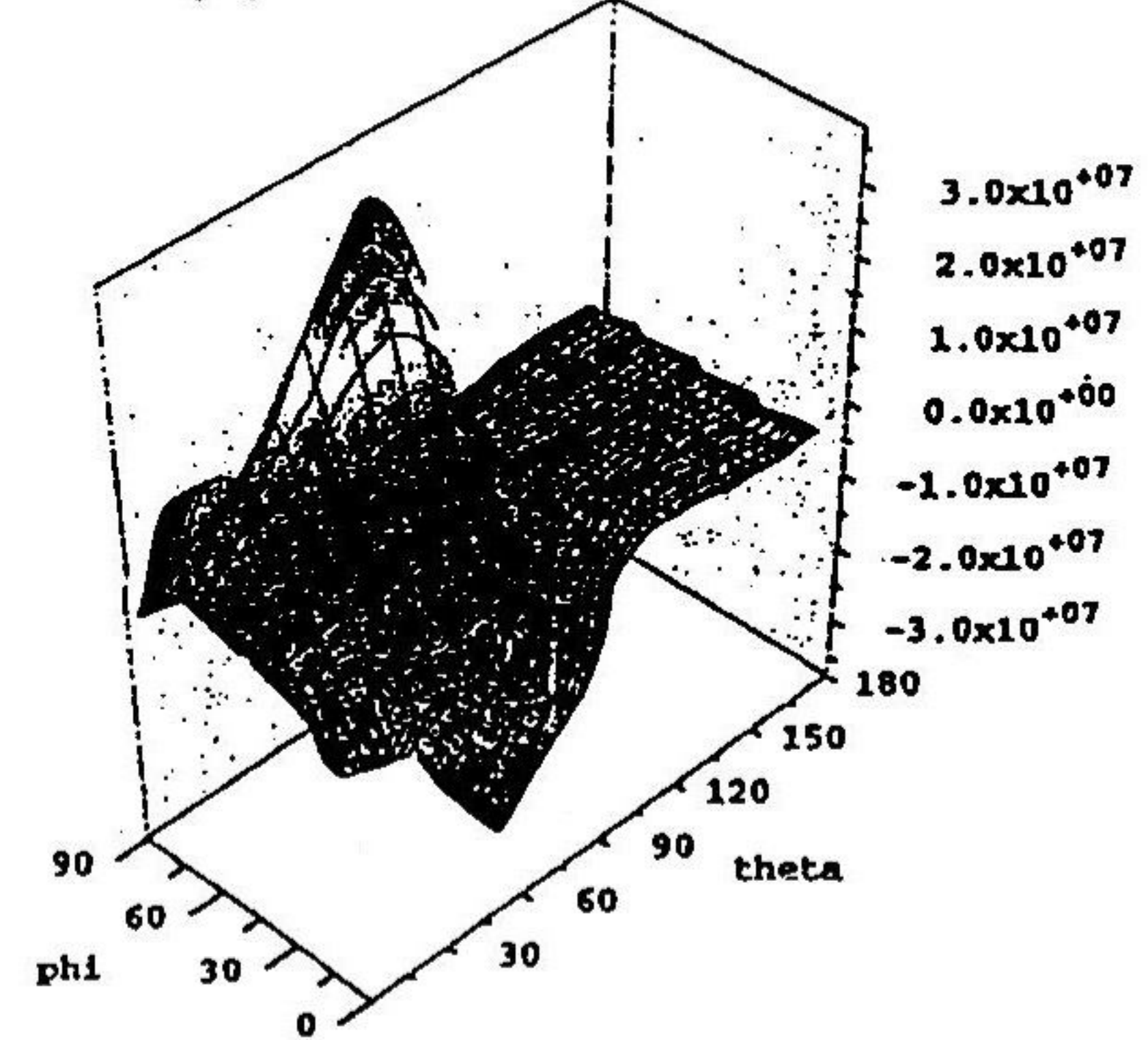
	material	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio	Thermal expansion coefficients ($\times 10^{-6}K^{-1}$)
material 1	Al ₂ O ₃	359.0	0.20	8.1
material 2	Resin	4.93	0.33	5.5

Table 4 Characteristic solution in model 3

Case	Characteristic solution
Case 1	0.4739, 0.4742, 0.5977
Case 2	0.3462, 0.4082, 0.4676, 0.8937
Case 3	0.1944, 0.2230, 0.2495, 0.8261, 0.9013, 0.9293



(a) Normal thermal stress $\sigma_{\theta\theta}$



(b) Shear thermal stress $\sigma_{r\phi}$

Fig.11 Distribution of thermal stress

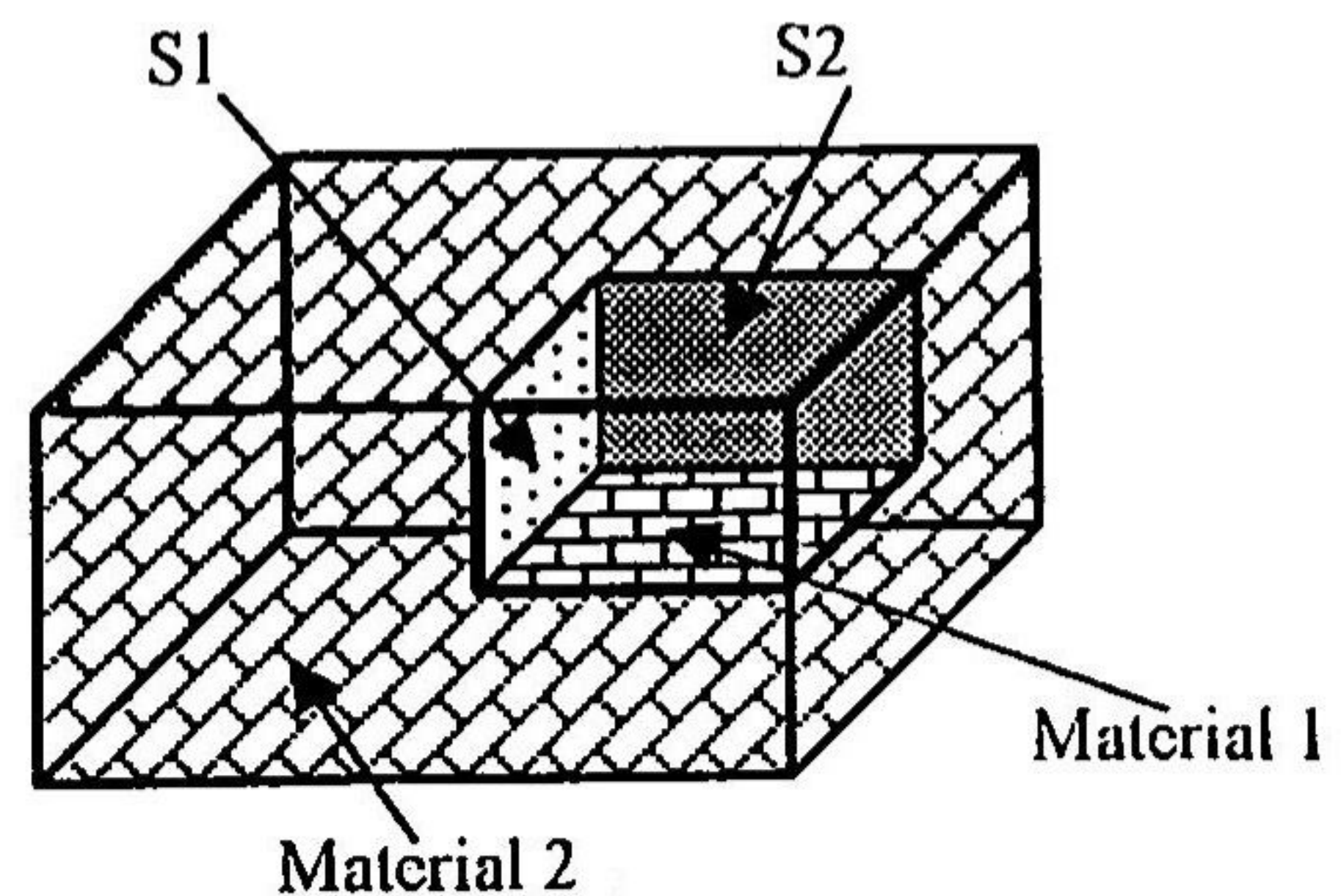


Fig.12 A schema of model 3 for analysis

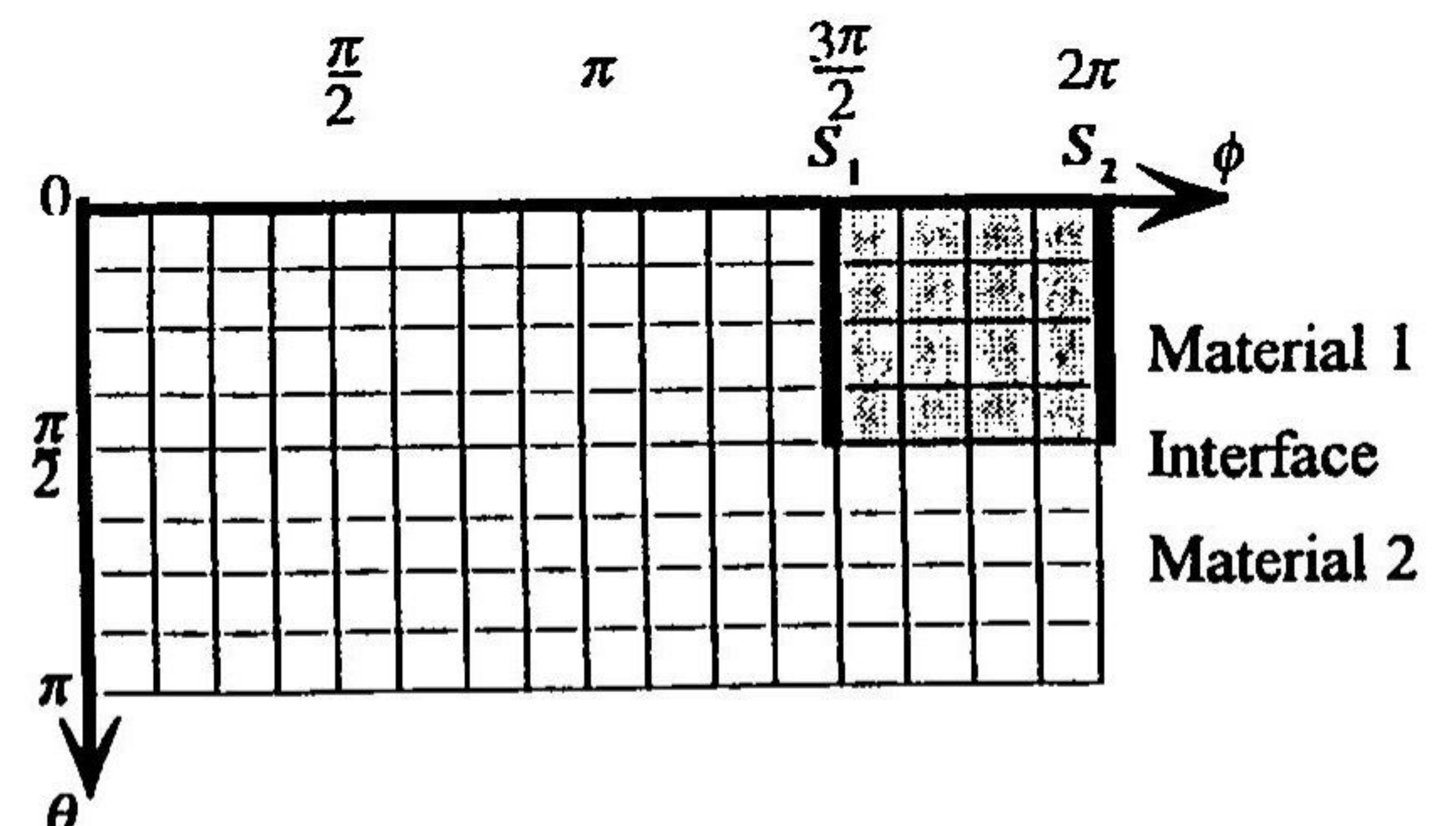
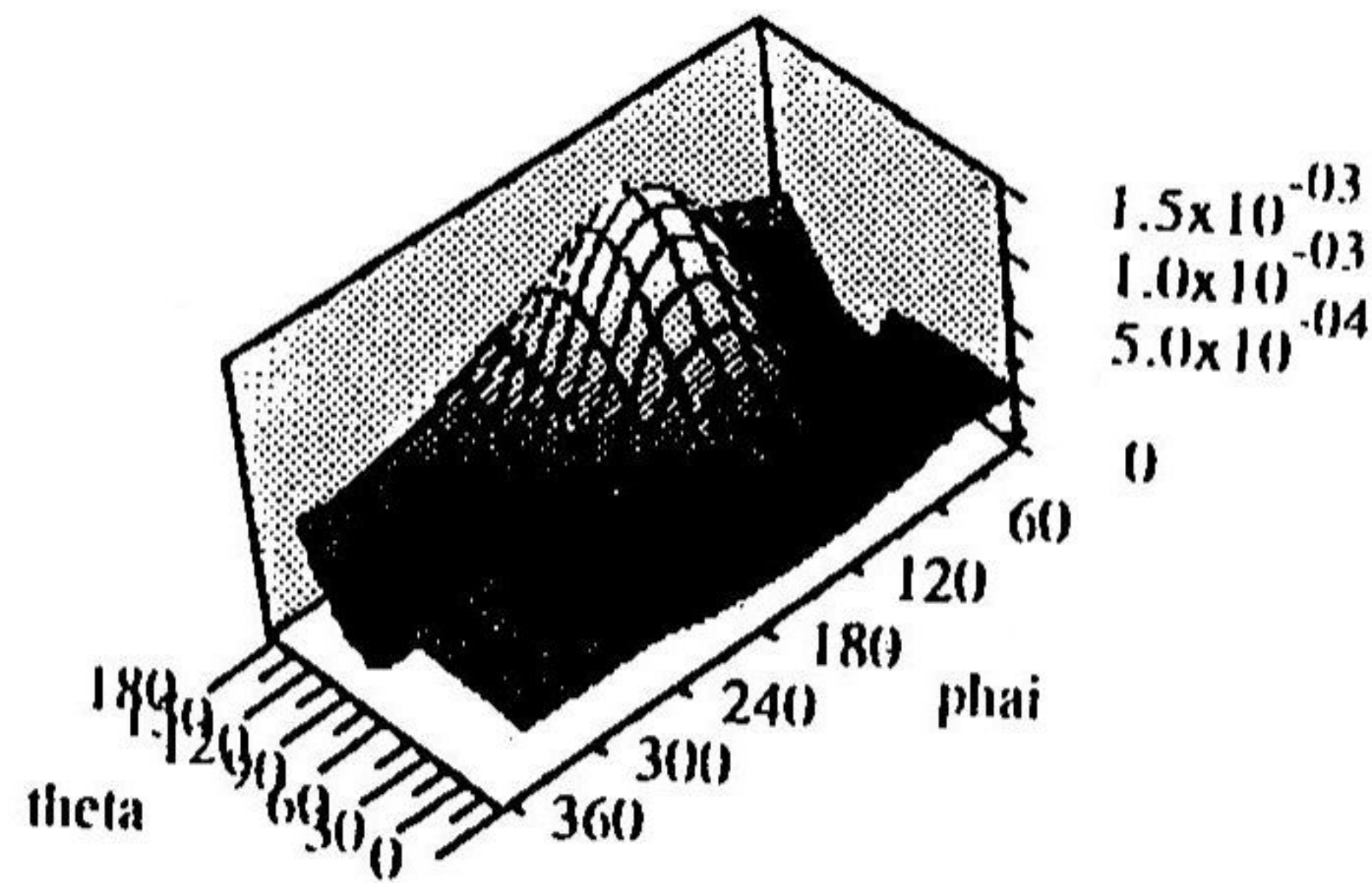
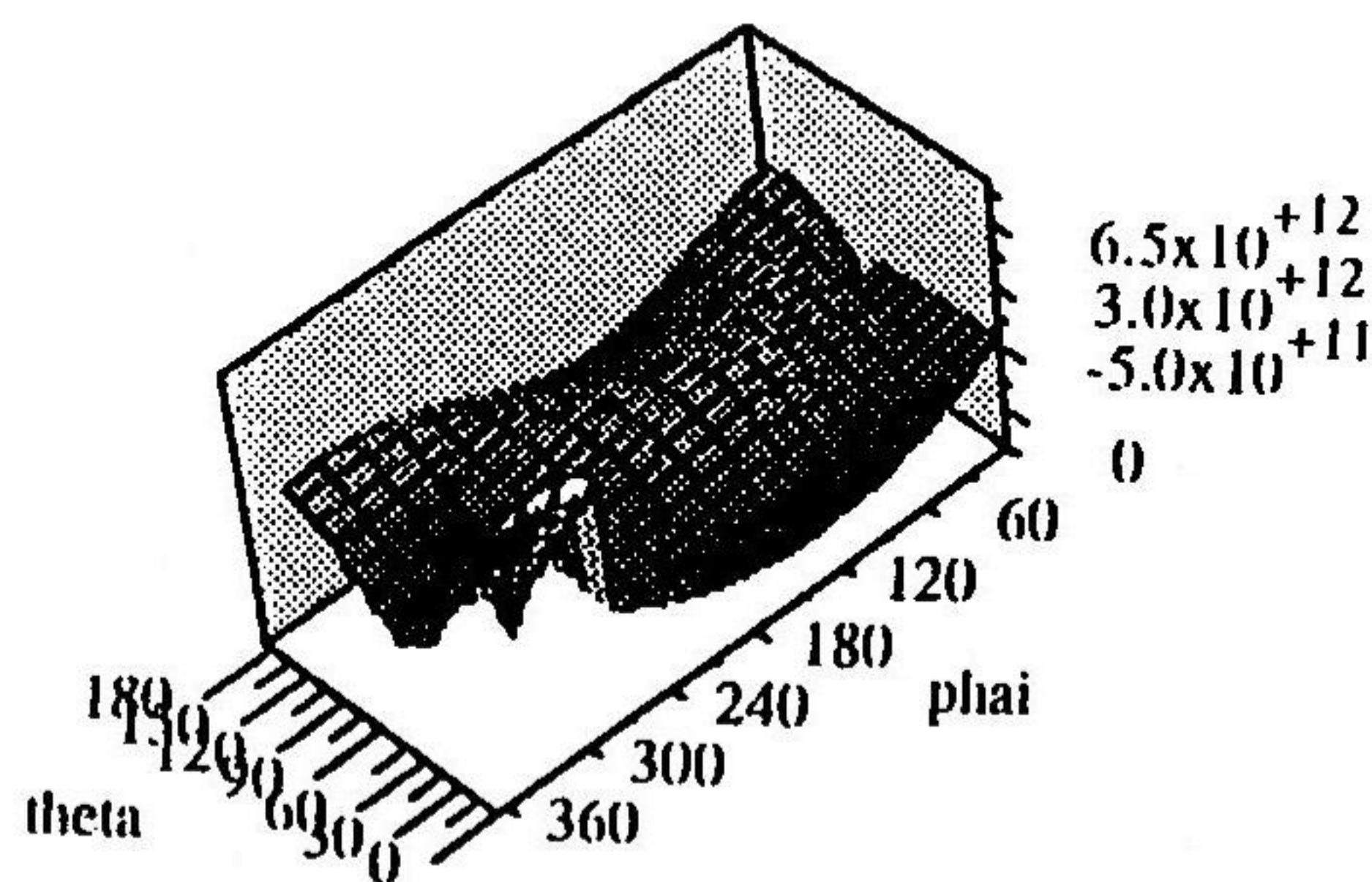
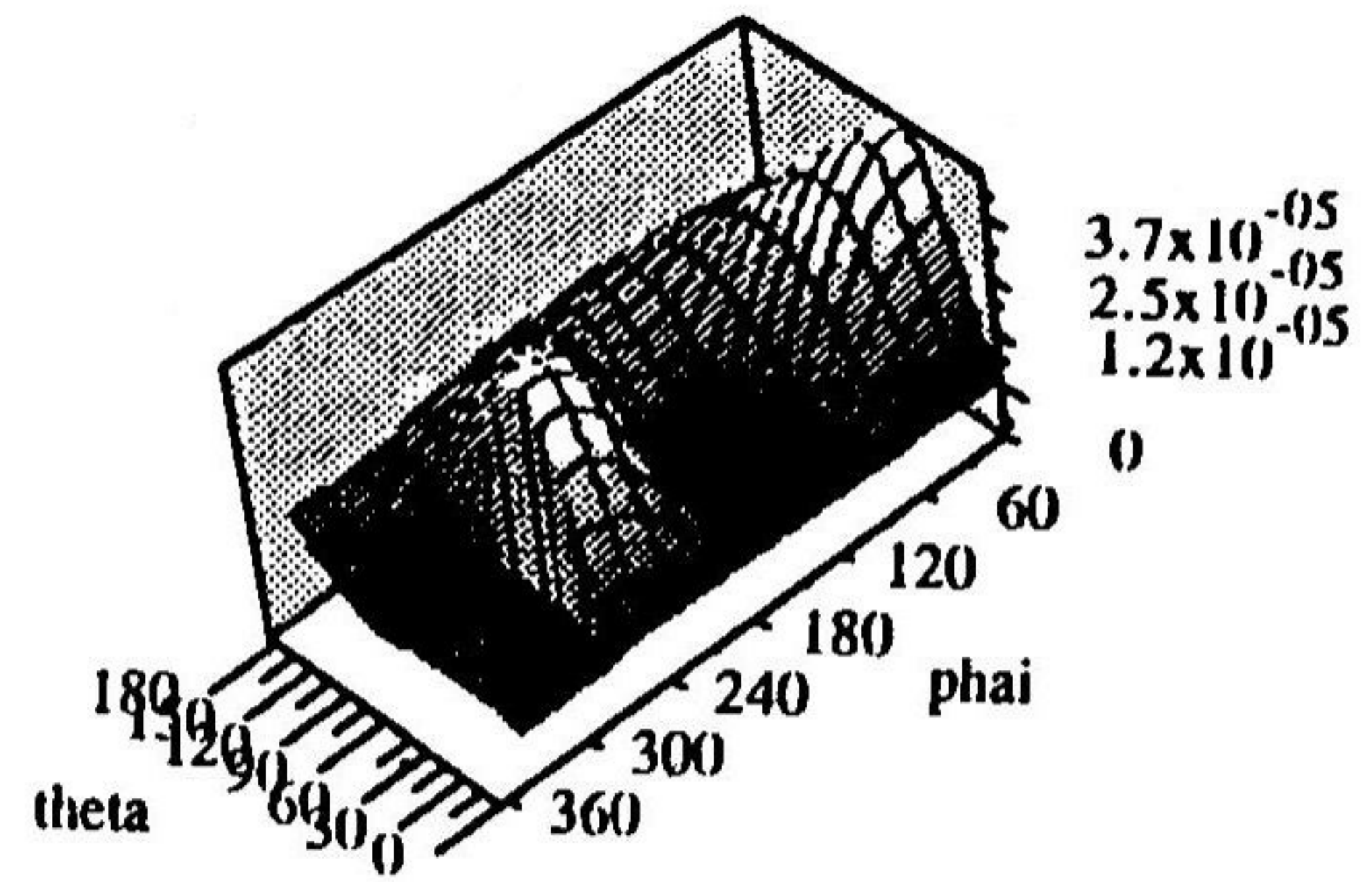
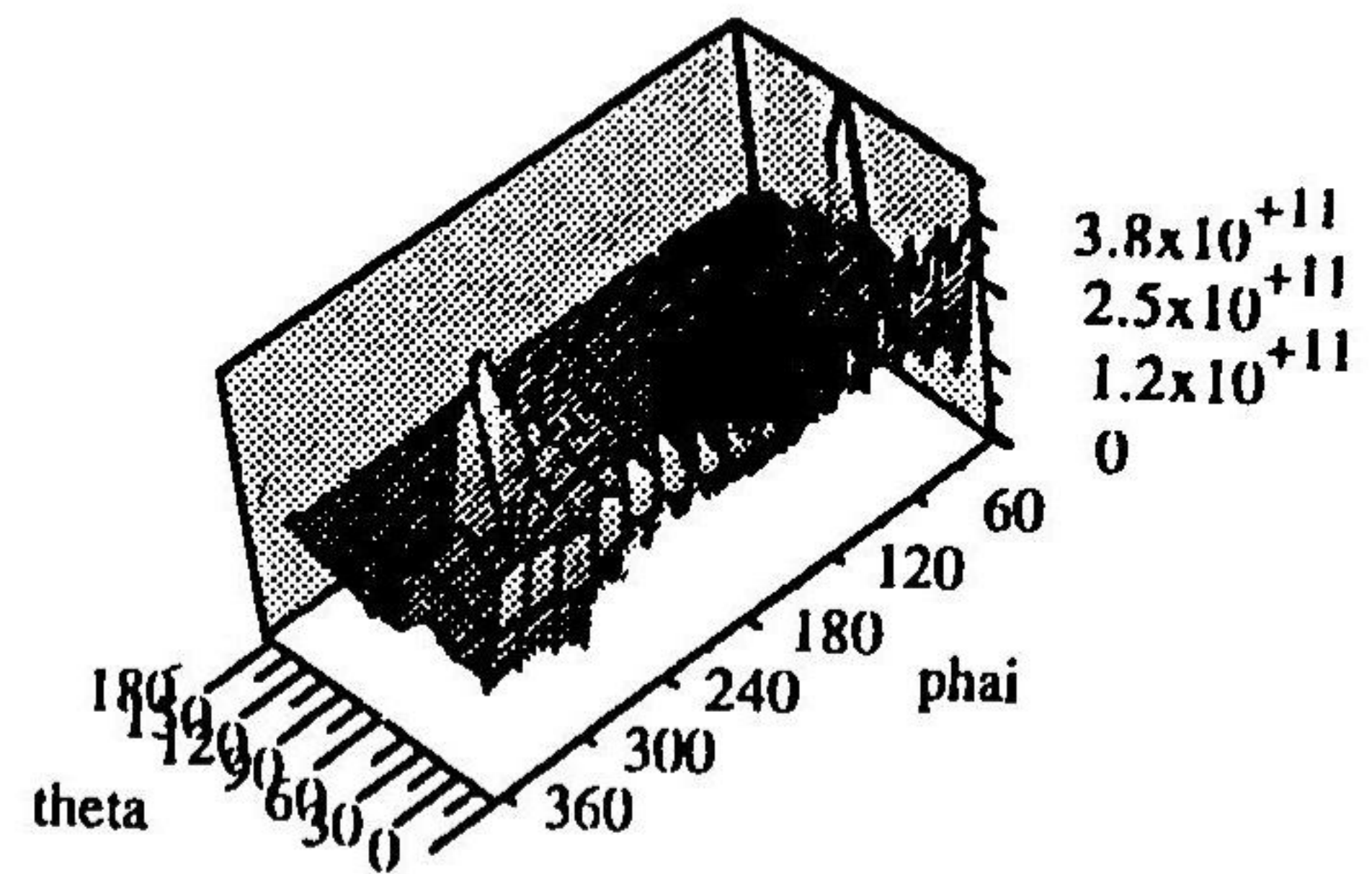
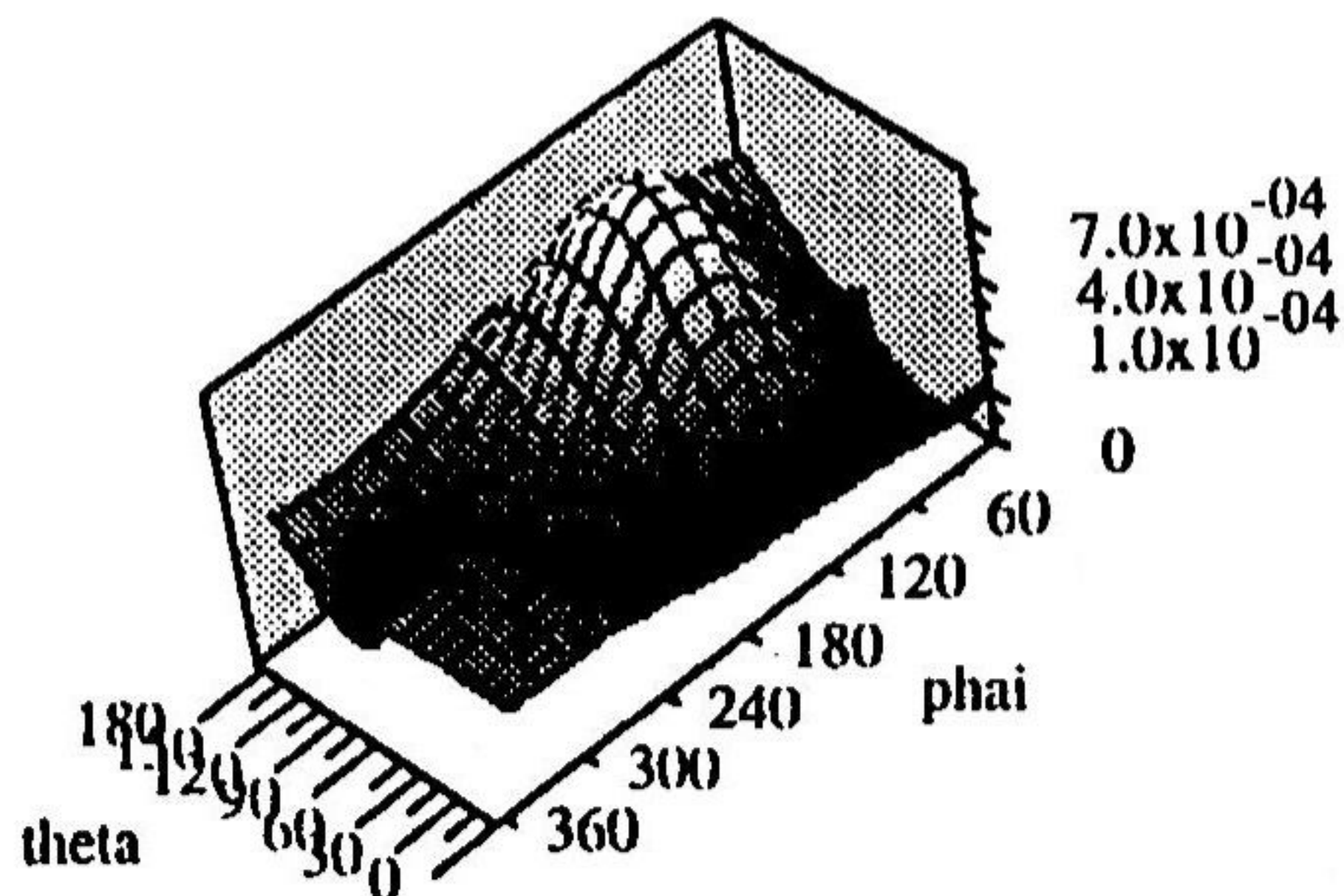
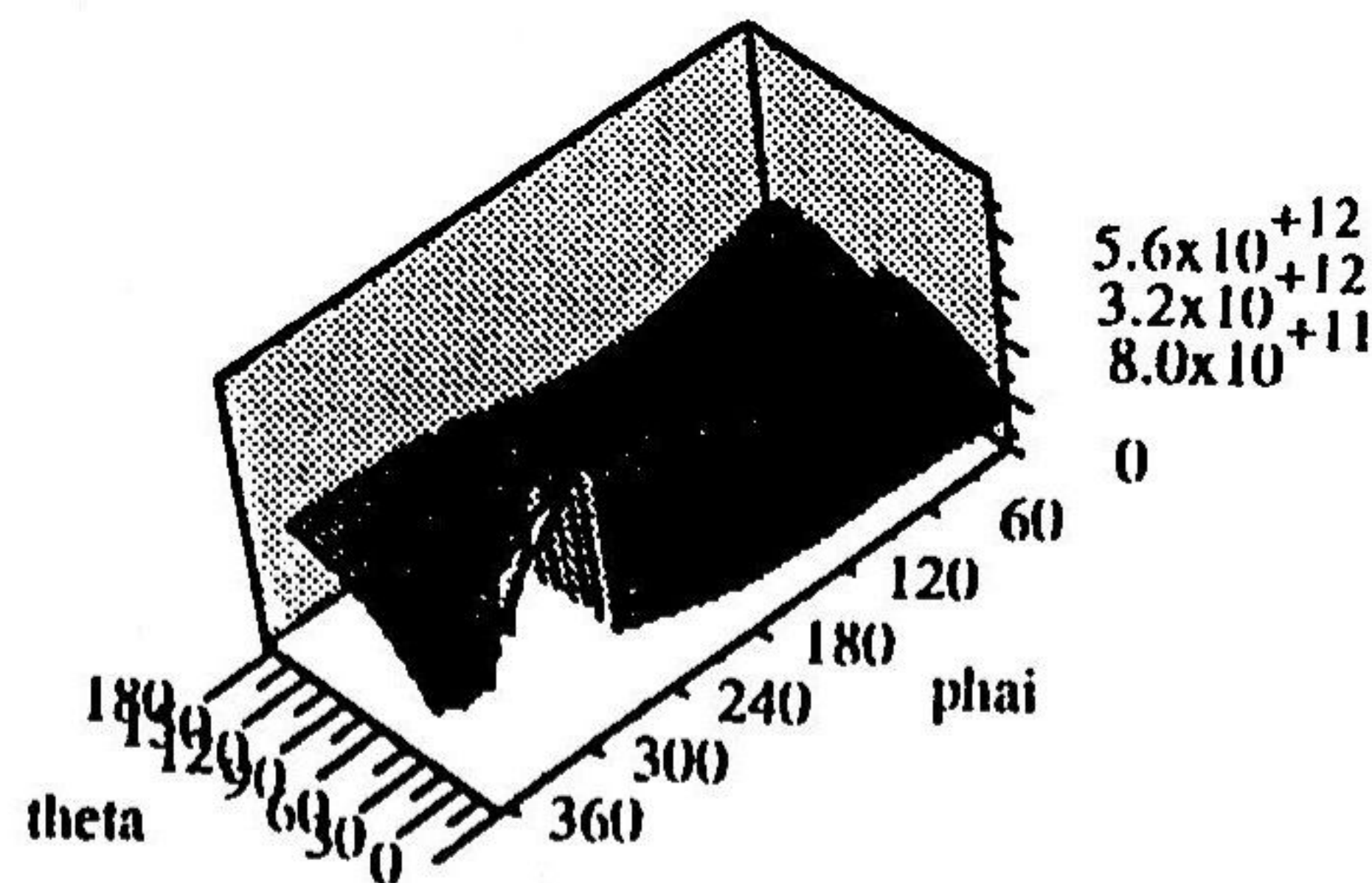


Fig.13 Mesh division for joints (S1 and S2 : Position of delamination)

(a) Thermal displacement u_r (b) Shear thermal stress $\sigma_{r\theta}$ Fig.14 Results of analysis for case 1
($p=0.5977$)(a) Thermal displacement u_r (b) Normal thermal stress σ_{rr} Fig.16 Results of analysis for case 3
($p=0.8261$)(a) Thermal displacement u_r (b) Shear thermal stress $\sigma_{r\theta}$ Fig.15 Results of analysis for case 2
($p=0.4676$)

4. おわりに

3次元異材接合体に対して、特性根と接合端部角度の関係を調べてきた。またいくつかのモデルに対して特性根とこれに依存した熱変位と熱応力分布を示してきた。

今後は、接合端部角度の変化による熱変位および熱応力分布を明らかにしていきたい。

【参考文献】

- 1) 山下, 古口, 3次元異材接合体角部近傍の熱応力解析, 日本機械学会第13回計算力学講演会講演論文集, No.00-17, 361-362, (2000.11)
- 2) S. Yamashita, H. Koguchi, Thermal Stress Analysis at a Vicinity of Vertex in Three-Dimensional Bonded Structures Using Eigenvalue Analysis of FEM, Fourth International Congress on Thermal Stress THERMAL STRESSES 2001, 617-620, (2001.6)
- 3) H. KOGUCHI, S. YAMASHITA, M. FUJIMAGARI, THREE-DIMENSIONAL STRESS SINGULARITY FIELD AROUND A VERTEX OF EMBEDDED CHIP IN ELECTRONIC DEVICES USING FEM, Proceedings of InterPACK'01 The Pacific Rim/ASME International Electronic Packaging Technical Conference and Exhibition, (2001.8)
- 4) Pageau, S. S. and Biggers, S. B. Finite Element Evaluation of Free-edge Singular Stress Fields in Anisotropic Materials, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.38, 2225-2239, (1995)

「受理年月日 2002年9月30日」