

二節点間における変形・変位の適合条件の数式化と 不安定トラスの組み合わせに関する研究

Research on formula of the adaptation condition of about deformation · displacement in the space of 2 contact point and the combination of un-stable truss.

山本嘉孝・田中聡子*

Yoshitaka YAMAMOTO · Satoko TANAKA

[1] はじめに

建築学科で学ぶ構造力学は、一般に線形力学として扱われる部門が多い。これらを解析するにあたり、重要な項目の一つに二節点間の変形・変位の適合条件を算定する事がある。これを解くために幾何学的な解析や直角変位図等を使った図式解法がある。しかし、これらの解法では複雑な架構や立体の適合条件を求めるには困難な場合がある。そこで本研究は節点が微小変形・変位の範囲で、平面上の二節点間の適合条件を数式的に解き骨組みの安定・不安定について検討した。本報で骨組みの安定・不安定を検証するための式を節点変位式として、次式のように記述する。節点はすべてのピン節点とする。

$$\sum (\delta + \delta') = 0 \quad (1)$$

[2] 構造物の安定・不安定の判定について

1. 安定と不安定

一般に、構造物が種々の荷重のかかり方によらず常に静止の状態を保つならば、また荷重等により生じる変形が部材に対して有限の変形・変位から求めることができるなら、その構造物は安定であるといえる。しかし不安定構造でありながら、特定の外力の作用によっては、構造物が静止状態にある場合が起こりうる。

部材の構成や接合部の形態により小さな外力あるいは微小な外的要因等で構造物が原形と著しく異なる変形・変位が生じる場合は幾何学的に不安定な構造物という。不安定構造物には外的不安定と内的不安定がある。

(i) 外的安定

構造物全体を捉えた場合常にその位置を保つこと、すなわち外力とその反力においてつり合いの三条件、

$$\Sigma H = 0, \Sigma V = 0, \Sigma M = 0$$

が成立することで、全体として変形・変位が小さい場合である。

(ii) 内的安定

構造物の一部において相対変位が小さい場合であり、また構造物が元の形状を保っていることが条件である。例えば平面トラスで考えてみると各節点で外力あるいは部材力との間に、 $\Sigma H = 0$ 、 $\Sigma V = 0$ 、が成立することである。

不安定な架構は、建築物としては実在しないが、机上で構造物の変形・変位を計算・解析を実施した場合や、各部材の応力解析あるいは架構の崩壊状態を検証・把握する場合には利用価値がある。

本章では平面架構について安定・不安定を決める或る判断方法を提言する。

* 小山高専建築学専攻修了生

2. 架構の安定構面

図1の安定構面A・B・Cが、或る位置からA'・B'・C'に移動したとする。このとき架構において任意のO点のまわりについて、回転運動が成されたと考えられる。図2で各節点について回転速度を

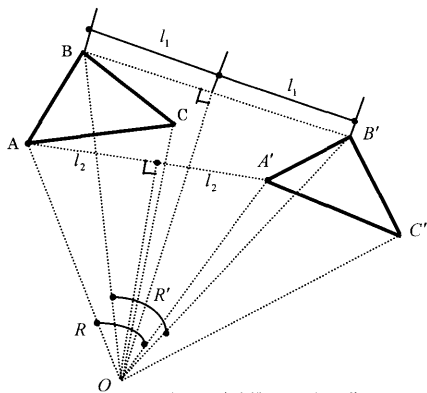


図1 安定構面の回転運動

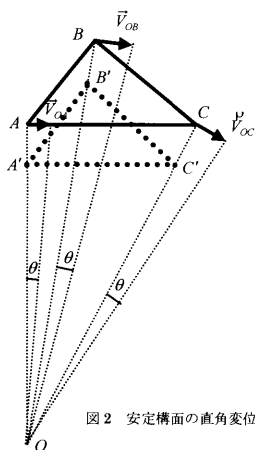


図2 安定構面の直角変位図

$\vec{V}_{OA}$ 、 $\vec{V}_{OB}$ 、 $\vec{V}_{OC}$ として、各速度を θ とするならば

$$\vec{V}_{OA}/\overline{OA} = \vec{V}_{OB}/\overline{OB} = \vec{V}_{OC}/\overline{OC}$$

となる。このときの $\vec{V}_{OA}$ 、 $\vec{V}_{OB}$ 、 $\vec{V}_{OC}$ を各節点の回転ベクトルとするならば、瞬間的にそれらは各節点の変位と考えられる。これについては3章で述べているが、図2はいわゆる直角変位図である。このことから安定構面の三角形A・B・Cの直角変位図A'・B'・C'は変位前の三角形A・B・Cと相似になっていることが分かる。逆に直角変位図が原形と相似ならばその構面は安定構面といえる。つまり三角形(安

定構面)の任意の一部材を固定すると、他の部材の回転角は固定される。

構造力学的に言い換えるなら、独立部材角を $R_{AB}=1$ とすると、従部材角は $\varphi_{BC}=\varphi_{CA}=1$ となる。つまり前述した他の部材の回転角を固定することは部材の回転角が生じない($\varphi=0$)ことではない。また各部材の回転角が等しいと言い換えることもできる。

3. 三角形安定構面の節点変位式

図3は三角形安定構面である。ここでこの構面の節点変位式を求めて架構の安定性を検証する。まず(1)式の節点変位式を求めると次式のようにになる。

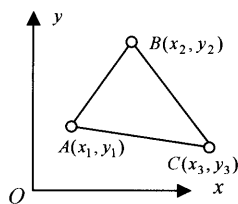


図3 安定構面の節点変位式

$$\vec{V}_{AB} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)\omega_{AB}\vec{J} - (y_2 - y_1)\omega_{AB}\vec{I} \quad (2)$$

$$\vec{V}_{BC} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x_3 - x_2)\omega_{BC}\vec{J} - (y_3 - y_2)\omega_{BC}\vec{I} \quad (3)$$

$$\vec{V}_{CA} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_{CA} \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - x_3)\omega_{CA}\vec{J} - (y_1 - y_3)\omega_{CA}\vec{I} \quad (4)$$

各単位ベクトル毎にまとめると

$$- \{ (y_2 - y_1)\omega_{AB} + (y_3 - y_2)\omega_{BC} + (y_1 - y_3)\omega_{CA} \} \vec{I}$$

$$+ \{(x_2 - x_1)\omega_{AB} + (x_3 - x_2)\omega_{BC} + (x_1 - x_3)\omega_{CA}\} \times \vec{J} = 0 \quad (5)$$

のようになる。ここで仮に $\omega_{AB} = +1$ とすると

$$(y_2 - y_1)(+1) + (y_3 - y_2)\omega_{BC} + (y_1 - y_3)\omega_{CA} = 0 \quad (6)$$

$$(x_2 - x_1)(+1) + (x_3 - x_2)\omega_{BC} + (x_1 - x_3)\omega_{CA} = 0 \quad (7)$$

(5)式は恒等式であるから(6)式に $(x_3 - x_2)$ 、(7)式に $(y_3 - y_2)$ を乗ずると

$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) + (x_3 - x_2)(y_3 - y_2)\omega_{BC} + (x_3 - x_2)(y_1 - y_3)\omega_{CA} = 0 \quad (8)$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) + (x_3 - x_2)(y_3 - y_2)\omega_{BC} + (x_1 - x_3)(y_3 - y_2)\omega_{CA} = 0 \quad (9)$$

となる。(8)式から(9)式を減ずると

$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) + \{(x_3 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_3 - y_2)\}\omega_{CA} = 0$$

となり、この式を解くと $\omega_{CA} = +1$ となり(6)式に代入して $\omega_{BC} = +1$ が導かれる。

これから、三角形の構面を持った架構はどれかの部材を独立部材角とし他の二材を従属部材角とした場合でもその部材角は全て等しくなることが分かる。つまりこの架構は変形・変位後も相似形を保つことが実証された。この項は2節で述べたことの補足である。

いま、図3で各節点の座標を A(5,3)、B(12,8) C(16,16) のように設定して具体例を解いてみる。まず(1)式の節点変位式を求めると次式のようになる。

$$\vec{V}_{AB} = \begin{bmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 7\omega_1 \vec{J} + 2\omega_1 \vec{I}$$

$$\vec{V}_{BC} = \begin{bmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 4\omega_2 \vec{J} + 2\omega_2 \vec{I}$$

$$\vec{V}_{CA} = \begin{bmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ -11 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -11\omega_3 \vec{J} + 3\omega_3 \vec{I}$$

が導かれる。単位ベクトル毎にまとめると

$$(-5\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3)\vec{I} + (7\omega_1 + 4\omega_2 - 11\omega_3)\vec{J} = 0$$

となり、上式は恒等式であるから

$$-5\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 = 0$$

$$7\omega_1 + 4\omega_2 - 11\omega_3 = 0$$

が導かれる。ここで仮に $\omega_1 = -1$ とすると

$\omega_2 = -1$ 、 $\omega_3 = -1$ となり回転による変形後も相対変位が生じないから相似形になり、架構が安定であることが分かる。

[3] 構造物の安定・不安定

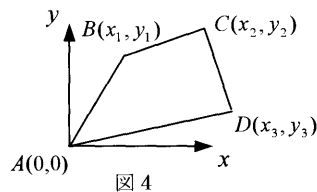


図4

図4は四辺形不安定構面である。この構面の節点変位式を求めて架構の不安定性を検証する。この構面の節点変位式は次式のようになる。

$$\vec{V}_{AB} = x_1\omega_{AB}\vec{J} - y_1\omega_{AB}\vec{I}$$

$$\vec{V}_{BC} = (x_2 - x_1)\omega_{BC}\vec{J} - (y_2 - y_1)\omega_{BC}\vec{I}$$

$$\vec{V}_{CD} = (x_3 - x_2)\omega_{CD}\vec{J} - (y_3 - y_2)\omega_{CD}\vec{I}$$

$$\vec{V}_{DA} = -x_3\omega_{DA}\vec{J} + y_3\omega_{DA}\vec{I}$$

が導かれる。単位ベクトル毎にまとめて $\omega_{AB} = +1$ とすると、

$$\{-y_1 - (y_2 - y_1)\omega_{BC} - (y_3 - y_2)\omega_{CD} + y_3\omega_{DA}\} = 0$$

$$\{x_1 - (x_2 - x_1)\omega_{BC} - (x_3 - x_2)\omega_{CD} - x_3\omega_{DA}\} = 0$$

となる。しかし両式は未知数が ω_{BC} 、 ω_{CD} 、 ω_{DA} の3個あるが、適合条件を満たす方程式は2個である。数学的にいえば、この方程式は不定である。すなわち ω_{BC} 、 ω_{CD} 、 ω_{DA} そして ω_{AB} を含めて無限の変形・変位の組み合わせが可能となるから、この架構は不安定と判断できる。

[4] 四辺形ユニットの連結手法1

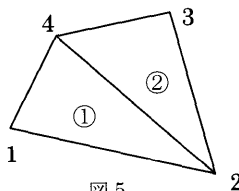


図5

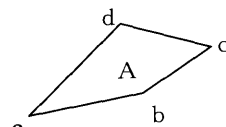


図6

図5の安定構造体に図6の四辺形の不安定ユニットを連結する場合を考える。但し、四辺形ユニットの4個の内角は何れも180度以上にならないとする。そして、安定構造体を形成する任意の一辺の長さが、連結する不安定ユニットの一辺の長さが等しいものであること。この条件より、まず

1. 節点に番号を付ける (1~4)
2. 各ユニットに番号を付ける (①~④)
3. 各三角形のユニットごとに、3つの頂点の節点番号を反時計回りの順序に配列する。

3つの頂点のうち、常に反時計回りの順番になっていれどどの頂点から始めてもよい。たとえばユニット②を例に取ると、頂点の番号は反時計回りに2・3・4であるから、配列 KACOM では、

4. KACOM (2, 1) = 2
5. KACOM (2, 2) = 3
6. KACOM (2, 3) = 4

となる。(KACOM (ユニット番号、節点番号))

7. 各節点の X 座標の値 X (I) の入力
8. 各節点の Y 座標の値 Y (I) の入力
9. ユニット A の一辺を安定構造体に接続する。

ここでは辺 $a \cdot b$ を安定構造体の節点4と3に接続させることにする。そのとき図4のように節点 c、d を節点番号6、5に変更して、それらの節点の X、Y 座標を求めておき、予め各ユニットの節点の内角を格納しておく。

10. NAIKAKU (1) = 85 度
11. 節点3に隣接する節点2, 6を検出しておく。節点4は固定点だから除外する。

このとき節点3に集まる、構造体の内角の和

NAIKAKU (3) = θ_3 が180度を超えていれば外側にできる三角形6・3・2は安定三角形になるから節点6と節点2を部材で連結すればユニットAは安定構造体になる。

節点4について同様に考えて NAIKAKU (4) = θ_4 が180度を超えていれば三角形1・4・5は安定三角形だから節点5と節点1を部材で連結すればユニットAは安定構造体になる。しかし図4に示されるように節点4に集まる、構造体の内角の和は180度を超えていない。ゆえに節点5と節点1に安定材を挿入できないことから、節点4側からユニットAを安定させることはできない。

[5] 四辺形ユニットの連結手法2

前章と同様に図7のユニットAの外的に安定構造にする別解を試みる。節点3について検証すると、節点3に隣接するのは節点2と節点6である(節点4は安定構造体の内部を通過する)。

節点3を基点としてベクトル $\vec{36}$ とベクトル $\vec{32}$ の内積(スカラー積)が正の場合は節点6と節点2を直線で結ぶことができるから、安定三角形2・3・6が形成できる。

同様に、節点4について検証すると、節点4に隣接するのは節点1と節点5である(節点2は安定構造体の内部を通過する)。

節点4を基点としてベクトル $\vec{41}$ とベクトル $\vec{45}$ の外積(ベクトル積)が負の場合は節点5と節点1を直線で結ぶことができないから、安定三角形2・3・6が形成できない。

$$|a \times b| = |a||b|\sin \theta$$

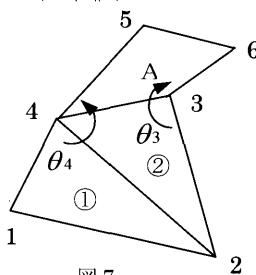


図7

[6] ユニットが長方形の場合

図8の安定構造体に図9のような、合同の不安定ユニットを連結する場合は

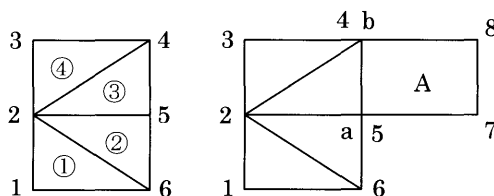


図8

図9

1. 定構造体の節点に番号を付ける (1~6)
2. ユニットに番号を付ける (①~④)
 - (a) 各三角形のユニットごとに、3つの頂点の節点番号を反時計回りの順序に配列する。3つの頂点のうち、どの頂点から始めても、反時計回りの順番になっていれどよい。また節点番号

を格納する配列 KACOM は次のようにする。

$$\text{KACOM}(3, 1) = 2$$

$$\text{KACOM}(3, 2) = 5$$

$$\text{KACOM}(3, 3) = 4$$

である。KACOM (ユニット番号、節点番号) で

3. 各節点の X 座標の値 $X(I)$

4. 各節点の Y 座標の値 $Y(I)$

5. ユニット A の一边を安定体に接続する。ここでは辺 a-b が安定体の節点 5 と 4 に接続させる。

5. のとき図 5 のように節点 C, D を節点番号 8, 7

に変更して、それらの節点の X, Y 座標を求めておく。

[7] 解法手順 1

まず図 9 のユニット A で外的な安定を試みる。節点 b は接続されたので節点 7, 8 について考える。節点 8 について検証すると、節点 7 と節点 8 の y 座標を比較して大小を決めておく。接続されたユニット A は長方形だから節点 8 の y 座標に対して同じ値を有する節点 3 とそれより小さな値を有する節点 1, 2, 6 には安定材 (仮称) で接続できない。もちろん、接続点の節点 4 と節点 5 にも接続できないし節点 7 から節点 8 (逆の場合も) には安定材は挿入できない。

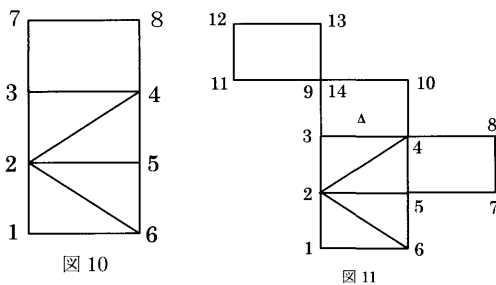


図 10

図 11

節点 7 について検証すると接続されたユニット A は長方形だから節点 7 の y 座標に対して同じ値を有する節点 2 とそれより大きな値を有する節点 3 には安定材 (仮称) で接続できない。また節点 4 と節点 5 にも接続できない。結果は節点 7 から節点 6 への安定材の挿入だけが可能となる。

[8] 解法手順 2

図 10 の場合は節点 7 と節点 8 の x 座標の大小を決めておく。そのとき節点 7 と x 座標が同じ値をも

つ節点 1, 2 と、節点 8 と x 座標が同じ値をもつ節点 5, 6 には安定材は挿入できない。その結果、節点 7, 8 からいずれの場合も安定材を挿入できない。言い換えるとユニット A は外的に安定させることができない。

[9] 解析手順 3

図 11 の節点 11, 12, 13 を検証する。この場合の連結は節点 9 だけであるから安定材は 2 本必要である。前章と同様に各節点が含まれるユニットの外周と交差しないことが必要条件である。節点 13 は節点 8 と連結できるが、その安定材の長さが安定材の連結条件から外れる。それで連結する相手は節点 8 となる。同様に節点 11 は安定材の長さの条件から、己自身の x 座標値より小さな値は存在しないことから、節点 3 と連結することになる。節点 12 は己自身の x 座標値より小さな値と大きな値とも存在しない。そして y 座標値は大きな値が存在しないので外的安定にする連結はできない。

[10] 既安定材の削除

図 12 のように長方形ユニットを増殖させながら安定材を挿入していく。図 13 でユニット B を連結するとき、図 12 の既存安定材 X-Y が架構の安定性を保つのに不必要な材となる。この不必要になる安定材の検証方法は次のようになる。

- 1 B のユニットが有する節点番号の座標の確認
- 2 その座標と一致する節点番号の確認
- 3 その番号を接する安定材の確認
- 4 その安定材を含むユニットの確認
- 5 そのユニットに連結されている安定材の必要性の確認

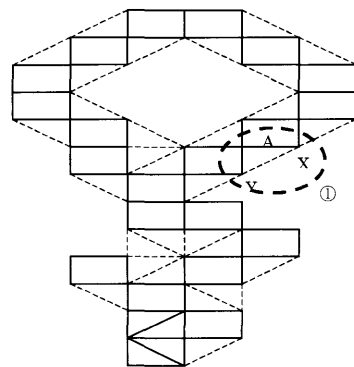


図 12

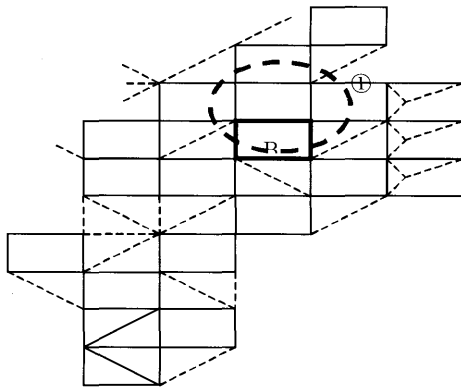


図 13

[11] まとめ

平面トラスを1ユニットとして安定材を挿入しながら安定構造体を構築することができた。この構造体の不静定次数は0次、すなわち静定構造体である。ゆえに任意の1個の安定材、1個のユニットが取り除かれると構造体は崩壊することになる。今後は立体構造体について検証するが、単体ユニットでは立体にも応用できることが確認されている。問題点は安定材をどのような形状にするか、どのように挿入するか、どのように削除するかを考えることになる。

・参考文献

- 1) 山本嘉孝；建築架構における節点変位についてのベクトルによる解法、小山工業高等専門学校研究紀要5号、1974
- 2) 山本嘉孝；異形ラーメンの塑性設計プログラム、小山工業高等専門学校研究紀要16号、1984
- 3) 山本嘉孝；三次元構造物における節点間の適合条件に関する考察、日本建築学会大会梗概集、2000
- 4) 山本嘉孝；平面トラスにおける各節点の部材角と絶対変位に関する考察、日本建築学会大会梗概集、2000
- 5) 山本嘉孝；不静定トラス部材の塑性流れを考察した節点の変位について、日本建築学会大会梗概集、2000

「受理年月日 2004年9月29日」

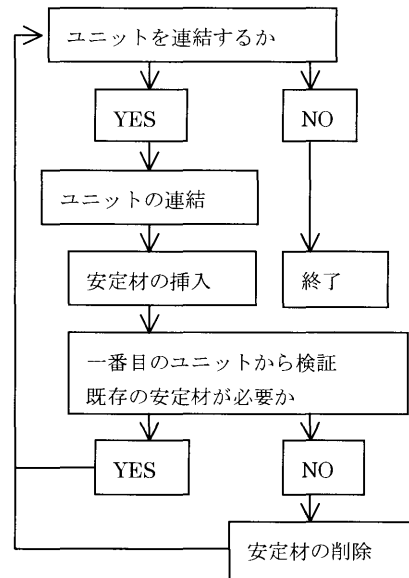


図 14 安定材の挿入の流れ