

## 制御理論講話（その 7） —PID 制御（その 2）—

山崎 敬則, 渡利 久規, 山川 雄司\*, 黒須 茂\*\*

### A Lecture on Control Theory (Part 7) — PID Control (Part 2)—

Takanori YAMAZAKI, Hisaki WATARI, Yuji YAMAKAWA\*, Shigeru KUROSU\*\*

ご隠居「さて、Fig. 15 のように閉ループ系の周波数特性が与えられたとき、つぎの諸量に定義される」  
八つあん「ご隠居。閉ループ系の周波数特性というのはよく画かされた記憶はあるのですが、閉ループ系の周波数特性というのはあまり聞きませんぜ？」

ご隠居「別段、難しいことでもなんでもない。低周波領域( $\omega \rightarrow 0$ ,  $\omega \ll \omega_{cg}$ )では、I動作によって $|G_c(j\omega)| \rightarrow \infty$ となるから、(9)式より

$$G_{ry}(j\omega) \approx 1 \quad (12)$$

低周波領域( $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\omega \gg \omega_{cg}$ )では、プラントの伝達関数は $|G_p(j\omega)| \rightarrow 0$ となるから

$$G_{ry}(j\omega) \approx G_c(j\omega)G_p(j\omega) \quad (13)$$

となり、閉ループ伝達関数  $G_o(j\omega)$ と同じになる。いま、八つあんの質問は古典制御と  $H_\infty$ 制御のちがいを指摘してくれたんだよ。古典制御では閉ループ周波数応答を  $G_o(j\omega)$ を指定することによって、間接的に閉ループ系周波数特性  $G_{ry}(j\omega)$ を規定しようとしている。一方、 $H_\infty$ 制御では閉ループ周波数応答を直接的に指定して制御系を設計する。

さて、Fig. 15 の周波数特性のもとに、

- ・ゲイン交点周波数  $\omega_{cg}$
- ・ $G_o(s)$ のゲインが 1 (0[dB])となる周波数
- ・位相交点周波数  $\omega_{cp}$

$G_o(s)$ の位相が $-180^\circ$ となる周波数

- ・共振周波数  $\omega_p$

$G_{ry}(s)$ のゲインがピーク値をもつときの周波数

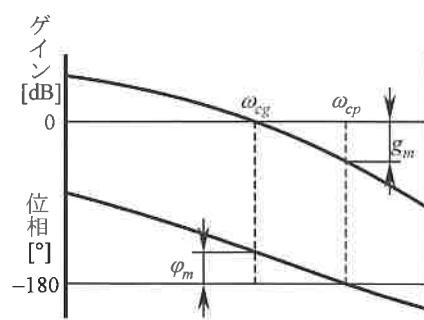
- ・ピーク値 (peak value)  $M_p$

$G_{ry}(s)$ のゲインのピーク値

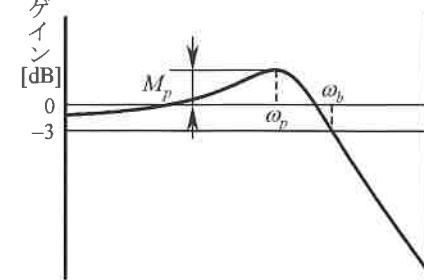
- ・帯域幅 (bandwidth)  $\omega_b$

$G_{ry}(s)$ のゲインが低周波域における値(0[dB])より $-3$ [dB]低下するときの周波数

なる特性値が定義される。



(a) 閉ループ周波数特性



(b) 閉ループ周波数特性

Fig. 15 周波数特性

\*) 平成 14 年度機械工学科卒業(東京大学工学部在学中)

\*\*) 研究所 “Crotech”

周波数領域での速応性の尺度は、ゲイン交点周波数  $\omega_{cg}$  または帯域幅  $\omega_b$  がよく用いられ、安定性などを加味した総合的な評価の量としてピーク値が使われる。 $M_p$  の値は 1.3 にするのがよいとされている。

また、制御系の安定性を表す指標として、位相交点において安定限界までどれだけゲインを増やせる余裕があるかという意味で

$$g_m = 0[\text{dB}] - 20 \log_{10} |G_o(j\omega_\varphi)| \quad (14)$$

をゲイン余裕 (gain margin)といい、ゲイン交点においても安定限界までどれだけ位相を遅れさせる余裕があるかという意味で

$$\varphi_m = \angle G_o(j\omega_{cg}) + 180^\circ \quad (15)$$

を位相余裕 (phase margin)といいう。過去にいろいろ提案されているが、その一例が Table 1 である。

Table 1

	ゲイン余裕	位相余裕
プロセス制御	3 ~ 9[dB]	16 ~ 80[°]
サーボ機構	12 ~ 20[dB]	40 ~ 65[°]

望ましい開ループ周波数応答のゲイン曲線  $|G_o(j\omega)|$  は、以下のようになる。

低周波領域：定常偏差を少なくするためにゲインがなるべく高く、

中間周波領域：ゲイン交点周波数  $\omega_{cg}$  がなるべく高く、ゲインの傾きが  $-20[\text{dB/dec}]$ 、

高周波領域：ノイズに対する影響を除去するために、ゲインの傾きが  $-40 \sim -60[\text{dB/dec}]$

Fig. 16 に望ましい開ループ周波数応答を示した」熊さん「ご隠居。教科書の受け売りでは、定年直前の爺さんの授業と同じになってしまいますよ。少しは解説してくれなきゃあ、向学心に燃えたわしらのやる気も失せてしましますぜ」

ご隠居「これからお話を内容をすべて包含しているから、概略をいっただけなのだ。それでは、Fig. 16 の 3 つの領域に分けて説明するところよ。低周波領域：ここでは定常特性の改善を狙ってい

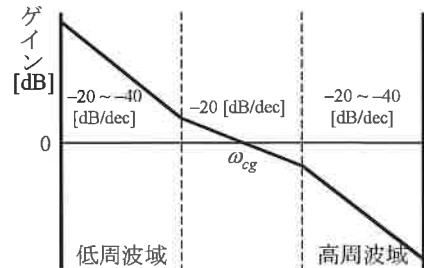


Fig. 16 望ましい閉ループ系

る。目標値がステップ入力のときに、定常偏差を 0 にするために I 効果が必要であることはすでに述べた。I 効果というのは低周波ではゲインは高くなる。目標値がランプ入力になれば I 効果を 2 つ必要とする。さらに一般化したのが内部モデル原理とよばれていて、定常偏差が 0 となるためには  $G_o(j\omega)$  が目標値入力と同じ極をもたねばならない。

$-20[\text{dB/dec}]$  : 1 型サーボ系

$-40[\text{dB/dec}]$  : 2 型サーボ系

などとよばれている。

中間周波数領域：ゲイン交点周波数  $\omega_{cg}$  を増やす、時定数でいうと小さくなることと同じ意味で、速応性が増すことになる。 $\omega_{cg}$  における位相余裕  $\varphi_m$  を大きくすることは減衰性が増すことになる。ところが、 $-40[\text{dB/dec}]$  以上であると、 $\omega_{cg}$  において位相が  $-180^\circ$  以上遅れて位相余裕  $\varphi_m$  が負になって不安定になってしまふのじゃ。(ボードの定理)

高周波領域：Fig. 12 の閉ループ系には示していないが一般に雑音やモデル化誤差が存在しても閉ループ系が安定であるように設計してもらいたい。これをロバスト安定性とよんでいる。そのためには、閉ループ伝達関数(9)式が高周波領域で減衰するローパスフィルタが望まれるわけじゃ」

### 3.2 周波数特性からみた PID 効果

#### (1) PID コントローラの周波数特性

熊さん「周波数特性を図的に表現するために、ベクトル軌跡とかボード線図を画かされことがあるんですが、ベクトル軌跡やボード線図だけで PID 効果の働きを説明してくださいよ」

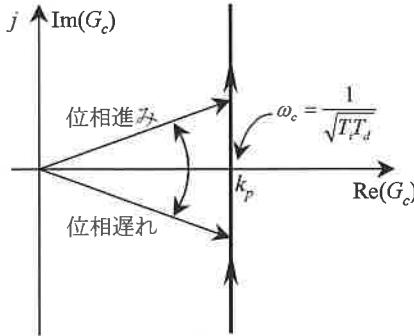


Fig. 17 PIDコントローラのベクトル軌跡

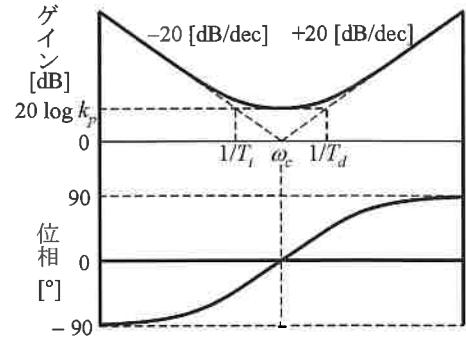


Fig. 18 PIDコントローラのボード線図

ご隠居「わかつとる。そのためには、まずPIDコントローラの周波数伝達特性を画くことからはじめよう。

周波数伝達関数  $G_c(j\omega)$  は、(10)式で  $s=j\omega$  とおけば

$$\begin{aligned} G_c(j\omega) &= k_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d \right) \\ &= k_p \left\{ 1 + j \left( \omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

となり、

$$\begin{aligned} \text{ゲイン: } |G_c(j\omega)| &= k_p \sqrt{1 + \left( \omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} \right)^2} \\ \text{位相: } \angle G_c(j\omega) &= \tan^{-1} \left( \omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

が得られる。

ベクトル軌跡は(16)式より実部は一定で、虚部のみが変化することがわかる。虚部が 0 となる角周波数  $\omega_c$  は

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}} \quad (18)$$

であり、そのときのゲインは

$$G_c(j\omega_c) = k_p \quad (19)$$

となり、ゲインの最小値を与えることになる。 $\omega < \omega_c$  では  $\angle G_c(j\omega) < 0$  となり位相遅れ、つまり I 動作 ( $1/j\omega T_i$ ) の効果が大きく、 $\omega = 0$  では  $|G_c(j\omega)| \rightarrow \infty$  となり、直流信号( $\omega = 0$ )に対して無限大の増幅度をもつことになる。また、 $\omega > \omega_c$  に対しては  $\angle G_c(j\omega) > 0$  となり位相進み、つまり D 動作の効果が大きく、 $\omega \rightarrow \infty$  では、 $|G_c(j\omega)| \rightarrow \infty$  となり、高周

波領域での増幅度の増大を図っていることになる。PIDコントローラのベクトル軌跡を描くと、Fig. 17 のようになる。

ボード線図も  $\omega \ll \omega_c$  と  $\omega \gg \omega_c$  の領域に分けて描くこととする。 $\omega \ll \omega_c$  では

$$G_c(j\omega) \approx k_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_i} \right) \quad (20)$$

$$\text{ゲイン: } |G_c(j\omega)| \approx k_p \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\omega T_i} \right)^2} \quad (21)$$

$$\text{位相: } \angle G_c(j\omega) \approx -\tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega T_i} \right)$$

$\omega \rightarrow 0$  では、位相遅れ  $-90^\circ$  となる。

$\omega \gg \omega_c$  では

$$G_c(j\omega) \approx k_p (1 + j\omega T_d) \quad (22)$$

$$\text{ゲイン: } |G_c(j\omega)| \approx k_p \sqrt{1 + (\omega T_d)^2} \quad (23)$$

$$\text{位相: } \angle G_c(j\omega) \approx \tan^{-1} \omega T_d$$

$\omega \rightarrow \infty$  では、位相進み  $90^\circ$  となる。

また、 $\omega_c = 1/\sqrt{T_i T_d}$  では

$$\angle G_c(j\omega_c) = \tan^{-1} 0 = 0^\circ \quad (24)$$

となる。PIDコントローラのボード線図を書くと、Fig. 18 のようになる」

八つあん「位相進みとか位相遅れとかいいますが、正弦波入力に対して  $180^\circ$  位相進む要素と遅れる要素に通せばともに正弦波入力を逆転させた波形になるから、ともに同じ働きをする要素と見なしてよいのでしょうか？」

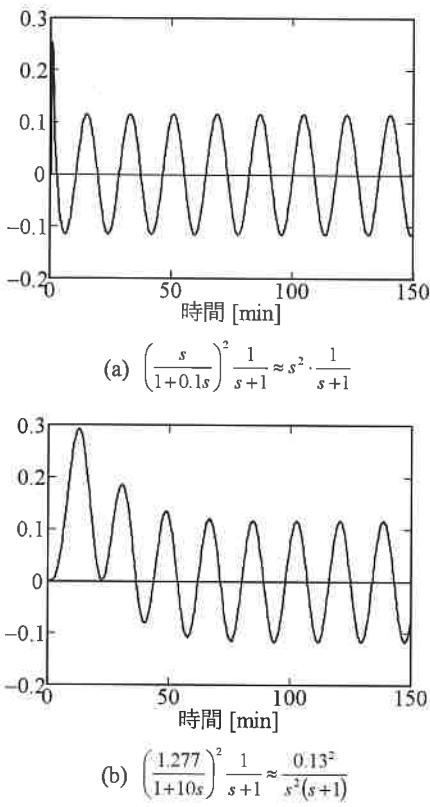


Fig. 19 微分器と積分器

ご隠居 「確かに、数学的には

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin \omega t$$

となり、定常的には同じ波形が得られるが、同じ働きではない。以前、純然たる微分器は実現不可能 (infeasible)であり、不完全微分要素で実現することになることを話したことになる。シミュレーションをしてみればわかるが、 $180^\circ$ 進む要素と遅れる要素とではまったくちがう。Fig. 19 は 1 次おくれ系に正弦波入力  $\sin 0.35 t$  を印加したときの、(a) 不完全微分器、(b) 不完全積分器をそれぞれ 2 つに直列にした回路を通した応答を示している。ちがっていることがわかるだろう？」

## (2) 限界感度法

ハツあん 「PID 動作の周波数特性がわかったところで、PID 動作の働きについて説明してくださいよ」

ご隠居 「その前に、PID コントローラの調整法と

して古くから知られた簡便な方法として限界感度法を説明しよう。

限界感度法では、まずコントローラを P 動作単独とし ( $T_i \rightarrow \infty, T_d \rightarrow 0$ )、持続振動がはじまるまで比例ゲインを高め、このとき比例ゲイン  $K_u$  と振動周期  $T_u$  を求める。この  $K_u, T_u$  に対し、Table 2 が調整条件である。

Table 2 限界感度法の調整条件

制御動作	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_u$		
PI	$0.45K_u$	$0.83T_u$	
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$

プラントの開ループ伝達関数  $G_p(s)$  が知られているときは、安定限界から

$$\angle G_p(j\omega_u) = -180^\circ \quad (25)$$

となる限界周波数  $\omega_u$  を求め、限界感度  $K_u$ 、限界周期  $T_u$  はつぎのように与えられる

$$K_u = \frac{1}{|G_p(j\omega_u)|}, \quad T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} \quad (26)$$

そこで、プラントの伝達関数を

$$(a) G_p(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (K=1, T=5[\text{min}], L=1[\text{min}])$$

と与えたとき、限界感度法によって PID パラメータを算出してみよう。プラントの周波数伝達関数より、ゲインならびに位相は

$$\left. \begin{aligned} |G_p(j\omega)| &= \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \\ \angle G_p(j\omega) &= -\tan^{-1} \omega T - \omega L \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となり、 $\angle G_p(j\omega) = -180^\circ$  になる限界周波数  $\omega_u$  は  $\omega_u = 1.69[\text{rad}/\text{min}]$  となり、振動周期ならびに限界ゲインは

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = 3.72[\text{min}], \quad K_u = \frac{1}{|G_p(j\omega_u)|} = 8.50$$

よって、Table 2 より

$$P \text{ 動作} : k_p = 0.5K_u = 4.25$$

$$PI \text{ 動作} : k_p = 0.45K_u = 3.83, \quad T_i = 0.83T_u = 3.09$$

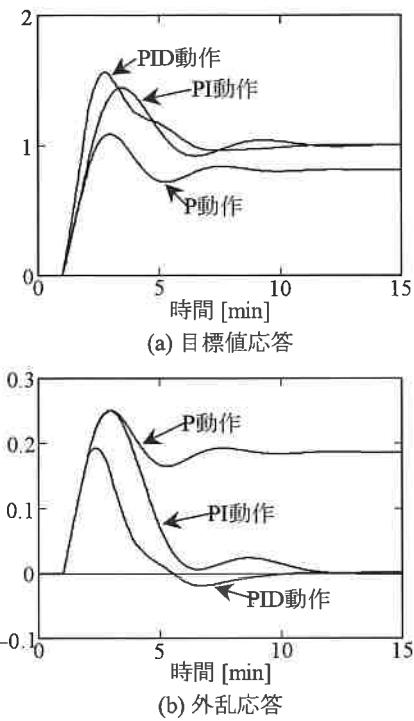


Fig. 20 限界感度法

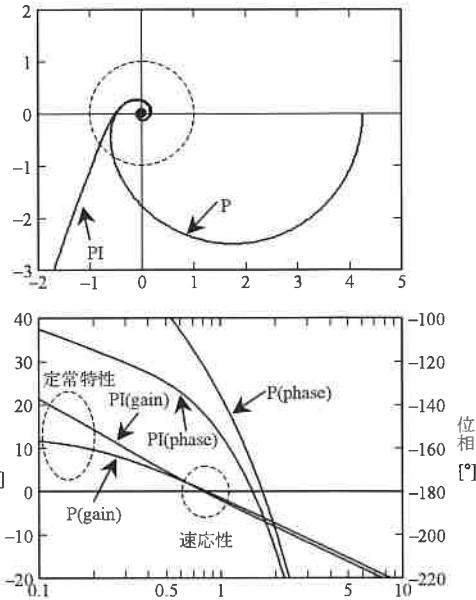


Fig. 22 P動作とPI動作における周波数特性

が得られる。このパラメータを用いて目標値応答と外乱応答を求めた結果を示したのが Fig. 20 である。

つぎに、P動作、PI動作、PID動作の動きを周波数特性から説明するために、ベクトル軌跡とボード線図を示すことにしよう。Fig. 21 はプラント  $G_p(s)$  と P動作における  $G_c(s)G_p(s)$  を対比させたときのベクトル軌跡とボード線図である。P動作では過渡特性と定常特性を改善できる。比例ゲイン  $k_p$  が増加すると、安定度は悪くなり、過渡特性は振動的になるが、定常偏差は減少する。P動作の場合、開ループ伝達関数ではゲインのみが変化して位相は変化しないことに注意しよう。

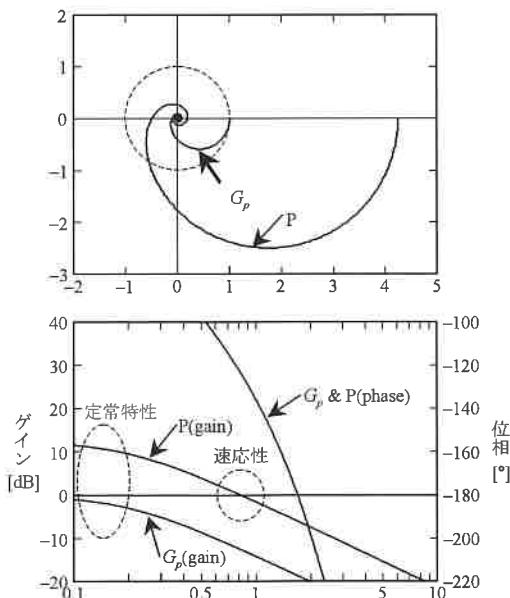


Fig. 21 プラントとP動作における周波数特性

PID動作 :  $k_p=0.6K_u=5.10$ ,  $T_i=0.5T_u=1.86$ ,  
 $T_d=0.125T_u=0.47$

Fig. 22 は P動作と PI動作とを対比させたときのベクトル軌跡とボード線図である。PI動作は位相遅れ補償であるが、低周波域でゲインが大きく、高周波域では一様に低くなるという性質を利用したもので、位相遅れを利用したものではない。

PI動作では速応性の改善はほとんど見られない。開ループ伝達関数  $G_c(s)G_p(s)$  の  $\omega_{eg} \sim \omega_{bp}$  付近の周波数特性をそのまま、すなわち過渡特性を変えないで、低周波域のゲインを上げて、安定特性の

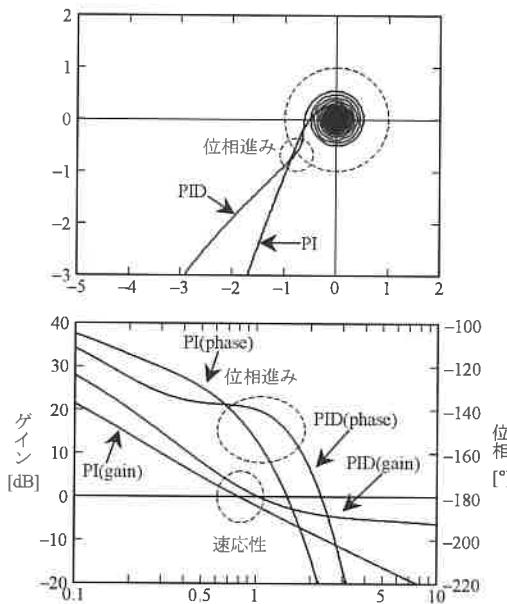


Fig. 23 PI動作とPID動作における周波数特性

改善を図る。

Fig. 23 は PI 動作と PID 動作とを対比させたときのベクトル軌跡とボード線図である。速応性を改善するには,  $k_p$  を増やしてゲイン交点  $\omega_{cg}$  を高める必要がある。 $k_p$  のみを大きくしたのでは位相の変化はないから位相余裕  $\phi_m$  は減少し安定性を損なう。そこで、あらかじめ位相余裕  $\phi_m$  が大きくなるように位相を進めておけば、ゲインを増大させてゲイン交点  $\omega_{cg}$  を高くすることができる。その結果、速応性を増すことができるようになる。

D 動作はゲイン交点  $\omega_{cg}$  付近において位相を進めて位相余裕  $\phi_m$  を増やして、減衰性を増す効果がある。 $\omega_{cg}$  の付近で D 動作が働いてくれないと何の効果もないのだ。ところが、I 動作はどんなに積分時間  $T_i$  が大きくても定常的には偏差を 0 にしてくれる効果があるのだ。

熊さん「D 動作が調整難しいといわれるのは、 $\omega_{cg}$  付近で働くことが困難ということなんですかね？」

ご隠居「そうだ。だから現場では D 動作が嫌われていると思うね」

八つあん「限界感度法は昔から広く使われている

調整法で、確かにパラメータを求めるのは容易ですが、欠点といったらどんな点ですかね？」

ご隠居「限界感度法は、外乱に対する抑制に注目した調整法であり、目標値に対する追従性はやや感度が高めになる。そのために、操作量(たとえばバルブの開度)の動きが振動的になる傾向がある」

八つあん「目標値に対する追従性がよくないということは、サーボ機構では使えないということですかね？」

ご隠居「サーボ機構の追従制御系の研究論文では限界感度法を使っての調整もあると聞いているが、現実には部分的モデルマッチング法がよいと思うがね<sup>7)</sup>」

熊さん「限界感度法では、具体的に何を評価基準にして何を狙って調整しているんですかい？」

ご隠居「限界感度法によるパラメータ調整では、1 次遅れ+むだ時間系で近似できるプラントに対して 25%ダンピング(1/4 減衰)になるようにつくられている。 $k_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  の 3 つのパラメータを決定するに当たり、限界感度  $K_u$ 、限界周期  $T_u$  の 2 つの情報しか使っていないので 3 つの自由度のうち 1 つを殺してしまっている。そこで、Ziegler-Nichols は

$$T_d = \frac{T_i}{4} \quad (28)$$

に固定している。つまり、

$$\begin{aligned} G_c(s) &= k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_i}{4} s \right) \\ &= k_p \frac{(T_i s + 2)^2}{4 T_i s} \end{aligned} \quad (29)$$

となり、コントローラに 2 重のゼロ点をつくっている<sup>8)</sup>」

熊さん「2 重のゼロ点をつくって、プラントの遅れを相殺しようとしているんですか？」

ご隠居「そうだと思うんだが、1 次遅れ+むだ時間系でこの事実を説明しようとしても、わしには手に負えんのだ。それでは、PID 動作を実施したときゲイン余裕  $g_m$  と位相余裕  $\phi_m$  を八つあんが求めてくれんかね？」

八つあん「合点承知之介だ。Fig. 23 より、ゲインが 1 となるゲイン交点  $\omega_{cg}$ 、位相が  $-180^\circ$  となる位相交点  $\omega_{cp}$  を求めると、

$$\omega_{cg} = 1[\text{rad/min}], \omega_{cp} = 2.38[\text{rad/min}]$$

となり、

$$g_m = 5[\text{dB}], \varphi_m = 40^\circ$$

といったところですね」

ご隠居「限界感度法というのは、限界周波数  $\omega_u = 1.69[\text{rad/min}]$  と限界ゲイン  $K_u = 8.50$  しか見ていないということは、 $\omega_{cp} = 2.38[\text{rad/min}]$  と  $g_m = 5[\text{dB}]$  の 2 つの情報しか問題にしていないのだ。実は  $\omega_{cg}$  と位相余裕  $\varphi_m$  が閉ループ系の減衰特性にかかわる重要なファクターであることが無視されている。

閉ループ系の代表振動項の減衰係数  $\zeta$  は Osborn の公式<sup>9)</sup>により

$$\zeta = \frac{\varphi_m}{3n} \quad (30)$$

によって近似的に与えられる。ここに  $n$  はゲイン交点  $\omega_{cg}$  におけるゲイン曲線の傾斜をはかつて  $-n[\text{dB/dec}]$  として、位相余裕  $\varphi_m [\text{deg}]$  とする。 $(30)$ 式を適用すると、

$$\zeta = \frac{40}{3 \times 20} = 0.67$$

となり、Ziegler-Nichols の狙った  $1/4$  減衰(減衰係数  $\zeta = 0.22$ )にほど遠いことがわかる。減衰係数を 2 次系のステップ応答から算出してみようと思うが、八つあんが求めてくれんかね？」

八つあん「2 次系のステップ応答  $x(t)$  は、教科書から

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \quad (31)$$

ですから、 $x=1$  まわりの正弦波を除いた包絡線は

$$a_i = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (32)$$

となり、正弦波部分の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (33)$$

であるから、半周期後の振幅比  $a_1/a_2$  の関係を表すと、

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} &= \frac{e^{-\zeta \omega_n t_1}}{e^{-\zeta \omega_n t_2}} = e^{-\zeta \omega_n (t_1 - t_2)} \\ &= e^{-\zeta \omega_n \{t_1 - (t_1 + \frac{1}{2}T)\}} \\ &= e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。両辺の対数をとると

$$\log_e \frac{a_1}{a_2} = \delta = \frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (35)$$

となり、よって  $\zeta$  はつぎのようになる。

$$\zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 + \pi^2}} \quad (36)$$

Fig. 20 の目標値応答より  $a_1 = 0.55$ ,  $a_2 = 0.04$  で与えられるから、

$$\delta = \log_e \frac{a_1}{a_2} = \log_e \frac{0.55}{0.04} = 2.62$$

$(36)$ 式を用いると、減衰係数  $\zeta$  は

$$\zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 + \pi^2}} = \sqrt{\frac{2.62^2}{2.62^2 + \pi^2}} = 0.64$$

となり、Osborn の公式が正しいことがわかる」

ご隠居「さすがの八つあん、よくできました。しかし、Ziegler-Nichols の狙った  $1/4$  減衰というのはどうなプラントを対象にしたのか興味あるね。まず、原論文<sup>10,11)</sup>でとりあげている積分十むだ時間系

$$(b) G_p(s) = R \frac{e^{-Ls}}{s} \quad (R = \frac{1}{T} = 0.2, L = 1[\text{min}])$$

と与えたとき、限界角周波数  $\omega_u$  ならびに限界ゲイン  $K_u$  は、つぎのように得られる。

$$\omega_u = 1.57[\text{rad/min}], K_u = \frac{\omega_u}{R} = \frac{1.57}{0.2} = 7.85$$

よって、限界周期  $T_u$  は

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = \frac{2\pi}{1.57} = 4.00$$

よって、PID パラメータはステップ応答に対する調整条件より

$$\begin{aligned} k_p &= 0.6K_u = 4.71, \\ T_i &= 0.5T_u = 2.00, T_d = 0.125T_u = 0.5 \end{aligned}$$

となる。ステップ応答(Fig. 24)より減衰係数  $\zeta$  を求めると、

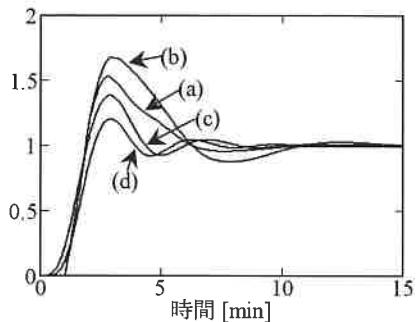


Fig. 24 PID動作を実施したときのステップ応答

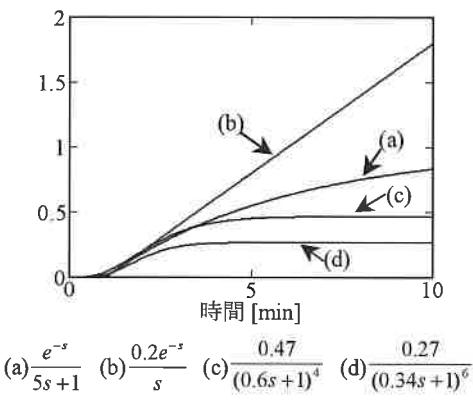


Fig. 25 プラントのステップ応答

$$\delta = \log_e \frac{a_1}{a_2} = \log_e \frac{0.69}{0.13} = 1.67$$

より

$$\zeta = \sqrt{\frac{1.67^2}{1.67^2 + \pi^2}} = 0.47$$

となる。さらに、 $R = 0.2$  を固定して  $L = 0.5, 1, 2, 5$  [min]とした場合の減衰係数  $\zeta$  も 0.47 であった」熊さん「限界周波数  $\omega_b (= 1.69[\text{rad}/\text{min}])$  と限界ゲイン  $K_u (= 8.50)$  とが同じになるような高次おくれ系を

$$(c) G_p(s) = \frac{K}{(Ts+1)^4} \quad (K = 0.47, T = 0.6)$$

あるいは

$$(d) G_p(s) = \frac{K}{(Ts+1)^6} \quad (K = 0.27, T = 0.34)$$

とした場合には、PID パラメータは 1 次おくれ +

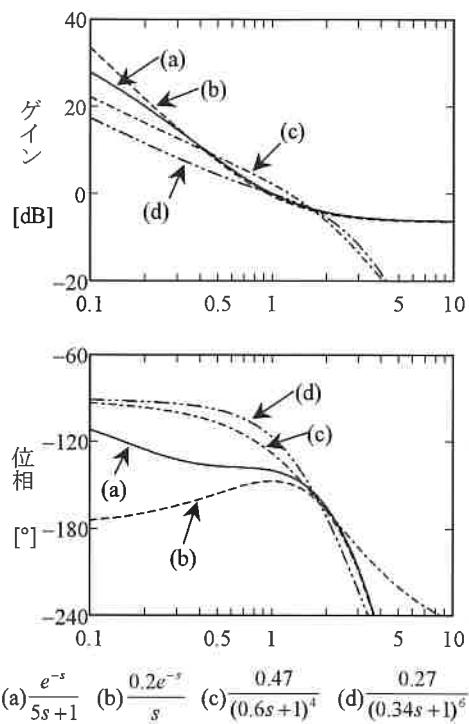


Fig. 26 PID動作を実施したときの周波数特性

むだ時間系と同じになるから

$$k_p = 5.1, T_i = 1.86[\text{min}], T_d = 0.465[\text{min}]$$

でよいわけです。

さて、ステップ応答をとると、Fig. 24 のようになります」

八つあん「さて、そこから先はこちとらに任せおくんなせえ。(c)の場合には、 $a_1 = 0.384, a_2 = 0.046$  ですから

$$\delta = \log_e \frac{a_1}{a_2} = 2.12, \zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2}} = 0.32$$

(1 周期後の振幅)

(d)の場合には、 $a_1 = 0.205, a_2 = 0.044$

$$\delta = \log_e \frac{a_1}{a_2} = 1.550, \zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2}} = 0.24$$

となり、Ziegler-Nichols の狙った  $1/4$  減衰に近づいてきました。

おわりに、プラントのステップ応答を Fig. 25 に示し、開ループ周波数特性を Fig. 26 に示す」

熊さん「結局 Ziegler-Nichols は実験的に調整法を探索したわけですが、プラントは(a)でも(b)でも(c)でもなく、むしろ(d)に近かったということですか？」

ご隠居「1940 年代はアナログ機器万能の時代で、まだ時間要素(純然たるおくれ要素)はローパスフィルタを多段にして近似したプラントで実験したのだと思うね。幸いにして、減衰係数  $\zeta$  が強めに算出されるので実務界で歓迎されたのだと思うよ」

### 参考文献

- 1) 須田信英編：PID 制御，システム制御情報学会，朝倉書店 (1992)
- 2) K. Åström and T. Hägglund : PID Controllers : Theory, Design and Tuning, Instrument Society of America (1995)
- 3) 神村一幸, 黒須茂編：空調システムの解析と制御, パワー社 (2000)
- 4) 新見和久：モデル予測制御の産業応用への展望, 計測と制御, 計測自動制御学会, 43-9, 647/653 (2004)
- 5) 黒須茂：制御工学入門, パワー社 (1985)
- 6) 日本能率協会：設備の基礎計装・制御編, マネジメントセンター (2003)
- 7) 斎藤製海, 徐粒共：制御工学—フィードバック制御の考え方—, 森北出版, 196/201 (2003)
- 8) 北森俊行：PID 制御システムの設計論, 計測と制御, 19-4, 382 (1980)
- 9) 増淵正美：自動制御基礎理論, コロナ社, 151, 原典は R. M. Osborn : Paper Presented at Summer Meeting, IRE, 1948-8, としかわからない
- 10) J. G. Ziegler and N. B. Nichols : Optimum settings for automatic controllers, Transactions of ASME, 64 (8), 759 (1942)
- 11) J. G. Ziegler and N. B. Nichols : Process lags in automatic control circuits, Transactions of ASME, 65 (5), 433 (1943)

