小山工業高等専門学校研究紀要
第 38 号 (2006) 21－26

数学記号とその効用について（Ⅰ）

The Mathematical Symbols and their Utility(Ⅰ)

河 島 博
Hiroshi KAWASHIMA

1．はじめに

数学においては，いかなる記号を用いるかによって，その後の数学の発展が違ってくるかは数学史の本を紐解けば分る。特に有名なのがニュートンとライプニッツの微分積分学上の先発見の論争である。決着は両者は独立に発見したこと，しかし記法上はライプニッツの記号の方が断然に優秀で，その為ニュートンの記号に固執したイギリスの数学者は大陸の数学者に大分遅れを取ったことなどである。

まず，$\int udv=uv-\int vdu$（但しu,vはxの関数とする）〈注：部分積分の公式〉を使って，$I_{m,n}\equiv\int\sin^m x\cos^n xdx$（但し，m,nは２以上の整数とする）の漸化式の公式を導いて見る。

(i)dxに$\cos x$を付けたとき

$I_{m,n}\equiv\int\sin^m x\cos^{n-1}xd\sin x$（$\because d\sin x=(\sin x)'dx=\cos xdx$より）

$=(\sin^m x\cos^{n-1}x)\sin x-\int\sin xd(〃)$（但し$〃=\sin^m x\cos^{n-1}x$とする）$=$<所で$(〃)'=(\sin^m x)'\cos^{n-1}x+\sin^m x(\cos^{n-1}x)'$

$=m\sin^{m-1}x\cos x\cos^{n-1}x+\sin^m x(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)$より>

$=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x-m\int\sin^m x\cos^n xdx+(n-1)\int\sin^{m+2}x\times\times\cos^{n-2}xdx=$<所で$\sin^{m+2}x=\sin^m x(1-\cos^2 x)$より>$=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x-mI_{m,n}+(n-1)I_{m,n-2}-(n-1)I_{m,n}$

$=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x-(m+n-1)I_{m,n}+(n-1)I_{m,n-2}\Longleftrightarrow$

$(m+n)I_{m,n}=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{m,n-2}\Longleftrightarrow$

$\therefore I_{m,n}=\dfrac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$(1)が出た。

(ii) dxに$\sin x$を付けたとき

$I_{m,n}=\int(-1)\sin^{m-1}x\cos^n xd(\cos x)$（$\because d\cos x=(\cos x)'dx=(-\sin x)dx$より）

$=\{(-1)\sin^{m-1}x\cos^n x\}\ \cos x-\int\cos xd(〃)$

（但し$〃=(-1)\sin^{m-1}x\cos^n x$とする）$=$<所で$(〃)'$

$=\{(-1)\sin^{m-1}x\cos^n x\}'=(-1)\ \{(m-1)\sin^{m-2}x\cos x\}\cos^n x+(-1)\sin^{m-1}x\times n\cos^{n-1}x(-\sin x)$より>$=(-1)\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)\int\sin^{m-2}x\cos^{n+2}xdx-n\times\times\int\sin^m x\cos^n xdx=$<所で$\cos^{n+2}x=\cos^n x(1-\sin^2 x)$より>$=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)(I_{m-2,n}-I_{m,n})-nI_{m,n}=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)I_{m-2,n}-(m+n-1)I_{m,n}\Longleftrightarrow(m+n)I_{m,n}=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)I_{m-2,n}\Longleftrightarrow\therefore I_{m,n}=\dfrac{-1}{m+n}\sin^{n-1}x\cos^{n+1}x+\dfrac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$(2)も出た。

〈注：このように計算すると，漸化式が自然にまた容易に出るので，敢えて紹介した次第である。〉

2．多価性を表わす記号$\lfloor\underline{\quad}$

〈注：$\lfloor\underline{\quad}$は“カギ”と読む。〉

この記号は，複素関数論でどうしても必要に迫られ開発したものである。

例えば $\lfloor\underline{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{2}$，$\lfloor\underline{\log 2}=\log|2|+i(arg2+2n\pi)=\log 2+i2n\pi$，$\lfloor\underline{\log 1}=\log 1+i(arg1+2n\pi)=i2n\pi$（但しnは整数）などである。

（定義１）$\lfloor\underline{\sqrt[n]{z}}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{Argz+k\times 2\pi}{n}}$$(k=0,1,2\cdots,n-1)$
（但しnは2以上の整数とする）

$\boxed{例}$ $\lfloor\underline{\sqrt[6]{2^2}}=\lfloor\underline{\sqrt[6]{4}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{0+k\times 2\pi}{6}}\neq\lfloor\underline{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{l\times 2\pi}{3}}$
（但し$k=0,1,2\cdots,5$，$l=0,1,2$）

〈注：$argz$と$Argz$を区別する。$0\leq Arg<2\pi$とする。（偏角の主値といわれる）〉

（定義２）$\lfloor\underline{\log z}=\log|z|+i(Argz+k\times 2\pi)$
（但し$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$）

$\boxed{例}$ $\llcorner\log(1+i)=\log\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi)$

$\llcorner\log(-1+\sqrt{3}\,i)=\log 2+i(\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi)$

（定義３）$\llcorner z^{\alpha}\equiv e^{\alpha\llcorner\log z}$（べき関数）

〈注１：$\alpha=$整数のときは１価で$\llcorner z^{\alpha}=z^{\alpha}$，$\alpha=1/n$（nが2以上の整数）のときは，n価で，$z^{\frac{1}{n}}=\llcorner\sqrt[n]{z}$となる。〉

〈注２：$\alpha=\frac{m}{n}$(m,nは整数で，$n\geqq 2$）のとき$\llcorner z^{\alpha}\equiv\llcorner(z^{m})^{\frac{1}{n}}$とすれば，$\llcorner z^{\alpha}=\llcorner\sqrt[n]{z^{m}}$となるが，指数表現よりべき根表現の方が正確である。〉

（定義４）$\llcorner\alpha^{z}\equiv e^{z\llcorner\log\alpha}$（指数関数）

〈注：$e^{z}\neq\llcorner e^{z}$，それは$\llcorner e^{z}\equiv e^{z\llcorner\log e}=<$所で$\llcorner\log e=\log|e|+i(Arg e+k\times 2\pi)=1+ik\times 2\pi$　より〉$=e^{z(1+i2k\pi)}=e^{z}e^{i2k\pi z}$よりzが整数のときは１価で等しいが，それ以外では異なる。〉

〈注：$\llcorner\alpha^{\beta}\equiv e^{\beta\llcorner\log\alpha}$（但し$\alpha\neq 0$）を先に出すべきだったのかも知れないが，ここでは関数表現を主題にしているので，定義に入れなかった。〉

$\boxed{例}$ $\llcorner\sqrt{2}^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\llcorner\log\sqrt{2}}=<$所で$\llcorner\log^{\sqrt{2}}=\log\sqrt{2}+i\times 2k\pi$より$>=e^{\sqrt{3}\log\sqrt{2}}e^{i2k\pi\sqrt{3}}=\sqrt{2}^{\sqrt{3}}e^{i2k\pi\sqrt{3}}$

（$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$）で，無限多価になる。

他にも取り上げるべき多価関数として，逆三角関数，逆双曲線関数などがあるが，今回は取り上げない。

〔定理１〕m,nを2以上の整数とするとき，

$$\llcorner\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}}=\llcorner\sqrt[n]{\sqrt[m]{z}}=\llcorner\sqrt[mn]{z}\quad(\alpha\neq 0)$$

が成立する。

〔証〕まず $\llcorner\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}}=\llcorner\sqrt[mn]{z}$ を言う。

仮定により，右辺はmn価の値を持ち，mn乗するとZになる。式で書くと

$\llcorner\sqrt[mn]{z}=\sqrt[mn]{|z|}e^{i\frac{\arg z+k\times 2\pi}{mn}}$（$k=0,1,2,\cdots,mn-1$）

左辺は$\llcorner\sqrt[n]{z}$はn価の値$\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z+p\times 2\pi}{n}}$（$p=0,1,2,\cdots,n-1$）を持ち，$\llcorner\sqrt[m]{\sqrt[n]{|z|}}$を考えることにより夫々が異なるm個の値を生ずる。そして元の値は全て異なるから，結局mn個の値が出て来てmn乗すれば全てzになるからzのmn乗根で，左辺と右辺が一致することが分かった。

同様に$\llcorner\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}}=\llcorner\sqrt[nm]{z}=\llcorner\sqrt[mn]{z}$も言える。〔了〕

〈注：式でも言える。

$\llcorner\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{Arg z+p\times 2\pi}{n}}$（$P=0,1,2,\cdots,n-1$）より

$\llcorner\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{|z|}}e^{i\frac{\frac{Arg z+p\times 2\pi}{n}+q\times 2\pi}{m}}$（$q=0,1,2,\cdots,m-1$）

（$\because\ \left|\llcorner\sqrt[n]{z}\right|=\sqrt[n]{|z|}$，$Arg\llcorner\sqrt[n]{z}=\frac{Arg z+p\times 2\pi}{n}$より）

$=\sqrt[mn]{|z|}e^{i\frac{Arg z+(mp+q)\times 2\pi}{mn}}$

（$\because 0\leqq l\leqq mn-1$のとき$l=mp+q$と表わせば，

$0\leqq p\leqq n-1$，$0\leqq q\leqq m-1$であるし，

逆もまた言えるからである。

$\{0\leqq l\leqq m(n-1)+(m-1)=mn-1\}$より）

つまり

$\llcorner\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}}=\llcorner\sqrt[mn]{z}$が式で言えた訳である。〉

３．リーマン面の記号 $\rceil\!\_\_$

〈注：$\rceil\!__$は“アールカギ”と読む。〉

（１）べき根のとき

まず，最も基本となる累乗根（べき根）のリーマン面の定義を与えよう。

nは2以上の整数として，また$k=0,1,2,\cdots,n-1$として，

$$\rceil\!\sqrt[n]{z}=\bigoplus_{k=0}^{n-1}k\rceil\!\sqrt[n]{z}$$

（但し$k\rceil\!\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{Arg z+k\times 2\pi}{n}}$）

と張り合わせるのである。$\bigoplus_{k=0}^{n-1}$は単なる和集合ではなく，循環的に取った和集合を意味する。

〈注：$k\rceil\!\sqrt[n]{z}$は第k番目の“分岐面”という。第何枚目というときは番号が１つずれる。〉

次に，$z \xrightarrow{\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}} W \xrightarrow{\rceil\underline{\sqrt[m]{W}}} Z$ （m ≠ nとする）

を考えよう。

つまり　$W=\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}$，$Z=\rceil\underline{\sqrt[m]{W}}$ より

（n枚用意）（m枚用意）

$Z = \rceil\underline{\sqrt[m]{\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}}}$ という，リーマン面の合成関数が得られる訳である。

略記的には，

$W = k\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$,

$Z = l\rceil\underline{\sqrt[m]{W}}$ $(l=0,1,2,\cdots,m-1)$ より

$$\therefore Z \equiv l\rceil\underline{\sqrt[m]{k\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}}} = l\rceil\underline{\sqrt[m]{\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{Argz+k\times 2\pi}{n}}}}$$

$$= \sqrt[m]{\sqrt[n]{|z|}}\, e^{i\frac{\frac{Argz+k\times 2\pi}{n}+l\times 2\pi}{m}}$$

$\left(\because \left|k\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}\right| = \sqrt[n]{|z|},\ Arg\,k\rceil\underline{\sqrt[n]{z}} = \dfrac{Argz+k\times 2\pi}{n}\right.$ より）

$$= \sqrt[mn]{|z|}\, e^{i\frac{Argz+(nl+k)\,2\pi}{mn}}$$

〈注：これは$K=0,1,2,\cdots,mn-1$をnで割ったときの商がlで，余りがkであることを意味するから，（但し$K=nl+k$とした），$l=0,1,2,\cdots,m-1$を1つ決める毎に，$0= 0,1,2,\cdots$，$n-1$と動いて行く。〉

つまり$Z_K=nl+k$（但し，$K= 0,1,2,\cdots,mn-1$）とすれば，これは枚数で言えば，第$(K+1)$枚目になる訳である。

そこで，順を逆にした合成関数を考える。即ち

$z \xrightarrow{\rceil\underline{\sqrt[m]{z}}} w \xrightarrow{\rceil\underline{\sqrt[n]{W}}} W$ （m ≠ n）

を考えよう。

つまり　$w=\rceil\underline{\sqrt[m]{z}}$，$W=\rceil\underline{\sqrt[n]{W}}$ より

（m枚用意）（n枚用意）

$W=\rceil\underline{\sqrt[n]{\rceil\underline{\sqrt[m]{z}}}}$ が得られる訳である。

略記的には

$w= l\rceil\underline{\sqrt[m]{z}}$ $(0\leqq l\leqq m-1)$，

$W=k\rceil\underline{\sqrt[n]{w}}$ $(0\leqq k\leqq n-1)$ より

$$\therefore W=\sqrt[mn]{|z|}\, e^{i\frac{Argz+(mk+l)\,2\pi}{mn}}$$

〈注：これは，これは$L=0,1,2,\cdots,mn-1$をmで割ったときの商がkで，余りがLであることを意味するから，(但し$L=mk+l$とした)，$k=0,1,2,\cdots,n-1$を1つ決める毎に，$l= 0,1,2,\cdots$，$n-1$と動いて行く。〉

つまり，$W_L = mk+l$（但し$L = 0,1,2,\cdots,mn-1$）とすれば，これは枚数で言えば，第(L+1)枚目になる訳で，これから次の重要な定理が得られた。

〔定理２〕m,nを2以上の整数とするとき

$$\rceil\underline{\sqrt[m]{\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}}} = \rceil\underline{\sqrt[n]{\rceil\underline{\sqrt[m]{z}}}} = \rceil\underline{\sqrt[mn]{z}} \quad (m \neq n)$$

〈注：m ＝ nのときも，勿論成り立つが，第２番目の等号は自明でない。〉

(ii) べき根と対数の合成

対数関数 $\lfloor\underline{\log z}$ のリーマン面化は，第k分岐面を

$$k\rceil\underline{\log z} \equiv \log|z|+i(Argz+k\times 2\pi)$$

（但し$k= 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$）

とすればよい。〈注：関数論の対数関数のリーマン面の構成の所を参考にせよ。〉　つまり

$$\rceil\underline{\log z} \equiv \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} k\rceil\underline{\log z}$$

で与えられる訳である。

まず

$z \xrightarrow{\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}} w \xrightarrow{\rceil\underline{\log w}} Z$

（n枚用意）（∞枚用意）

を考えて見よう。

略記して

$w= k\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}$ $(0\leqq k\leqq n-1)$，

$Z= l\rceil\underline{\log w}$ $(-\infty<l<\infty)$

$$\therefore Z = l\rceil\underline{\log}\left(k\rceil\underline{\sqrt[n]{z}}\right)$$

$$= l\rceil\underline{\log}\left(\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{Argz+k\times 2\pi}{n}}\right)$$

$$= \log\left|\sqrt[n]{|z|}\right| + i\left(\frac{Argz+k\times 2\pi}{n} + l2\pi\right)$$

$$= \frac{1}{n}\log|z| + i\times\frac{Argz+(k+nl)2\pi}{n}$$

これは Z_K（但し$K=0,\pm1,\pm2,\cdots$）のKに対して，余りkが $0\leqq k\leqq n-1$になるようにKをnで割ったときの商をlとしたものであるから，まずkを決めてからlが決まる。

つまり

$k=0$ のときの∞葉からなるリーマン面，

$k=1$ のときの∞葉からなるリーマン面，

……………………………………………………

$k=n-1$ のときの∞葉からなるリーマン面

のn枚のリーマン面を繋いだものである。〈注：$k=n$のときは$k=0$のリーマン面に戻るから良いのである。〉

次に

$$z \xrightarrow{\rceil\underline{\log z}} w \xrightarrow{\rceil\underline{\sqrt[n]{w}}} W$$

（∞枚用意）（n枚用意）

を考えて見よう。

$w=k\rceil\underline{\log z}\ (-\infty<k<\infty)$，

$W=l\rceil\underline{\sqrt[n]{w}}\ (0\leqq l\leqq n-1)$

と略記されるから

$$\therefore W = l\rceil\underline{\sqrt[n]{k\rceil\underline{\log z}}}$$

$$= l\rceil\underline{\sqrt[n]{\{\log|z|+i\,(Argz+k\times 2\pi)\}}}$$

$$= \sqrt[n]{\left|\log|z|+i\,(Argz+k\times 2\pi)\right|}\ \times$$

$$\times exp\left[i\times\frac{Arg\{\log|z|+i(Argz+(k2\pi)\}+l2\pi}{n}\right]$$

と複雑になる。

〈注：これからリーマン面を構成するのは，今の所は難しいようであるから，課題として残すことにする。〉

(iii)　2.での関数のリーマン面化の可能性

まず，べき関数がリーマン面化可能であることを示す。

$$z \xrightarrow{\rceil\underline{\log z}} w \xrightarrow{e^{\alpha w}} Z$$

とすれば，$w=\rceil\underline{\log z}, Z=e^{\alpha w}=e^{\alpha\rceil\underline{\log z}}$となるが，これが$e^{\alpha\rceil\underline{\log z}}$のリーマン面化である。

略記して

$w=k\rceil\underline{\log z}=\log|z|+i\,(Argz+k\times 2\pi)$

$Z=e^{\alpha w}=e^{\alpha\{\log|z|+i(Argz+k\times 2\pi)\}}$の和

$$=\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} e^{\alpha\{\log|z|+i(Argz+k\times 2\pi)\}}\ \text{より}$$

$Z_K=\ e^{\alpha\{\log|z|+i(Argz+k\times 2\pi)\}}$

であるが，$(zk)^{上}$と$(zk+1)_{下}$が繋がっていればよい。

$(zk)^{上}=e^{\alpha}[\log|z|+i\{Argz+(k+1-0)\times 2\pi\}]$

$(zk+1)_{下}=e^{\alpha}[\log|z|+i\{Argz+(k+1)\times 2\pi\}]$

で，一致するから，よって繋がっていてリーマン面になっているからよい。

次に，逆の構成を考えてみると

$$z \xrightarrow{e^{\alpha z}} w \xrightarrow{\rceil\underline{\log w}} W$$

となり，$W=\rceil\underline{\log w}=\rceil\underline{\log(e^{\alpha z})}$となる。

略記して書くと，

$w=e^{\alpha z}$，$W=k\rceil\underline{\log w}=\log|w|+i(Argw+k\times 2\pi)$

$=\log|e^{\alpha z}|+i\{Arg(e^{\alpha z})+k\times 2\pi\}$

であるから，

$(Wk)^{上}=\log|e^{\alpha z}|+i\{Arg(e^{\alpha z})+(k+1-0)\times 2\pi\}$

$(Wk+1)_{下}=\log|e^{\alpha z}|+i\{Arg(e^{\alpha z})+(k+1)\times 2\pi\}$

で一致するから，よって繋がっているからリーマン面化されていると言える。

それに対して，$\underline{|\alpha^z}\equiv e^{z\underline{|\log\alpha}}$（$z\neq 0$）はどうであろうか。

$$z \xrightarrow{z\underline{|\log\alpha}} w \xrightarrow{e^{w}} Z$$

とすれば，

$Z=e^{w}$，$w=z\underline{|\log^{\alpha}}$ より

$Z=e^{z\underline{|\log\alpha}}$であるが $\underline{|\log\alpha}$はα が定数である故に，繋げてみる訳にはいかない。つまり，リーマン面化は不可能である。

次に

$$z \xrightarrow{e^{z}} w \xrightarrow{w\underline{|\log\alpha}} W$$

を考えると，$w=e^{z}$，$W=w\underline{|\log\alpha}=e^{z\underline{|\log\alpha}}$である が，$\underline{|\log\alpha}$ が十分離れた数の集合なので，やはりリーマン面化は不可能である。

〔文献表〕

〔1〕吉田　洋一『微分積分学』
（S58）培風館

〔2〕高橋　礼司『複素解析』
（'97）東大出版

〔3〕田代　嘉宏『複素関数要論』
（'03）森北出版

〔4〕能代　　清『初等関数論』
（S31）培風館

〔5〕辻　　正次『函数論（上，下）』
（S35）朝倉書店

「受理年月日　2005年９月30日」