

制御理論講話 (その8) —ロバスト制御の基礎—

A Lecture on Control Theory (Part 8)

—Fundamentals of Robust Control—

山崎 敬則, 渡利 久規, 山川 雄司*, 黒須 茂**

Takanori YAMAZAKI, Hisaki WATARI, Yuji YAMAKAWA*, Shigeru KUROSU**

1. はじめに

制御の歴史において, 1960年代以前は古典制御理論とよばれており, 開ループ系を周波数領域で考え, 閉ループ系の安定性の議論を行い, PID制御などの考えが生まれた. 1980年代頃までに現代制御理論が, Kalmanの貢献によりほぼ確立された. 現代制御理論は, 古典制御理論で述べた周波数領域で制御問題を考えるのではなく, 微分方程式 (状態方程式) によってシステムが記述され, 線形システムに対して2次形式で評価関数が与えられると, その最適制御入力は状態フィードバックで与えられることがわかっている. 現場では観測できる制御量が限られるため, システムの状態をすべて知ることはできないのでオブザーバが必要となる. これらの状態フィードバックやオブザーバのゲインはRiccati方程式を解くことにより, 最適なゲインを算出することができる.

古典制御理論では, 位相余裕やゲイン余裕の観点から, ある程度のモデルに誤差が存在しても安定性に問題はなかったが, 多入力多出力系となると, これらの概念の導入が困難であった. 現代制御理論では, 状態方程式による厳密な数学モデルに基づいているため, モデルが正確で

ないと, 制御系の設計そのものが無意味になってしまう. すなわち, モデルの不確かさに対する考慮が不十分であると, 理論と応用との間に少なからずギャップが存在した.

そのため, 1980年代以降, プラントの不確かさを考慮に入れたロバスト制御理論の研究が, 制御学界で脚光を浴びはじめた. 本稿では, ロバスト制御の基礎・応用をきちんと理解するために, 1入力1出力システムの簡単な系について考えることにする. さらに, 例題を交えて議論する.

1ヶ月前の衆議院総選挙において, ご婦人層, 若年層の浮動票を根こそぎかき集めて自民党の空前の大勝利. その興奮も覚めやらぬ内に, 公務員の給与カット, 増税といった庶民を圧迫するようなニュースが飛びかっている. そんなことは知る由もなく, 相も変わらず極楽とんぼの八つあん, 熊さんが一杯飲みたさに, ご隠居のところにやってきた.

八つあん「ご隠居. ご無沙汰して居ります. お変わりござえませんか?」

ご隠居「やあ, いつも元気でなりよりじゃ. わしもどうにかこうにか, この通り生きているよ. ところで, 長屋の皆さんにはしばらく会っていないが, 元気でやっているかい?」

熊さん「一昨年, 長屋を建て替えてからというもの, 長屋の連中もすっかり疎遠になってしま

*) 平成14年度機械工学科卒業(東京大学工学部在学中)

**) 研究所 "Crotech"

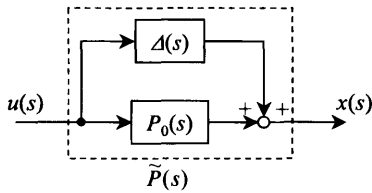


Fig. 1 不確かさを含むプラント

ったようで、顔を合わせることもめっきり少なくなかったようで…」

ご隠居「それでいいのだよ。お前さんたちはいつも夕方になれば飲んじゃ、他人の悪口ばかり言っていたじゃろ。それがなくなって、少しは仕事に精を出してくれれば、長屋が健康的である証拠じゃよ」

八つあん「はたして、そうですかね。わしら、集まっちゃあ、噂話に興じているときの方が健康的だと思いますがね。大体、最近じゃ、嫁さんもらったばかりの鼻でかの松なんか、わしらの顔を見ると、道を避けるんですぜ。淋しいじゃありませんか」

ご隠居「お前さんらが、こけにしてきたからな。自業自得というもんじゃ」

熊さん「ところで、今日もなにか新しい話題を聞かせて下さいよ」

ご隠居「新しい話ではないが、今日はPID制御から一転してロバスト制御について講釈するか。そこに湯飲み茶碗があるから、一杯やりながら聞きなさい」

2. ロバスト安定

ロバスト制御とは、モデルに誤差が存在したり、またモデルの特性が変動しても、制御系が安定を保持しつつ、制御性能も衰えないようにすることである。すなわち、モデルの不確かさ $\Delta(s)$ を陽に与えてシステムを考え (Fig. 1)、プラント $P_0(s)$ ($\Delta(s)=0$ のときの伝達関数) に対して制御性能が良好となるだけでなく、モデルの不確かさを含んだプラント $\tilde{P}(s)$ に対しても、制御性能が良好となるように制御系を設計することである。

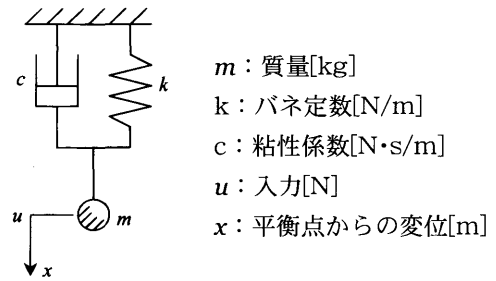


Fig. 2 バネ・質量・ダンパー系

そのために、まずモデルの不確かさを定義する必要がある。

2.1 モデルの不確かさ

不確かさには、大きく2つに分類される。1つは「構造化された不確かさ」、もう1つは「構造化されない不確かさ」である。

(1) 構造化された不確かさ

構造化された不確かさとは、プラントと不確かさがどのように関わってくるのかがはっきりとしている。たとえば、バネ・質量・ダンパー系を考えたとき、バネや質量の性質は温度によって変化することはないが、ダンパーは油圧によって行われているため、温度によって油の粘性が変化し、微分方程式に影響を与える。すなわち、安定を保っていたものが不安定になる可能性がある。その例を以下に示す。

例題 バネ・質量・ダンパー系 (Fig. 2)

バネ・質量・ダンパー系の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \quad (1)$$

となる。入力 u から出力 x への伝達関数 (プラントの伝達関数) $P(s)$ を求めると、

$$P(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2)$$

ここで

$$m=1, c=0.9, k=1$$

とする。コントローラとしてI動作を考え、Fig. 3のようなフィードバック系を構成する。ここで、 $r(s)$ は目標値、 $e(s)$ は偏差、 $u(s)$ は操作量、 $x(s)$ が出力である。

$$K(s) = \frac{k_I}{s}$$

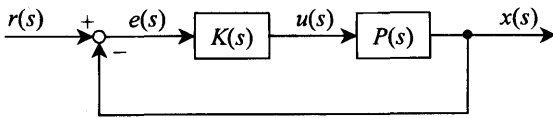


Fig. 3 制御系

$k=0.9$ として、特性方程式 ($1+PK=0$)を導く.

$$ms^3 + cs^2 + ks + k_i = 0 \quad (3)$$

となり、極を求めると

$$\begin{aligned} s = & -0.0293 + 0.9746i, \\ & -0.0293 - 0.9746i, \\ & -0.8415 \quad (i = \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

となる. 極の実部がすべて負であるから, 閉ループ系は安定である. しかし, 温度が変化して, ダンパーの性質が変化したとする. 具体的には $c=0.7$ に变化したとき, 極はつぎのように変化する.

$$\begin{aligned} s = & 0.0316 + 1.0233i, \\ & 0.0316 - 1.0233i, \\ & -0.7632 \end{aligned}$$

極の実部が正の値となっていることから, 閉ループ系が不安定になってしまっている. すなわち, c の値が変化することによって, 閉ループ系は安定から不安定に変わってしまう.

また, $c=1.1$ に変化したとすると, 極はつぎのように変化する.

$$\begin{aligned} s = & -0.9409, \\ & -0.0796 + 0.9187i, \\ & -0.0796 - 0.9187i \end{aligned}$$

このとき, 極の実部が負であるから, 閉ループ系は安定性を保持している. したがって, $c=0.9 \pm 0.2$ の変動を考えたときに, $+$ の場合は安定を保持しつつけるが, $-$ の場合には不安定になってしまう.

このような構造化された不確かさの場合には, ある要素のみが変動する形で表されるので, 変動する要素の上限・下限が分かれば, その範囲内で安定にするコントローラを設計することが必要である.

八つあん「ご隠居. 構造化された不確かさというのは, 早い話がパラメータ変動ですね. その

パラメータをあえて要素の変動といているのには, 何か意味があるのですかい？」

ご隠居「構造化された不確かさにおいて, プラントの伝達関数を状態方程式と出力方程式で表わせば, この不確かさは A, B, C, D マトリクス内の要素の変動と考えられるだろう. だから, わしゃ, 要素の変動と言ったのじゃ」

つぎに, 構造化されない不確かさについて考察する.

(2) 構造化されない不確かさ

構造化されない不確かさとは, 全体の不確かさとして捉えたものである. 実際のプラントの周波数応答テストの結果とモデルにもとづくシミュレーションとの差を不確かさとして考えたものである.

熊さん「ちょっと待って下さいよ. 実際のプラントの周波数応答とありますがね. そんなもの, 現実問題として得られるのですかい. また, 計測可能として, どの程度の周波数までとればいいのですかい？」

ご隠居「さまざまな周波数の正弦波の範囲は, $10^{-2} \sim 10^2 [\text{rad/sec (or min, hr)}]$ (4 decades) くらい知れば十分だろう」

熊さん「そんな広い周波数帯域で応答がとれるわけないじゃありませんか? 相手が素人だと思って馬鹿にしなさんな」

ご隠居「まあまあ, わしも実際に測定したわけではないのだ. プラントの時定数を T としたとき, $1/T$ あるいは固有振動数の周りに2~4decadesで大体よいのではないかい？」

構造化されない不確かさには2通りの表現方法があり, 「加法的不確かさ」, 「乗法的不確かさ」である.

(a) 加法的不確かさ

実際のプラントの伝達関数 $P(s)$, 公称モデル (ノミナルモデル…モデル化によって得られた既知の伝達関数) の伝達関数 $P_0(s)$ として, その差

$$\Delta(s) = P(s) - P_0(s) \quad (4)$$

と表したのが, 加法的不確かさ (additive uncertainty) である. したがって, 実際のプラン

トの伝達関数はつぎようになる。

$$P(s) = P_0(s) + \Delta(s) \quad (5)$$

(b) 乗法的な不確かさ

実際のプラントの伝達関数 $P(s)$ ，公称モデルの伝達関数 $P_0(s)$ として，その相対的な差

$$\Delta(s) = \frac{P(s) - P_0(s)}{P_0(s)} \quad (6)$$

と表したのが，乗法的な不確かさ (multiplicative uncertainty) である。したがって，実際のプラントの伝達関数はつぎようになる。

$$P(s) = P_0(s)(1 + \Delta(s)) \quad (7)$$

この2つの不確かさについてのブロック線図を示したのが，Fig. 4である。乗法的な不確かさには，さらに2通りの定義の仕方が存在する。それは，プラントの前（入力側）に不確かさを与えるか，もしくはプラントの後（出力側）に不確かさを与えるかに分けられる。両者の区別として，前者はアクチュエータの不確かさの表現に適しており，後者はセンサの不確かさの表現に適している。

八つあん「ご隠居。不確かさというのは古典制御では外乱として扱っていたものです。それを入力側で考えるか，出力側で考えるか，結果としてコントローラには何の影響も与えないと思うのですが…？」

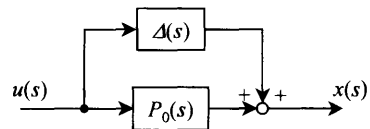
ご隠居「お前という奴はいくつになってもちっとも進歩しないね。入力側と出力側とは全然話がちがうのじゃ。とくに多入力多出力の場合には伝達関数が行列で与えられるから，不確かさの計算において掛算の順序が変わるから，話はちがう！」

八つあん「掛算の順序が変わるから，話がちがうとはどういうことです。

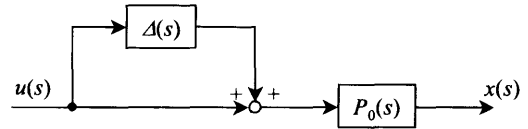
$$P_0(s)(1 + \Delta(s)) = (1 + \Delta(s))P_0(s)$$

ですから，開ループ伝達関数は変らないはずですよ」

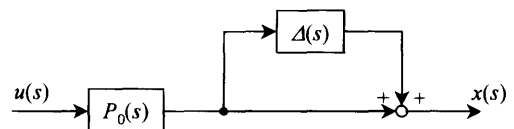
ご隠居「そりゃ，ここでは伝達関数で話しているからスカラーなのだ。だから $(1 + \Delta(s))$ が先であろうが，後であろうが結果は同じだ。ところが，伝達関数がマトリクスで表現される場合には，モデル化誤差を計算する際には， $P_0(s)^{-1}$ を左から



(a) 加法的な不確かさ



(b-1) 乗法的な不確かさ（入力側）



(b-2) 乗法的な不確かさ（出力側）

Fig. 4 不確かさ

掛けるか，右から掛けるかで結果が変わってしまうのだ」

熊さん「ところで，いま八つあんがお尋ねしたことも関連あるんですが，加法的な不確かさと乗法的な不確かさもモデル化誤差 $\Delta(s)$ の考え方の違いで，結果的にはコントローラに若干の違いがあるだけで本質的には同じでしょう？」

ご隠居「そりゃそうだ。不確かさの考え方で行われる結果が異なることはないよ。後に説明するロバスト安定条件も同じじゃよ」

2.2 不確かさの計算例

例題 1次系のモデル化誤差の計算。

ゲイン定数 K と時定数 T がそれぞれ δ_K ， δ_T だけ変動したとする。このときの加法的な不確かさと乗法的な不確かさを計算する。ノミナルモデルと変動後モデルはつぎのような伝達関数で与えられる。

$$P_0(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad \cdots \text{ノミナルモデル} \quad (8)$$

$$P(s) = \frac{K(1 + \delta_K)}{T(1 + \delta_T)s + 1} \quad \cdots \text{変動後モデル} \quad (9)$$

・ 加法的な不確かさの算出
加法的な不確かさは

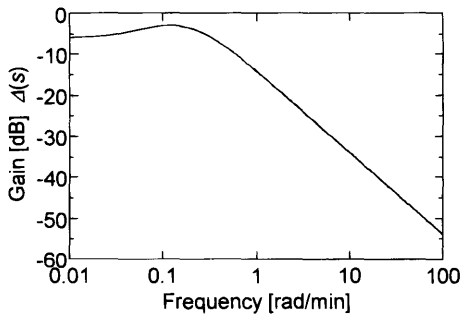


Fig. 5 加法的な不確かさ

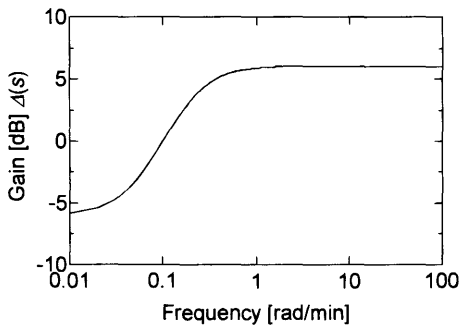


Fig. 6 乗法的な不確かさ

$$\Delta(s) = P(s) - P_0(s)$$

で与えられるので、それぞれを代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \frac{K(1+\delta_K)}{T(1+\delta_T)s+1} - \frac{K}{Ts+1} \\ &= \frac{K\{T(\delta_K - \delta_T)s + \delta_K\}}{T^2(1+\delta_T)s^2 + T(2+\delta_T)s + 1} \end{aligned} \quad (10)$$

となり、加法的な不確かさのゲイン線図を描くと Fig. 5 となる。ここで $K=1$, $T=10$, $\delta_K=0.5$, $\delta_T=-0.5$ として与えている。

・ 乗法的な不確かさの算出

乗法的な不確かさは

$$\Delta(s) = \frac{P(s) - P_0(s)}{P_0(s)}$$

で与えられるから、それぞれを上式に代入すると、

$$\Delta(s) = \frac{\frac{K(1+\delta_K)}{T(1+\delta_T)s+1} - \frac{K}{Ts+1}}{\frac{K}{Ts+1}}$$

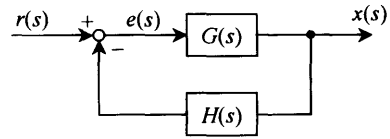


Fig. 7 閉ループ系

$$= \frac{T(\delta_K - \delta_T)s + \delta_K}{T(1+\delta_T)s+1} \quad (11)$$

となり、同じ δ_K , δ_T に対して乗法的な不確かさのゲイン線図を描くと、Fig. 6 となる。

このように、不確かさの与え方によっては、それぞれに差異が現れる。しかし、以下で述べるロバスト安定条件ではどちらの不確かさを考えても本質的な意味は変わらない。

八つあん「本質的な意味は変わらないとはどういうことです。それなら高周波域ではモデル化誤差 $\Delta(s)$ が大きくなると考えるのが自然ですから、乗法的な不確かさに限定して、話を展開すればいいじゃないですかい？」

ご隠居「この一例では、乗法的な不確かさの方が高周波でゲインが大きくなったが、他の例では加法的な不確かさで大きくなる可能性もある。だから、乗法的な不確かさだけで話を進めるのは、いかんのじゃ」

3. 安定条件

不確かさを考慮に入れて安定性を議論し、ロバスト安定を保証する必要がある。まず、第一段階として、古典制御理論において重要であるナイキストの安定判別法を復習しよう。

つぎに、スモールゲイン定理について述べる。制御系をロバスト安定にするためには、ロバスト安定条件とよばれる条件を満たすことが必要である。そこで、スモールゲイン定理を用いて、ロバスト安定条件の導こう。

3.1 ナイキストの安定判別法

Fig. 7 のような閉ループ系を考える。このときの一巡伝達関数は $G(s)H(s)$ となる。ここで、 $s=j\omega$

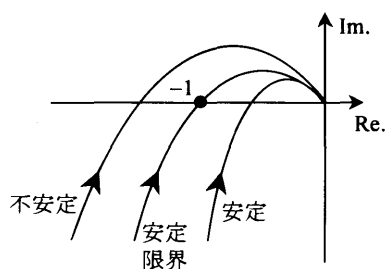


Fig. 8 ナイキストの安定判別法

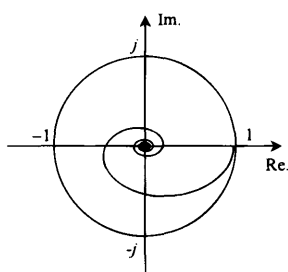


Fig. 9 スモールゲイン定理 (ベクトル軌跡)

を代入してゲイン $|G(j\omega)H(j\omega)|$ と位相 $\arg(G(j\omega)H(j\omega))$ を計算し、ベクトル軌跡を描く。このベクトル軌跡が -1 を囲まなければ、この閉ループ系は安定である。ベクトル軌跡が -1 の上を通る場合には、安定限界となり、 -1 を囲む場合には、閉ループ系は不安定となる。(Fig. 8)

さらに、ナイキストの安定判別法を強めにしたのが、スモールゲイン定理である。この定理は位相は考慮せず、ゲインだけに着目して安定性を議論した定理である。

3.2 スモールゲイン定理

スモールゲイン定理を説明するにあたり、Fig. 7の閉ループ系を考える。この閉ループ系が安定であるための条件は、以下のようになる。

$$\|G(s)H(s)\|_{\infty} < 1 \quad (12)$$

$\|\cdot\|_{\infty}$ は、伝達関数の H_{∞} ノルムを示しており、全周波数領域における最大ゲインと等価である。

この条件の意味は、「一巡伝達関数 $G(s)H(s)$ の周波数応答を調べた際に、全周波数領域においてもゲインが1未満であれば、閉ループ系は安

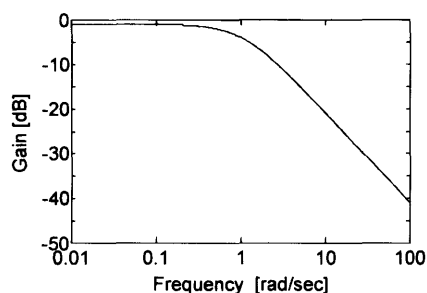


Fig. 10 スモールゲイン定理 (ゲイン線図)

定である」ということである。ゆえに、この条件を満たすことはベクトル軌跡が -1 を囲むことがありえないので、必ず安定である。Fig. 9から、この安定条件は、位相余裕が無大ということである。したがって、この条件はとても厳しく、保守的な安定条件であることがわかる。

ボード線図の観点から、スモールゲイン定理を考えると、すべての周波数領域において、ゲインは0[dB]を越えないことを意味する。(Fig. 10) 熊さん「全周波数域で開ループ伝達関数のゲインが1以下であるということは、プロセス制御で積分動作を使うことも許されないんですかい？サーボモータなどでちょっとでも共振に近い現象は許されないんですかい？それでは現実問題として応用できませんぜ？」

ご隠居「確かに、スモールゲイン定理では開ループ伝達関数を見ているが、ロバスト安定条件でもそれは変わらないが、あとでわかるようにモデル化誤差 $\Delta(s)$ をくり出す形で開ループ系の伝達関数を求めると、お馴染みの閉ループ系の伝達関数がでてくるのじゃよ」

3.3 ロバスト安定条件

モデル化誤差の考え方によって、ロバスト安定条件に変化が見られるが、本質的には等価である。

(a) 加法的不確かさのとき

Fig.11の閉ループ系を考える。 $b \rightarrow a$ への伝達関数を求め、ブロック線図の等価変換を行うと、Fig.11のブロック線図は以下のように簡単化でき、Fig.12となる。したがって、スモールゲイン定理を用いると、

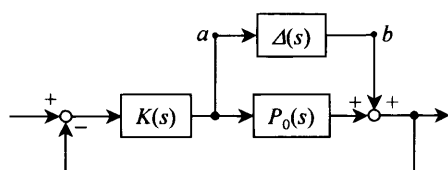


Fig. 11 閉ループ系（加法的な不確かさ）

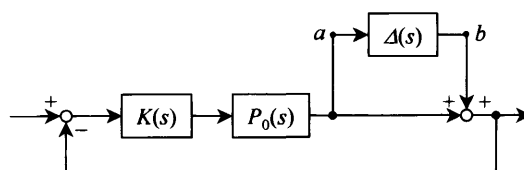


Fig. 13 閉ループ系（乗法的な不確かさ）

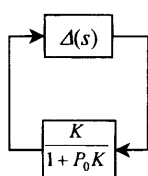


Fig. 12 閉ループ系

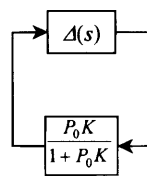


Fig. 14 閉ループ系

$$\left\| \frac{K\Delta}{1 + P_0 K} \right\|_{\infty} < 1 \quad (13)$$

となり、加法的な不確かさに対するロバスト安定条件である。

熊さん「おっさん、開ループ系に変換するのに $b \rightarrow a$ とはどういうことです。通常、 $a \rightarrow a$ または $b \rightarrow b$ と考えるんでしょうが？」

ご隠居「おっさんとは気安いね。年中、他人の懐を当てにして、酒を飲みくさって…」

八つあん「お前は気安いんでよ。もうすぐ、一杯飲める段になって…ご隠居、話を続けて下さい」

ご隠居「確かにそうだが…今回はスモールゲイン定理を用いたいから、 $\Delta(s)$ をくくりだす形で、開ループ系を考えなければならない。だから、 $b \rightarrow a$ を考えたのだよ」

では、続いて乗法的な不確かさについてのロバスト安定条件を導く。

(b) 乗法的な不確かさのとき

Fig.13の閉ループ系を考える。 $b \rightarrow a$ への伝達関数を求め、ブロック線図の等価変換を行うと、Fig.13のブロック線図はFig.14のように簡単化でき、乗法的な不確かさに対するロバスト安定条件は、

$$\left\| \frac{P_0 K \Delta}{1 + P_0 K} \right\|_{\infty} < 1 \quad (14)$$

である。

3.4 ロバスト安定条件の計算例

では、例題を用いてロバスト安定条件について考察しよう。モデル化誤差は一般的に高次の伝達関数となるため、通常、モデル化誤差のゲインを上回るように重み関数の設定を行う $|\Delta(s)| < |W(s)|$ 重み関数を設定することにより、 H_{∞} 制御理論では低次のコントローラを設計できる。モデルの不確かさ $\Delta(s)$ を重み関数 $W(s)$ で置き換えたとき、ロバスト安定条件は、それぞれつぎの式に書き換えられる。

$$\left\| \frac{KW}{1 + P_0 K} \right\|_{\infty} < 1 \cdots \text{加法的な不確かさ} \quad (15)$$

$$\left\| \frac{P_0 KW}{1 + P_0 K} \right\|_{\infty} < 1 \cdots \text{乗法的な不確かさ} \quad (16)$$

ここで、 $|\Delta(s)| < |W(s)|$ である。

八つあん「もともと1次系のプラントですぜ。高次のコントローラがでてくる道理なんかありませんぜ。なぜ、重み関数 $W(s)$ なんか、もち出すんですかい？」

ご隠居「これは、1次系の例だけで述べたのではなく、一般的なものについて述べたのだ。低次元の重み関数を持ち出せば、低次元のコントローラを設計できるからな」

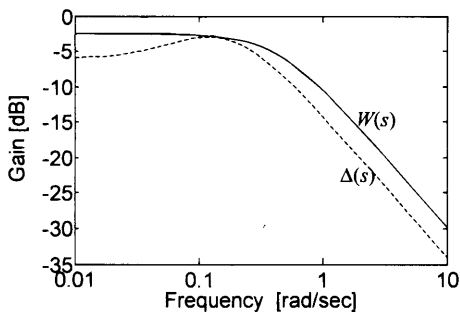


Fig. 15 不確かさと重み関数

1. 重み関数の設定

(a) 加法的な不確かさ

加法的な不確かさでは、重み関数としてつぎの1次系を考える。

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K}{Ts + 1} \\ &= \frac{0.75}{2.3s + 1} \end{aligned} \quad (17)$$

不確かさと重み関数のゲイン線図はFig.15のようになる。

(b) 乗法的な不確かさ

乗法的な不確かさの場合には、位相進みの形で不確かさを近似する。今回の場合には、近似しなくても、不確かさが(9)式で与えられているので、それを用いることにする。したがって、重み関数のゲイン線図はFig. 6である。

熊さん「高周波域でゲインが増大すれば、位相進みですかい。誰がそんなことをいったんですかい？」

ご隠居「おまえさんは、このオジさんの本を読んでないね」

八つあん「そうですよ。この男は買うだけ買って終われば、屑かごです」

ご隠居「おまえさんは最小位相推移系って知っているよね」

熊さん「伝達関数の零点が右半平面にない場合を最小位相推移系というんですよね？」

ご隠居「そうそう。ゲインと位相の関係は表裏

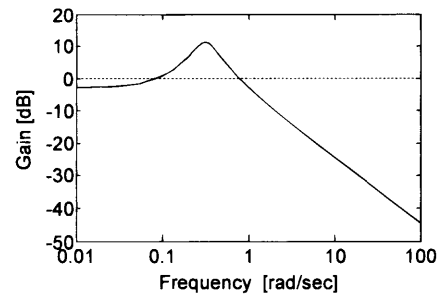


Fig. 16 ロバスト安定条件 (加法的)

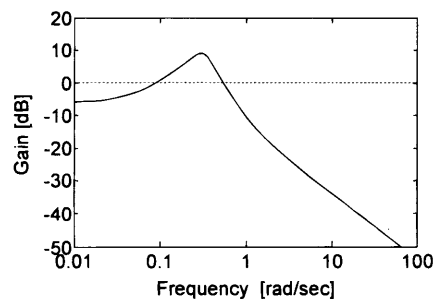


Fig. 17 ロバスト安定条件 (乗法的)

一体でどちらかを決めれば片方も自然と決まってしまう。ボードの定理といって、最小位相推移系に限り、ゲイン (棒) を決めれば、位相 (度) も決まってしまう。それを洒落て、棒度 (ボード) の定理というのじゃ」

2. ロバスト安定条件の確認

Fig.7のような閉ループ系を考える。コントローラにはPI制御を用いる。

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (18)$$

(1) $k_p=1, k_i=1$ のとき

加法的な不確かさを適用したとき、(8)式、(17)式、(18)式を用いて、ロバスト安定条件(15)式のゲイン線図を描くと、Fig.16となる。

乗法的な不確かさを適用したとき、(8)式、(11)式、(18)式を用いて、ロバスト安定条件(14)式のゲイン線図を描くと、Fig.17となる。

この場合には、ロバスト安定条件である伝達

関数のゲインを調べた結果、0[dB]を越えているので、ロバスト安定ではないことがわかる。しかし、ロバスト安定条件は安定であるための十分条件であるから、安定条件を満たしていないからといって制御系が不安定となったわけではない。これは、特性方程式 ($1+PK=0$) から2次系で、 s の係数はいずれも正の値となっているから不安定にならないことがわかる。

八つあん「ご隠居、 s の係数がいずれも正の値になっているから安定ですって？それはRouth-Hurwitzの安定条件ですね。安定性という概念は、あるときはRouth-Hurwitzを使い、あるときはNyquistの安定判別を使い分けていいんですかい？」

ご隠居「あきれた。どちらも安定条件には変わらんよ。今回は2次系だから係数をみるだけで簡単に安定判別できるから、Routh-Hurwitzの安定条件を使っただけじゃ」

つぎに、ロバスト安定となるようにコントローラのゲインを下げる。

(2) $k_p=1, k_i=0.15$ のとき

加法的不確かさを適用したとき、(8)式、(17)式、(18)式を用いて、ロバスト安定条件(15)式のゲイン線図を描くと、Fig.18となる。

乗法的不確かさを適用したとき、(8)式、(11)式、(18)式を用いて、ロバスト安定条件(14)式のゲイン線図を描くと、Fig.19となる。

この場合には、ゲイン線図が0[dB]を越えていないことから、ロバスト安定であることがわかる。このとき、コントローラのゲインを減少させてロバスト安定条件を満足するようにしているため、 $k_p=1, k_i=1$ の場合よりも制御性能は劣化する。したがって、ロバスト安定性と制御性能の関係はトレードオフの関係であることがわかる。これは、安定性と制御性能の間にトレードオフの関係があることと等価である。

熊さん「トレードオフとは何です？そんな英語は辞書にありませんぜ？」

ご隠居「トレードオフとは、2つの評価指標があるときに、どちらかを良くすれば、もう一方は悪くなることじゃ。設計では常に問題となるこ

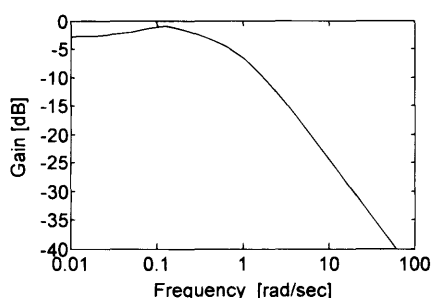


Fig. 18 ロバスト安定条件（加法的）

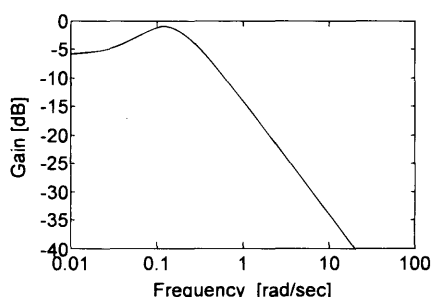


Fig. 19 ロバスト安定条件（乗法的）

とじゃよ。つまり、無理を通せば、道理がひっこむということだ」

以上の結果より、どちらの不確かさを用いても、ロバスト安定条件のゲインの最大値はほぼ同じ値をしてしていることからロバスト安定条件は等価であることがわかる。

この例題において、加法的不確かさ $\Delta(s)$ は $|\Delta(s)| < |W(s)|$ となるように重み関数 $W(s)$ を用いて近似しているため、乗法的不確かさのロバスト安定条件よりも若干厳しくなっている。そのため、加法的不確かさと乗法的不確かさのロバスト安定条件に多少の誤差が生じている。ロバスト安定条件を厳密に与えるためには、重み関数を近似せず、そのままモデル化誤差の関数を用いればよい。

八つあん「モデル化誤差の関数をそのまま使えばよいとは、矛盾してますぜ。もともとモデル化誤差 $\Delta(s)$ なんていうもの陽にわかるものではないというのが前提ではないんですかい？」

ご隠居「確かに、 $\Delta(s)$ は陽にわかるものではなく、こちらで与えたものだ。だが、 $\Delta(s)$ が高次でなければ、そのまま使った方が、安定条件はその分複雑にならないから、ロバスト安定条件をより簡単に満たすことができる」

「受理年月日 2005年9月30日」