小山工業高等専門学校研究紀要
第 42 号 (2010) 27－ 32

ブーメランの翼に関する考察

Study on Boomerang Wings

柴田　洋一
Yoichi SHIBATA

概要　　ブーメランの形は「へ」の字型が最もよく知られているが，理論計算から，この形状はブーメランの旋回性能にとっては，必ずしも最上ではないことがわかった。最も安定した飛行をするのは，十字型４枚羽根であることを，解析的に明らかにすることが出来た。

1．はじめに

筆者は，小山高専専攻科の授業「応用科学（物理学）」において，ブーメランの科学を講義している。ブーメランの理論計算には流体力学および回転する剛体の力学が必要であり、本科で学習した物理学を応用し、さらに新たな物理学の知識を学習する題材として、専攻科のレベルに適している。また、本講義では単に計算をなぞるだけでなく、自らブーメランを設計し、その飛行の理論計算を行う。さらに実際にブーメランを制作し、飛行を検証する。本講義は、これら一連の作業により、理論と実践の融合を目指したものである。

ブーメランについては、一般向けの書物［1］の他、工作や簡単な計算をおこなった論文もある［2］。また理論計算としては、Barger らの力学のテキストに比較的詳しく出ている［3］。今回は、Barger らの方法を参考にして、モデルの計算を行った。

一般的なブーメランの形状をfig.1に示す。

fig.1

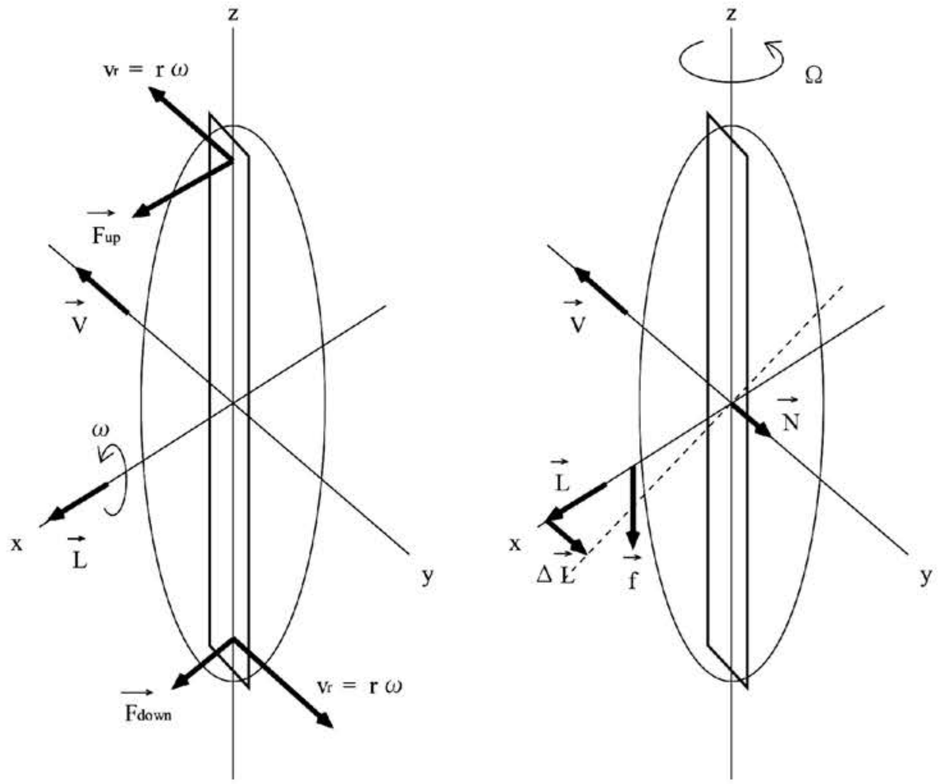
ブーメランの投げ方は、fig.2(a)のように、板を垂直にして縦に投げるのが正しい。fig.2(b)のように、板を横に寝かせて投げるものと思っている人が多いが、それは誤りである。

(a)　(b)

fig.2

2．旋回の原理

議論を簡単にするため、fig.3(a)のように、一直線上に２枚の羽根が並んだモデルを考える。このブーメランは重心を中心に角速度$\overline{\omega}$で回転するとし、$\overline{\omega}$の向きをx軸正の向きとする。これをy軸負の向きに速度$\overline{V}$で投げる。x軸、y軸と直交する向きを z 軸とする。



(a)　　(b)

fig.3

羽根に生じる揚力の大きさは、ベルヌーイの法則で説明され、すなわち羽根を横切る風の速度が大きくなるほど、空気の圧力が下がる。羽根の表を通過する流速を、裏面の流速より大きくしてやれば、表の圧力は裏に比べて小さくなり、結果として羽根を持ち上げようとする揚力が発生する。これは、航空機が飛ぶときに羽根に生じる揚力と、同じ原理であるfig.4。

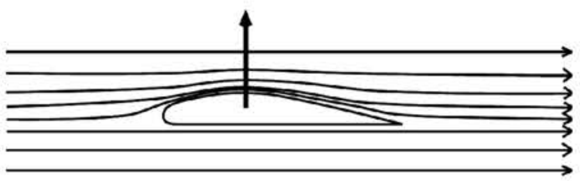


fig.4

もしブーメランが一カ所にとどまり回転運動だけをしているなら、回転軸からrだけ離れた位置を横切る風の速さは、$\upsilon_r = r\omega$で与えられるはずである。しかしブーメランは y 軸負の向きに速度$\vec{V}$で投げられるため、この並進速度の分だけ上の羽根と下の羽根に速度差が生じる。すなわち、上の羽根にあたる風の速さυ_{up}は、回転による速さυ_rと並進運動の速さVの和で与えられ、

$$\upsilon_{up} = \upsilon_r + V \tag{1}$$

これに対し、下側の羽根にあたる風の速さυ_{down}はυ_rとVの差で与えられる。

$$\upsilon_{down} = \upsilon_r - V \tag{2}$$

そのため上側の羽根には大きな揚力$\vec{F_{up}}$が生じるのに対し、下側の羽根に生じる揚力$\vec{F_{down}}$は小さい。この揚力はそれぞれ回転軸のモーメントを発生させるが、上の羽根で生じるモーメントに比べて、下の羽根で生じるモーメントは小さい。そのため合成モーメント$\vec{N}$はfig.3(b)のように、y 軸正の向きに現れる。いま x 軸正の向きの角運動量$\vec{L}$で回転運動していたブーメランに、y 軸正の向きに回転軸を変化させようとするモーメント$\vec{N}$がはたらく。そのため角運動量$\vec{L}$は$\vec{N}$の向きにその向きを変える。すなわちブーメランの回転面が変化する。これが連続的に発生するので、ブーメランは旋回する。

３．モーメントの定量的計算

fig.5のように一直線上に並んだ２枚羽根をモデルとして、定量的な議論をしてみよう。

羽根１枚の長さは l とする。x 軸、 y 軸、 z 軸の各方向の単位ベクトルをそれぞれ $\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 、$\vec{k}$ とする。

いま羽根が y 軸正の向きから角度 ωt の位置にあるとき、回転の中心軸から r の距離にある要素 dr の部分に生じる揚力の大きさを求める。

fig.5(b)において、上側の羽根の dr の位置および下側の羽根の dr の位置は

$$\vec{r}_{\mathrm{up}} = r\cos\omega t\,\vec{j} + r\sin\omega t\,\vec{k} \tag{3}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{down}} = r\cos\omega t\,\vec{j} - r\sin\omega t\,\vec{k} \tag{4}$$

である。

これらの dr を横切る風の速さは、それぞれ

$$\upsilon_{\mathrm{up}} = \upsilon_{\mathrm{r}} + V\sin\omega t \tag{5}$$

$$\upsilon_{\mathrm{down}} = \upsilon_{\mathrm{r}} - V\sin\omega t \tag{6}$$

であるが、羽根の回転によって生じている υ_{r} は $\upsilon_{\mathrm{r}} = r\omega$ なので

$$\upsilon_{\mathrm{up}} = r\omega + V\sin\omega t \tag{7}$$

$$\upsilon_{\mathrm{down}} = r\omega - V\sin\omega t \tag{8}$$

となる。

dr で生じる揚力は ベルヌーイの法則から、 υ^2 に比例すると仮定し、その比例係数を c とすると、上の羽根の dr で生じる揚力は

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{up}} = c\,\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2\mathrm{d}r\,\vec{i} \tag{9}$$

下の羽根の dr で生じる揚力は

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{down}} = c\,\upsilon_{\mathrm{down}}{}^2\mathrm{d}r\,\vec{i} \tag{10}$$

と与えられる。

次にこれらの揚力がそれぞれつくるモーメントを求める。$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{up}}$ が重心のまわりにつくるモーメント $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{up}}$ は

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{N}_{\mathrm{up}} &= \vec{r}_{\mathrm{up}} \times \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{up}} \\
&= \left(r\cos\omega t\,\vec{j} + r\sin\omega t\,\vec{k}\right) \times c\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2\mathrm{d}r\,\vec{i} \\
&= r\cos\omega t\,\vec{j} \times c\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2 dr\,\vec{i} + r\sin\omega t\,\vec{k} \times c\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2\mathrm{d}r\,\vec{i} \\
&= r\cos\omega t\,c\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2\mathrm{d}r\left(-\vec{k}\right) + r\sin\omega t\,c\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2\mathrm{d}r\,\vec{j} \\
&= c\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2 r\mathrm{d}r\left(\sin\omega t\,\vec{j} - \cos\omega t\,\vec{k}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

同様に下の羽根がつくるモーメントは

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{down}} &= \vec{r}_{\mathrm{down}} \times \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{down}} \\
&= c\upsilon_{\mathrm{down}}{}^2 r\,\mathrm{d}r\left(-\sin\omega t\,\vec{j} + \cos\omega t\,\vec{k}\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

となる。(11)と(12)の和が、上下の要素 dr によって発生する重心の周りのモーメント和 $\mathrm{d}\vec{N}$ である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{N} &= \mathrm{d}\vec{N}_{\mathrm{up}} + \mathrm{d}\vec{N}_{\mathrm{down}} \\
&= c\upsilon_{\mathrm{up}}{}^2 r\mathrm{d}r\left(\sin\omega t\,\vec{j} - \cos\omega t\,\vec{k}\right) + c\upsilon_{\mathrm{down}}{}^2 r\,\mathrm{d}r\left(-\sin\omega t\,\vec{j} + \cos\omega t\,\vec{k}\right) \\
&= c\,r\,\mathrm{d}r\left(r^2\omega^2 + 2r\,\omega V\sin\omega t + V^2\sin^2\omega t\right)\left(\sin\omega t\,\vec{j} - \cos\omega t\,\vec{k}\right) \\
&\quad + c\,r\,\mathrm{d}r\left(r^2\omega^2 - 2r\,\omega V\sin\omega t + V^2\sin^2\omega t\right)\left(-\sin\omega t\,\vec{j} + \cos\omega t\,\vec{k}\right) \\
&= 4c\omega V r^2\mathrm{d}r\left(\sin^2\omega t\,\vec{j} - \sin\omega t\cos\omega t\,\vec{k}\right) \\
&= 2c\omega V r^2\mathrm{d}r\left\{(1 - \cos 2\omega t)\,\vec{j} - \sin 2\omega t\,\vec{k}\right\}
\end{aligned} \tag{13}$$

(13)式を r=0 から r=l まで積分すれば重心の周りの全モーメント $\vec{N}$ が求まる。

$$\vec{N} = \int_0^l \mathrm{d}\vec{N}$$
$$= \int_0^l \left[2cr^2 \omega V \left\{ (1 - \cos 2\omega t)\vec{j} - \sin 2\omega t \vec{k} \right\} \right] \mathrm{d}r$$
$$= \frac{2}{3} cl^3 \omega V \left\{ (1 - \cos 2\omega t)\vec{j} - \sin 2\omega t \vec{k} \right\} \tag{14}$$

(14)式が、ブーメランの角運動量 $\vec{L}$ の向きを変えるモーメントである。

4．ブーメランの形状

(14)式は $\vec{j}$ だけでなく $\vec{k}$ も含んでいる。もし、発生するモーメント $\vec{N}$ が $\vec{j}$ だけを含むものであったなら、角運動量 $\vec{L}$ の変化は、y 軸方向のみとなり、ブーメランの旋回は、なめらかとなるはずである。しかし $\vec{k}$ も含むということは、$\vec{L}$ の変化に z 成分が含まれていることを意味しており、y-z 平面内で揺れ動くことを示唆している。

$\vec{N}$ の向きについて、詳しく議論しよう。向きだけを考えるために、(14)式を次のようにあらわす。

$$\vec{N} = \frac{2}{3} cl^3 \omega V \vec{n} \tag{15}$$

$$\vec{n} = (1 - \cos 2\omega t)\vec{j} - \sin 2\omega t \vec{k} \tag{16}$$

$\vec{n}$ の時間変化を見てみよう。

$$t = 0 \quad \text{のとき} \quad \vec{n} = (1-1)\vec{j} - 0\cdot\vec{k} = 0$$
$$t = \frac{\pi}{4\omega} \quad \text{のとき} \quad \vec{n} = (1-0)\vec{j} - 1\cdot\vec{k} = \vec{j} - \vec{k}$$
$$t = \frac{\pi}{2\omega} \quad \text{のとき} \quad \vec{n} = (1+1)\vec{j} - 0\cdot\vec{k} = 2\vec{j}$$
$$t = \frac{3\pi}{4\omega} \quad \text{のとき} \quad \vec{n} = (1-0)\vec{j} + 1\cdot\vec{k} = \vec{j} + \vec{k} \tag{17}$$

(17)式を図に表したのがfig.5である。(17)式およびfig.5からわかるように、t=0 のとき羽根は水平方向にあり、モーメントは発生しない。

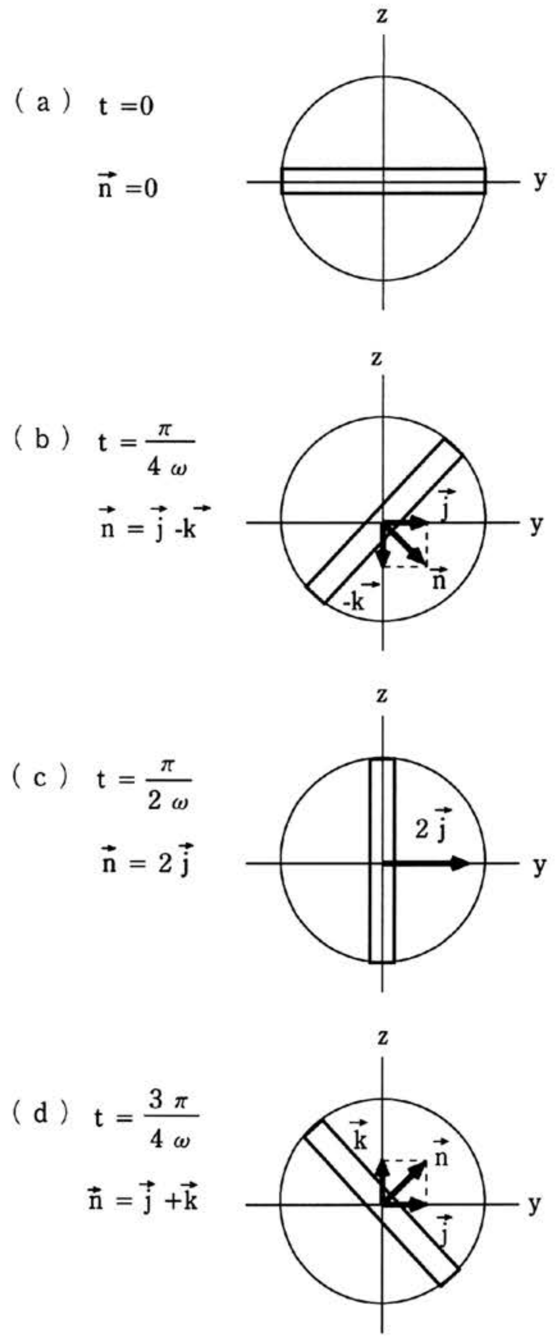


fig.5

$t=\dfrac{\pi}{4\omega}$ では羽根は斜めの位置にあり、このとき斜め下向きのモーメントが発生している。

$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ のとき羽根は垂直の位置にあり、このときｙ軸正の向きに最大のモーメントを生じる。

$t=\dfrac{3\pi}{4\omega}$ では羽根は $t=\dfrac{\pi}{4\omega}$ のときの羽根の位置と直交する向きにあり、斜め上方へのモーメントが生じている。これらのことから明らかなように、$\vec{N}$ の向きは安定しない。

５．最適な羽根

$\vec{N}$が常に y 軸正の向きに発生するには、羽根の形状は、fig.6のように４枚の十字型が最適であることがわかる。この形状であれば、個々の羽根で生じるモーメントを合成した全モーメントは、常に y 軸正の向きを向き、ブーメランは安定して$\vec{L}$の向きを変えるはずである。

fig.6

４枚羽根の次に安定しているのは、正三角形状の角度に羽根があるfig.7のような３枚羽根ブーメランである。４枚羽根ほどではないにせよ、(17)式よりよほど安定したモーメントを発生する。

fig.7

(17)式のモーメントが不安定なのは、羽根が一直線であるためである。通常よく知られている２枚羽根のブーメランがfig.1のように「へ」の字型をしているのは、生じるモーメントを少しでも安定させるためである。

６．まとめ

ブーメランの飛行を安定させるには、安定したモーメントを発生させる必要があるが、そのために最適な形状は、十字型の４枚羽根であることが、本研究の方法によって解析的に明らかになった。

参考文献

[１] L. L. Hawes & J. B. Mauro 著 小林秀文訳「ブーメランのすべて」1989ラングス・ジャパン
[２] 吉田喜一「ブーメラン作りをホームルームで」高等専門学校の教育と研究 別冊第１号 創造教育実践事例集 p.28(1999)日本高専学会
[３] V. D. Barger & M. G.Olsson 著 戸田盛和&田上由紀子 訳「力学 新しい視点にたって」昭和50年 培風館

小山工業高等専門学校 一般科
E-mail : shibata@oyama-ct.ac.jp

「受理年月日 2009年9月30日」