

二重倒立振子の振り上げ制御

笠原 雅人*¹, 谷中 大智**

The Swing Up Control of Double Pendulum

Masato KASAHARA, Daichi YANAKA

The controlled object of this study is the double pendulum. The torque is given at one place, and two angles of the pendulum are manipulated. It is proposed that the gain of swing up control of the double pendulum using energy method is adjusted. It is controlled to be a purpose using proposed gain.

キーワード：二重倒立振子，振り上げ制御，エネルギー法

Keywords: double pendulum, swing up Control, energy method

1. 緒 論

非線形力学，ロボット工学に関する多概念の教育，制御システムの設計の基本的な理解に倒立振子はよく利用される．倒立振子は非線形性の強いシステムであり，このシステムの制御は現代制御により行われる．主にロボット工学において基礎として必要な技術であり，最近では近未来型の乗り物“セグウェイ”や，TOYOTA の開発した倒立振子型ロボットが本研究の応用技術によるものである．

本研究では劣駆動システム（制御入力数以上の制御量のシステム）である二重倒立振子を制御対象とする．一箇所にトルクを与え，振子の 2 つの角度を操作し，エネルギー法を用いた二重倒立振子の振り上げ制御のゲイン調整を提案し，そのゲインを用いて倒立させることを目的とする．

2. 制御対象

〈2・1〉運動方程式の導出 図 1 に本研究のプラントのモデルを示す．ここで m_1 , m_2 は振子 1, 2 の総質量, L_1 , L_2 は振子 1, 2 の長さ, l_{c1} , l_{c2} は Link1, 2 からそれぞれの重心までの長さ, I_1 , I_2 は振子 1, 2 の重心周りの慣性モーメント, そして振子 1 が x 軸となす角度を q_1 , 振子 2 が振子 1 となす角を q_2 とし, 最後に重力加速度を g とし与える．このプラントにおいて, 図 1 の二重黒丸で示される Link1 にだけトルクを与え, q_1 , q_2 の 2 つの振子の角度の操作をする．この制御システムでは図 2 のブロック図のように, 条件によって制御方法を切り替え, 得られた入力をプラントに与える．

実際に制御を行うために, プラントに対しての重要な運動方程式を導出する．図 1 にプラントのパラメータやそれに加わる力を示す．プラントの運動方程式は図 1 よりラグ

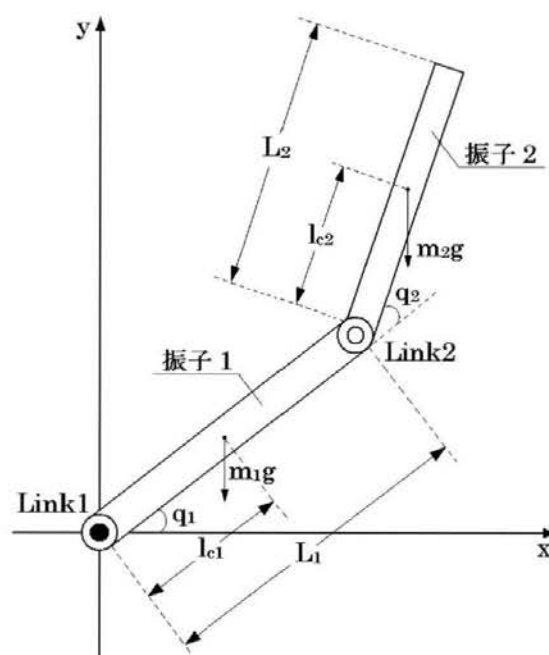


Fig. 1. 二重倒立振子

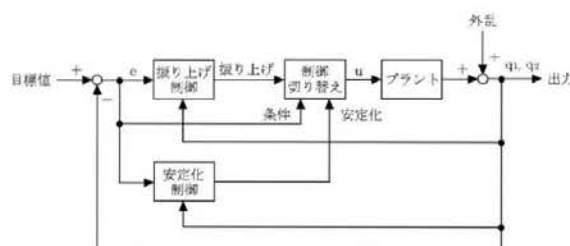


Fig. 2. システムのブロック線図

* 小山工業高等専門学校 電子制御工学科

** 小山工業高等専門学校 電子制御工学科 卒業生

ランジュの方程式を用いて計算した。

まず、振子 1, 2 についての運動エネルギー K_1 , K_2 と位置エネルギー U_1 , U_2 を考えると

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{R}}_1 \dot{\mathbf{R}}_1^T + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$U_1 = m_1 g l_{c1} \sin q_1 \dots\dots\dots (2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{R}}_2 \dot{\mathbf{R}}_2^T + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$U_2 = m_2 g (L_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ は各重心の座標であり、

$$\mathbf{R}_1 = [l_{c1} \cos q_1 \quad l_{c1} \sin q_1]^T \dots\dots\dots (5)$$

$$\mathbf{R}_2 = [L_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \quad L_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)]^T \dots\dots\dots (6)$$

である。これらのエネルギーよりラグランジアン L を求めると

$$L = K_1 + K_2 - U_1 - U_2 \quad (8)$$

となる。このラグランジアン L を以下に示すラグランジュの方程式に代入することで、プラントの運動方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \tau_1 \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

となる。また、プラントの運動方程式はニュートンの第二法則に従い、さらに行列表現を用いて

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

と書き表すことができる。ただし、 $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\tau}$ は

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる。ここで、式の簡略化のために次の 5 つのパラメータを導入する。

$$\begin{cases} \theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + I_1 \\ \theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 = m_2 L_1 l_{c2} \\ \theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 L_1 \\ \theta_5 = m_2 l_{c2} \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

このパラメータを用いることで、 $\mathbf{D}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ はそれぞれ次のように書ける。

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \theta_3 \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

〈2・2〉 平衡点 平衡点とは振子に外から力を加えない限り、その点に留まることのできる点のことである。平衡点には不安定な平衡点と安定な平衡点がある。不安定な平衡点とは外から力を加えると、そのままでは元の位置に戻ることのできない点のことであり、安定な平衡点とは逆に元の点に戻る点のことである。ここで、モータを動かさず振子が動いていない状態とすれば、運動方程式は以下のように重力項のみとなる。

$$\begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

また、平衡点の定義より振子に力が加わっていないとするならば、 $\tau_1 = 0$ となり、このシステムにおける 4 つの平衡点が以下のように得られる。

top position	$q_1 = \pi/2, q_2 = 0$
mid position1	$q_1 = -\pi/2, q_2 = \pi$
mid position2	$q_1 = \pi/2, q_2 = \pi$
low position	$q_1 = -\pi/2, q_2 = 0$

本研究では、この内の不安定な平衡点である mid position1 の倒立を目標とする。

3. 振り上げ制御

〈3・1〉 システムの受動性 (2.1.24) 式より $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ は対称行列であり、

$$\begin{aligned} d_{11} &= \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 \\ &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + I_1 \\ &\quad + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + 2m_2 L_1 l_{c2} \cos q_2 \\ &\geq m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 (L_1 - l_{c2})^2 > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

そして、

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}(\mathbf{q})| &= \theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2 \\ &= (m_1 l_{c1}^2 + I_1)(m_2 l_{c2}^2 + I_2) \\ &\quad + m_2 L_1^2 I_2 + m_2^2 L_1^2 l_{c2}^2 \sin^2 q_2 > 0 \end{aligned} \quad (21)$$

より $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ は全ての $\mathbf{q}$ に対して正であることが分かる。また、(13), (14) 式から次の歪対称行列が得られる。

$$\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \theta_3 \sin q_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

さらに、Pendubot の受動性を証明するため、以下のような歪対称行列の特性が用いられる。

$$z^T(D(q) - 2C(q, \dot{q}))z = 0 \quad \forall z \quad (23)$$

Pendubot の位置エネルギーは

$$P(q) = \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \quad (24)$$

として定義できる。また、 $P(q)$ は次のように $g(q)$ に関連する。

$$\begin{aligned} g(q) &= \frac{\partial P(q)}{\partial q} \\ &= \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Pendubot の総エネルギーは

$$\begin{aligned} E(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + P(q) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \\ &\quad + \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (28)$$

で与えられる。これにより、

$$\begin{aligned} \dot{E}(q, \dot{q}) &= \dot{q}^T D(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T g(q) \\ &= \dot{q}^T (-C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q) + \tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T g(q) \\ &= \dot{q}^T \tau = \dot{q}_1 \tau_1 \end{aligned} \quad (30)$$

となる。また、上式について積分すると

$$\int_0^{t_E} \dot{q}_1 \tau_1 dt = E(t_E) - E(0) \quad (31)$$

となり、ゆえにこのシステムは τ_1 を入力、 $\dot{q}_1$ を出力とする受動性を持つ。ここで、4 つの平衡点の総エネルギーはそれぞれ

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right) &= E_{top} = (\theta_4 + \theta_5)g \\ E\left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0\right) &= E_{low} = (-\theta_4 - \theta_5)g \\ E\left(-\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0\right) &= E_{mid1} = (-\theta_4 + \theta_5)g \\ E\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0\right) &= E_{mid2} = (\theta_4 - \theta_5)g \end{aligned} \quad (33)$$

である。

〈3・2〉 トルク計算 エネルギー法では (23) 式の総エネルギーを使って制御系設計をする。ここで $\tilde{q}_1 = (q_1 - (\pi/2))$ 、 $\tilde{E}(q, \dot{q}) = (E(q, \dot{q}) - E_{mid1})$ だと考えよう。このとき、 $\tilde{q}_1$ と $\tilde{E}(q, \dot{q})$ を 0 にもっていくことを考える。さらに、以下のようなリアプノフ関数の候補を提案する。

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} \tilde{E}(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{k_P}{2} \tilde{q}_1^2 \quad (34)$$

上式において k_E , k_D , k_P は後に定義される厳密な正の定数である。また、 $V(q, \dot{q})$ の微分と (24) 式より

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, \dot{q}) &= k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{\tilde{E}}(q, \dot{q}) + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1^2 \dot{q}_1 \\ &= k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \dot{q}_1 \tau_1 + k_D \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1^2 \dot{q}_1 \\ &= \dot{q}_1 (k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1^2) \end{aligned} \quad (36)$$

となる。次に、(10) 式から $\ddot{q}_1$ を求める。

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = D(q)^{-1} \tau - D(q)^{-1} C(q, \dot{q}) \dot{q} - D(q)^{-1} g(q) \quad (37)$$

$D(q)$ の逆行列は次のようになる。

$$D(q)^{-1} = \frac{1}{|D(q)|} \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_2 - \xi \\ -\theta_2 - \xi & \theta_1 + \theta_2 + 2\xi \end{bmatrix} \quad (38)$$

ここで $|D(q)| = \theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2$, $\xi = \theta_3 \cos q_2$ である。これより $\ddot{q}_1$ は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \times \\ &\quad [\theta_2 \tau_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \theta_2 \theta_3 \sin q_2 \\ &\quad + \dot{q}_1^2 \theta_3^2 \sin q_2 \cos q_2 - \theta_2 \theta_4 g \cos q_1 \\ &\quad + \theta_3 \theta_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2)] \end{aligned} \quad (40)$$

この式の結果を受けて、簡略化のために

$$\begin{aligned} F(q, \dot{q}) &= (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \theta_2 \theta_3 \sin q_2 \\ &\quad + \dot{q}_1^2 \theta_3^2 \sin q_2 \cos q_2 - \theta_2 \theta_4 g \cos q_1 \cdots \\ &\quad + \theta_3 \theta_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (41)$$

とすれば、

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} [\theta_2 \tau_1 + F(q, \dot{q})] \quad (42)$$

と考えられる。これを (28) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}_1 \left[\tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_D F(q, \dot{q})}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} + k_P \tilde{q}_1 \right] \end{aligned} \quad (44)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} -\dot{q}_1 &= \tau_1 \left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right) \\ &\quad + \frac{k_D F(q, \dot{q})}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} + k_P \tilde{q}_1 \end{aligned} \quad (46)$$

のような

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_1^2 \quad (47)$$

が導出される制御則を提案する。(35) 式の制御則は

$$\left(k_E \tilde{E}(q, \dot{q}) + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right) \neq 0 \quad (48)$$

のように与えられる。この制御則は任意の ε が

$$\left| \tilde{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right| \leq \frac{k_D - \varepsilon}{k_E \theta_1} \quad (49)$$

であるかどうかで満足させられるだろう。(35)式の制御則を使用したとき、振子は(26)式で示した平衡点に止まることができる。また、 E_{mid1} 以外の平衡点を避けるために

$$\begin{aligned} \left| \tilde{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right| &< \min(|E_{mid1} - E_{mid2}|, \\ &|E_{mid1} - E_{low}|) \quad \dots\dots (50) \\ &= \min(|-2\theta_4 g + 2\theta_5 g|, 2\theta_5 g) \end{aligned}$$

とし、結果よりエネルギーの偏差の制限は

$$\begin{aligned} \left| \tilde{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right| &< c \\ &= \min \left(2\theta_5 g, |-2\theta_4 g + 2\theta_5 g|, \frac{k_D - \varepsilon}{k_E \theta_1} \right) \quad (52) \end{aligned}$$

となる。 $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は徐々に減少していく関数なので、(27)式は初期条件が

$$V(0) = \frac{c^2}{2} \quad (53)$$

のようになれば固定されるだろう。最後にこの条件を使って、振子の振り上げにおけるトルクの式は以下のように与えられる。

$$\tau_1 = \frac{-k_D F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2)(\dot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1)}{(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2)k_E \tilde{E} + k_D \theta_2} \quad (54)$$

〈3・3〉ゲイン調整 ゲインはエネルギーの偏差の制限と、実際に振子を動かした結果を考慮してそれぞれ設定した。比例エネルギーゲイン k_E はエネルギーの偏差に影響し、値が小さすぎると振子が振り上げることが出来なくなり、大きすぎるとトルクが飽和する。振動ゲイン k_D は角速度に影響し、応答の周期を左右する。 k_D は減衰定数のような働きをする。(42)式においてmid position1でのエネルギーを考慮すると、 k_E と k_D の関係は次のようになる。

$$0 < 2(\theta_4 - \theta_5)gk_E \theta_1 + \varepsilon < k_D \quad (55)$$

比例ゲイン k_P は角度の偏差に影響し、値が小さいときは応答が緩やかになるが、速応性が悪くなる。逆に大きくすると速応性は良くなるが、安定化制御にうまく切り替わらなくなる。また、速応性が良いということはトルクを速く振り上げることになるので、トルクが飽和する場合がある。

これらのことを踏まえて、以下のゲインを設定した。なお、mid position1において振子1は平衡点にあるため、最初に微小なトルクをかけて動かしてやる必要がある。したがって今回は初期トルクを-1として与えてある。

●実験1

$$k_P = 1.0, \quad k_D = 1.0, \quad k_E = 1.0$$

●実験2

$$k_P = 1.0, \quad k_D = 1.0, \quad k_E = 0.9$$

4. 安定化制御

安定化制御のために、Pendubotの非線形な運動方程式

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = D(\mathbf{q})^{-1} \boldsymbol{\tau} - D(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - D(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (56)$$

から

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, \quad x_2 = \dot{q}_1, \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \dot{q}_2, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{q}_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \ddot{q}_2, \dots (57) \\ d &= d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = \theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2 \end{aligned}$$

として得られる非線形な状態方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{N} \quad (58)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & d_{12}c_{21} - d_{22}c_{11} & 0 & -d_{22}c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & d_{21}c_{11} - d_{11}c_{21} & 0 & d_{21}c_{12} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 0 \\ d_{12}g_2 - d_{22}g_1 + d_{22}\tau_1 \\ 0 \\ d_{21}g_1 - d_{11}g_2 - d_{21}\tau_1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

を線形化する。ここでシステムを線形化するために、以下のようなテイラー級数を用いる。

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{x}, u) &= f_a(\mathbf{x}_r, u_r) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_r, u_r} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \\ &\quad + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_r, u_r} (u - u_r) \quad (63) \end{aligned}$$

このとき、 $\mathbf{x}$ は運動方程式によって与えられる状態ベクトル、 u はPendubotの制御入力である。平衡点近傍でシステムは線形であると仮定し、これにより線形化された状態方程式を求めれば、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ &= \frac{\partial f_a(\mathbf{x}_r, u_r)}{\partial \mathbf{x}_r} \mathbf{x} + \frac{\partial f_a(\mathbf{x}_r, u_r)}{\partial u_r} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} u \quad (64) \end{aligned}$$

となる。ここで、不変パラメータと平衡点における値から

各要素を計算すると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -127.8 & 0 & 29.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 123.5 & 0 & 41.33 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 16.38 \\ 0 \\ -8.565 \end{bmatrix} u \quad (65)$$

が得られる。

5. 最適レギュレータ問題

次の評価関数

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} [x(i)^T Q x(i) + R u(i)^2] \quad (66)$$

が最小するようにリカッチ方程式を解き、そこから最適な制御入力 $u = -Kx$ を得るために、求めた A, b と最適レギュレータの重み Q, R 、そしてサンプリング周期を $T(=0.005[s])$ として、安定化のためのフィードバックゲインを求めた。今回、MATLAB の `lqr` コマンドよりその計算を行った。

$$\begin{aligned} \text{mid position1 } (Q = \text{diag}(200 \ 0 \ 1 \ 0), R = 1) \\ K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4] \\ = [86.18 \ 9.457 \ 111.6 \ 14.58] \end{aligned} \quad (67)$$

このフィードバックゲインを用いて、安定化制御におけるトルクの式は以下のように与えられる。

$$\tau_1 = K_1 \hat{q}_1 - K_2 \dot{\hat{q}}_1 + K_3 \hat{q}_2 - K_4 \dot{\hat{q}}_2 \quad (68)$$

6. 実験結果

図3から図5にLabVIEWによる出力結果を示す。ただし、図3, 4は振子が倒立するまでの時間が長くなってしまったため、振り上げ制御のときと、安定化制御へ切り替わったときの波形に分けているだけであるので、ゲインが同じということに留意してほしい。

7. 結 論

既存のエネルギー法のプログラムには多くの間違いがあったため、倒立が実現されている部分フィードバック線形化法のプログラムを参考にしてそれを改善し、mid position1におけるエネルギー法での振子の倒立を成功させることができた。また、 q_1 の値が発散しない限り（振子1が回ってしまわない限り）、おおよそでゲイン調整をするだけで倒立することが確認できた。

図4, 5において、回転角で q_1 が約 -90° 、 q_2 が約 180° となっているところ、かつ回転角速度が0に収束していくところから安定化制御に切り替わっているということがよく分かる。また、図3, 4はゲインが $k_P = 1.0$, $k_D = 1.0$, $k_E = 1.0$ の場合であるが、トルクの出力結果を見ると飽和してしまっている。しかし、図5では k_E を0.1小さく

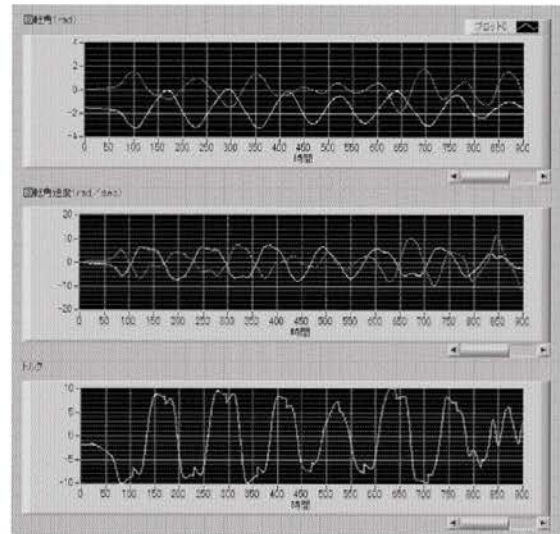


Fig. 3. 実験1 $k_P = 1.0$, $k_D = 1.0$, $k_E = 1.0$ (振り上げ制御のとき)

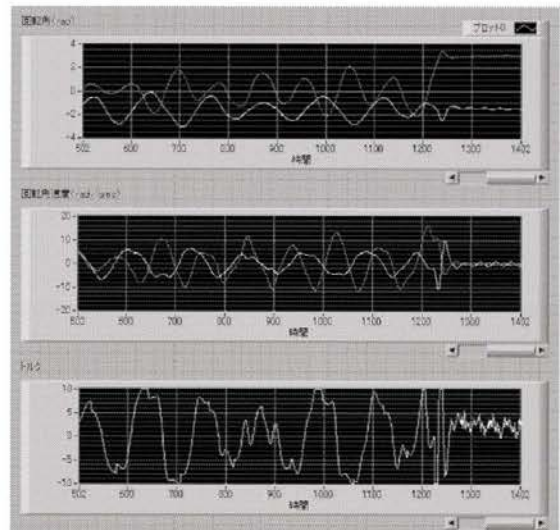


Fig. 4. 実験1 $k_P = 1.0$, $k_D = 1.0$, $k_E = 1.0$ (安定化制御へ切り替わったとき)

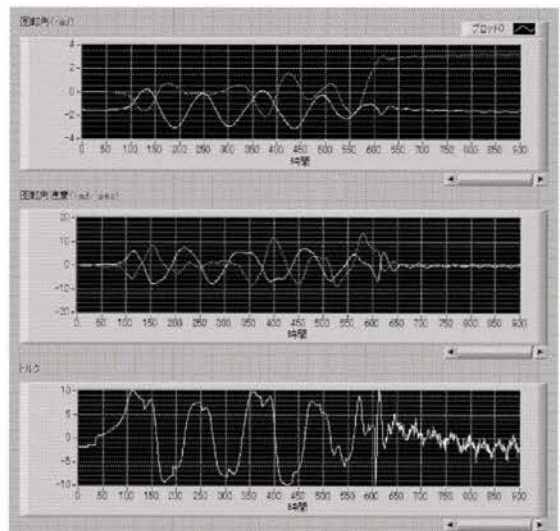


Fig. 5. 実験2 $k_P = 1.0$, $k_D = 1.0$, $k_E = 0.9$

ただけであるが、トルクはぎりぎり飽和していないことが分かる。

今回はそれぞれ 1 周辺のゲインでしか動作確認をしていないが、細かくゲイン調整を行えば、より小さなトルクかつ無駄の無い動作で倒立させることが可能であると考えられる。また、Balancing Control Gains とプログラム中の判定条件を変更すれば、エネルギー法による top position で倒立も可能であると思われる。なお、ゲイン調整の方法についてだが、過去の方法には従わずに、実際の振子の動きと LabVIEW による出力結果を見ながら調整するというのが、今のところは最良の方法だと思われる。

参考文献

- [1] Daniel J. Block and Mark W. Spong, "Mechanical Design and Control of the Pendubot", 1991
- [2] 谷中 大智:「エネルギー法による二重倒立振子の振り上げ制御」, 小山工業高等専門学校平成 20 年度卒業論文, 2010

[受理年月日 2010 年 9 月 30 日]