

# 古田の振り子の制御

笠原 雅人\*1, 加藤 盛仁\*2

## The Control of Furuta's Pendulum

Masato KASAHARA, Saiji KATO

The controlled object of this study is Furuta's pendulum. The torque is given at one place, and two angles of the pendulum are manipulated. It is proposed that the gain of LQI control of the pendulum is adjusted. It is controlled to be a purpose using proposed gain.

キーワード: 古田の振り子, 非線形システム, LQI 制御

Keywords: Furuta's pendulum, nonlineaer system, LQI control

### 1. はじめに

制御システムの設計の基本的な理解に非線形対象物である倒立振り子はよく利用される。倒立振り子の制御は主にロボット, 航空工学工学において基礎として必要な技術であり, 不安定システムの安定化は重要な課題となっている。

本研究では劣駆動システム (操作数以上の制御量を持つシステム) である倒立振り子 (古田の振り子) を制御対象とする。一箇所にトルクを与え, 振り子の 2 つの角度を操作し, エネルギー法を用いた振り上げ制御と, ゲインを用いて倒立させる安定化制御を目的とする。

### 2. 制御系力学

〈2・1〉 制御対象 本研究のプラントのモデル図を Fig.1 に示す。ここで  $m_p$  は振り子 2 の総質量,  $L_a, L_p$  は振り子 1, 2 の長さ,  $l_a, l_p$  は Link1, 2 からそれぞれの重心までの長さ,  $I_a, I_p$  は振り子 1, 2 の重心周りの慣性モーメント,  $\theta$  は水平に回転する振り子 1 の角度であり,  $\phi$  は振り子 2 の角度である。そして重力加速度を  $g$  とする。

このプラントにおいて, Fig.1 の Link1 にだけトルクを与え,  $\theta, \phi$  の 2 つの振り子の角度の操作をする。このシステムでは Fig.2 のブロック図のように, 条件によって制御方法を切り替え, 得られた入力をプラントに与える。

〈2・2〉 プラントの運動方程式の導出 実際に制御を行うために, プラントに対しての重要な運動方程式を導出する。

Fig.1 より, 振り子のエネルギーを考える。ここで  $T$  は運動エネルギー,  $V$  は位置エネルギー,  $S$  は消失エネルギー

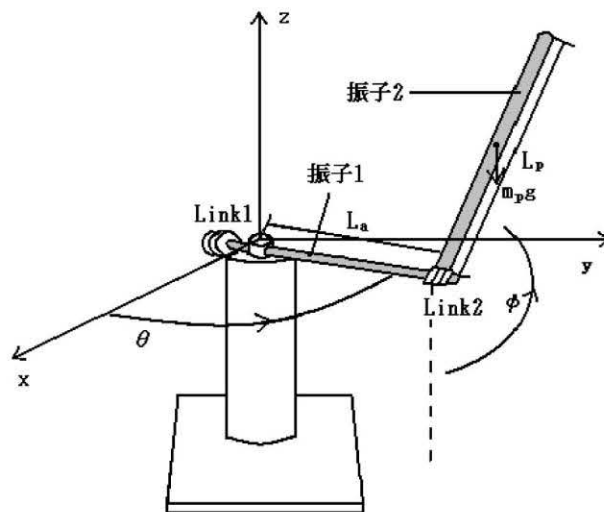


Fig. 1. 古田の振り子

であり, 添え字  $a$  は振り子 1,  $p$  は振り子 2 を示している。振り子 1 のエネルギーは

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{1}{2} I_a \dot{\theta}^2 \\ V_a &= 0 \dots\dots\dots (1) \\ S_a &= \frac{1}{2} C_a \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

また, 振り子 2 のエネルギーは

$$\begin{aligned} T_p &= T_{p,rotation} + T_{p,translation} \\ T_p &= \frac{1}{2} I_p \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) \dots\dots\dots (2) \\ V_p &= -m_p g h = -m_p g l_p \cos \phi \\ S_p &= \frac{1}{2} C_p \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

である。また,  $\dot{x}_p^2, \dot{y}_p^2, \dot{z}_p^2$  は次式で示す。

\*1 小山工業高等専門学校 電子制御工学科 (Dept. of Electronic Control Engineering), E-mail: kasahara@oyama-ct.ac.jp

\*2 小山工業高等専門学校 電子制御工学科 卒業生 (Dept. of Electric and Control Engineering)

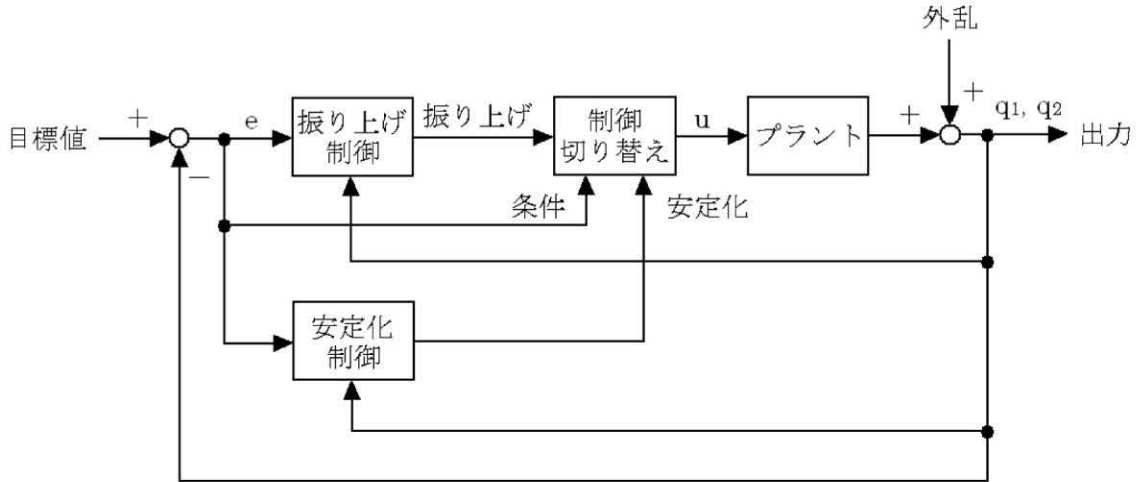


Fig. 2. システムのブロック線図

$$\begin{aligned}
 x_p &= L_a \cos \theta - l_p \sin \phi \sin \theta \\
 \dot{x}_p &= -L_a \dot{\theta} \sin \theta - l_p \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta \\
 &\quad - l_p \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \\
 y_p &= L_a \sin \theta + l_p \sin \phi \cos \theta \\
 \dot{y}_p &= L_a \dot{\theta} \cos \theta + l_p \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta \\
 &\quad - l_p \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta \\
 z_p &= -l_p \cos \phi \\
 \dot{z}_p &= l_p \dot{\phi} \sin \phi
 \end{aligned} \tag{3}$$

したがって、振子 2 の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned}
 T_p &= \frac{1}{2} I_p \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_p (L_a^2 \dot{\theta}^2 + l_p^2 \dot{\phi}^2 \\
 &\quad + l_p^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + 2L_a l_p \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi)
 \end{aligned} \tag{4}$$

となる。これより、エネルギーの総和は

$$\begin{aligned}
 T &= T_a + T_p \\
 &= \frac{1}{2} I_a \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_p (L_a^2 \dot{\theta}^2 \\
 &\quad + l_p^2 \dot{\phi}^2 + l_p^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + 2L_a l_p \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi) \\
 V &= V_a + V_p \tag{5} \\
 &= -m_p g l_p \cos \phi \\
 S &= S_a + S_p \\
 &= \frac{1}{2} C_a \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C_p \dot{\phi}^2
 \end{aligned}$$

となる。ここで、ラグランジュの方程式を用いて運動方程式を導くため、振子 1 と振子 2 についての導関数を求める。

振子 1 についての導関数は次のようになる。Q は本体の仕事の力 (トルク) である。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= I_a \dot{\theta} + m_p L_a^2 \dot{\theta} \\
 &\quad + m_p l_p^2 \dot{\theta} \sin^2 \phi + m_p L_a l_p \dot{\phi} \cos \phi \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= I_a \ddot{\theta} + m_p L_a^2 \ddot{\theta} + m_p l_p^2 \ddot{\theta} \sin^2 \phi \\
 &\quad + 2m_p l_p^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \\
 &\quad + m_p L_a l_p \ddot{\phi} \cos \phi - m_p L_a l_p \dot{\phi}^2 \sin \phi \\
 \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 \\
 \frac{\partial S}{\partial \dot{\theta}} &= C_a \dot{\theta} \\
 Q_\theta &= \tau
 \end{aligned} \tag{6}$$

振子 2 についての導関数は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \phi} &= m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi - m_p L_a l_p \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= I_p \dot{\phi} + m_p l_p^2 \dot{\phi} + m_p L_a l_p \dot{\theta} \cos \phi \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= I_p \ddot{\phi} + m_p l_p^2 \ddot{\phi} \\
 &\quad + m_p L_a l_p \ddot{\theta} \cos \phi - m_p L_a l_p \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \\
 \frac{\partial V}{\partial \phi} &= m_p g l_p \sin \phi \\
 \frac{\partial S}{\partial \dot{\phi}} &= C_p \dot{\phi} \\
 Q_\phi &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

となる。これより、以下に示すラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{A}} - \frac{\partial T}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial S}{\partial \dot{A}} = Q_A \tag{8}$$

により、振子 1, 振子 2 の運動方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 &I_a \ddot{\theta} + m_p L_a^2 \ddot{\theta} + m_p l_p^2 \ddot{\theta} \sin^2 \phi \\
 &+ 2m_p l_p^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \\
 &+ m_p L_a l_p \ddot{\phi} \cos \phi - m_p L_a l_p \dot{\phi}^2 \sin \phi + C_a \dot{\theta} = \tau
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 &\theta = 0, \phi = 0 \\
 &\theta = 0, \phi = \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &I_p \ddot{\phi} + m_p l_p^2 \ddot{\phi} + m_p L_a l_p \ddot{\theta} \cos \phi \\
 &- m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi + m_p g l_p \sin \phi + C_p \dot{\phi} = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

となる。また今回の研究では摩擦を考慮しないため、 $C_a \dot{\theta} = 0$ 、 $C_p \dot{\phi} = 0$ とする。またプラントの運動方程式はニュートンの第二法則に従い、さらに行列表現を用いて

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \dots \dots \dots \tag{11}$$

と書き表すことができ、

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

として、簡略化のために以下の5つのパラメータを用いる。

$$\begin{cases} P_1 = I_a + m_p L_a^2 \\ P_2 = m_p l_p^2 \\ P_3 = m_p L_a l_p \\ P_4 = m_p l_p \\ P_5 = I_p \end{cases} \dots \dots \dots \tag{13}$$

このパラメータを用いることで、 $D(q)$ 、 $C(q, \dot{q})$ 、 $g(q)$ はそれぞれ次のように書ける。

$$D(q) = \begin{bmatrix} P_1 + P_2 \sin^2 \phi & P_3 \cos \phi \\ P_3 \cos \phi & P_2 + P_5 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} P_2 \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi & P_2 \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi \\ & -P_3 \dot{\phi} \sin \phi \\ -P_2 \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ P_4 g \sin \phi \end{bmatrix} \tag{16}$$

**〈2・3〉 平衡点** 平衡点とは振子に外から力を加えない限り、その点に留まることのできる点のことである。平衡点には不安定な平衡点と安定な平衡点がある。不安定な平衡点とは外から力を加えると、そのままでは元の位置に戻るることのできない点のことであり、安定な平衡点とは逆に元の点に戻る点のことである。ここで、モータを動かさず振子が動いていない状態とすれば、運動方程式は以下のように重力項のみとなる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ P_4 g \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \tag{17}$$

また、平衡点の定義より振子に力が加わっていないとするならば、 $\tau = 0$ となり、このシステムにおける平衡点が以下のように得られる。

上式において、上記の平衡点は安定な平衡点であり、下記の平衡点は不安定な平衡点である。本研究では、この下記の不安定な平衡点での倒立を目標とする。

### 3. 安定化制御

**〈3・1〉 システムの線形化** 安定化制御のために、Pendubot の非線形な運動方程式

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} &= D(q)^{-1} \tau \\
 &- D(q)^{-1} C(q, \dot{q}) \dot{q} - D(q)^{-1} g(q)
 \end{aligned} \dots \tag{18}$$

から

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_3 = \phi, \quad x_4 = \dot{\phi}, \\
 \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{\theta}, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \ddot{\phi}, \dots \dots \tag{19} \\
 d &= P_1 P_2 + P_1 P_5 + P_2^2 \sin^2 \phi \\
 &+ P_2 P_5 \sin^2 \phi - P_3^2 \cos^2 \phi
 \end{aligned}$$

として得られる非線形な状態方程式を線形化する。

システムを線形化するために、以下のようなテイラー級数を用いる。

$$\begin{aligned}
 f_a(x, u) &= f_a(x_r, u_r) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_r, u_r} (x - x_r) \\
 &+ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_r, u_r} (u - u_r)
 \end{aligned} \tag{20}$$

このとき、 $x$ は運動方程式によって与えられる状態ベクトル、 $u$ はPendubotの制御入力である。平衡点近傍でシステムは線形であると仮定し、これにより線形化された状態方程式を求めれば、

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + bu \\
 &= \frac{\partial f_a(x_r, u_r)}{\partial x_r} x + \frac{\partial f_a(x_r, u_r)}{\partial u_r} u \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} u \tag{21}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、不変パラメータと平衡点における値から各要素を計算すると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{0}{d} = 0 \\
 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= \frac{P_3 P_4 g}{d} = 78.82 \\
 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= \frac{0}{d} = 0 \\
 \frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= \frac{P_1 P_4 g}{d} = 93.20
 \end{aligned}$$

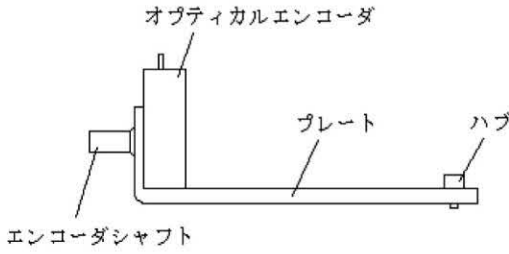


Fig. 3. 振子1

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{P_2 + P_5}{d} = 45.25$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u} = \frac{P_3}{d} = 20.95396$$

のように与えられる。ただし、不変パラメータについては次節に示す。

この結果から

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 78.82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 93.20 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 45.25 \\ 0 \\ 20.95 \end{bmatrix} u \dots\dots (22)$$

が得られる。

〈3・2〉 最適レギュレータ問題 次の評価関数

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{x}(i)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + R u(i)^2] \dots\dots\dots (23)$$

が最小にするようにリカッチ方程式を解き、そこから最適な制御入力  $u = -\mathbf{K} \mathbf{x}$  を得るために、求めた  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  と最適レギュレータの重み  $\mathbf{Q}$ ,  $R$ , そしてサンプリング周期を  $T (= 0.005[\text{s}])$  として、安定化のためのフィードバックゲインを求めた。今回、MATLAB の lqrd コマンドよりその計算を行った。

ここで重み  $\mathbf{Q}$  の各要素は以下のような影響を及ぼす。

- $q_{11}$  は振子1の目標値(角度)追従性に影響する。
- $q_{22}$  は振子1の安定化への切り替わりや外乱に影響する。
- $q_{33}$  は振子2の平衡点への追従性に影響する。
- $q_{44}$  は振子2の飽和や外乱に影響する。

古田の振子では、振子1は目標値を、振子2は角速度を重要視しなければいけないと言うのがわかった。これらをふまえて最適なフィードバックゲインを以下に示す。

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(50 \ 10 \ 10 \ 50), R = 1$$

$$\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$$

$$= [-4.381 \ -3.272 \ 100.4 \ 13.81]$$

4. 慣性モーメント

古田の振子において、Fig.3に示される部品に関して、各部品の質量、大きさの測定を行った。ハブ  $m_{hub}$ , エンコーダシャフト  $m_{enc}$ , オプティカルエンコーダ  $m_{opt}$ , プレート  $m_{pla}$ , モータロータ  $m_{mot}$  の質量 [kg] を次のように与えられる。

$$m_{hub} = 6.50 \times 10^{-3}$$

$$m_{enc} = 4.0 \times 10^{-3}$$

$$m_{opt} = 16.2 \times 10^{-3}$$

$$m_{pla} = 9.50 \times 10^{-3}$$

$$m_{mot} = 1.09 \times 10^{-2}$$

次に各部品の慣性モーメント [kg m<sup>2</sup>] を次のように求めた。

$$I_{hub} = \frac{m_{hub}}{8} \times (0.011^2 - 0.003^2) = 9.10 \times 10^{-8}$$

$$I_{enc} = \frac{m_{enc}}{8} \times 0.00635^2 = 2.01 \times 10^{-8}$$

$$I_{opt} = \frac{m_{opt}}{8} \times 0.03^2 = 1.82 \times 10^{-6}$$

$$I_{pla} = \frac{m_{pla}}{12} \times (0.074^2 + 0.0185^2) = 4.60 \times 10^{-6}$$

これより振子1の全質量 [kg] は

$$m_a = m_{hub} + m_{opt} + m_{pla} + m_{mot}$$

$$= 4.32 \times 10^{-2}$$

振子1の回転中心から質量中心までの長さ [m] は

$$l_a = \frac{m_{pla} \times 0.037 + m_{opt} \times 0.061}{m_a}$$

$$= 3.10 \times 10^{-2}$$

以上より、振子1の質量中心周りの全慣性モーメント [kg m<sup>2</sup>] は

$$I_a = I_{hub} + (m_{hub} \times l_1^2) + I_{opt}$$

$$+ (m_{opt} \times (0.061 - l_1)^2) + I_{pla}$$

$$+ (m_{pla} \times (l_1 - 0.033)^2)$$

$$= 1.10 \times 10^{-5}$$

となる。ここで、振子2の全質量 [kg] と全慣性モーメント [kg m<sup>2</sup>] は

$$m_p = 2.37 \times 10^{-2}$$

$$I_p = 1.76 \times 10^{-4}$$

であり、振子1, 振子2の長さ [m] は

$$L_a = 8.0 \times 10^{-2}$$

$$L_p = 20.0 \times 10^{-2}$$

なので、 $P_1 \sim P_5$  のパラメータは以下のようになる。

$$\begin{cases} P_1 = 0.03631 \\ P_2 = 0.03065 \\ P_3 = 0.03070 \\ P_4 = 0.3838 \\ P_5 = 0.03567 \end{cases}$$

また、 $d$  は  $\theta = 0, \phi = \pi$  なので、

$$d = P_1 P_2 + P_1 P_5 + P_2^2 \sin^2 \phi$$

$$+ P_2 P_5 \sin^2 \phi - P_3^2 \cos^2 \phi$$

$$= P_1 P_2 + P_1 P_5 - P_3^2$$

$$= 0.001465$$

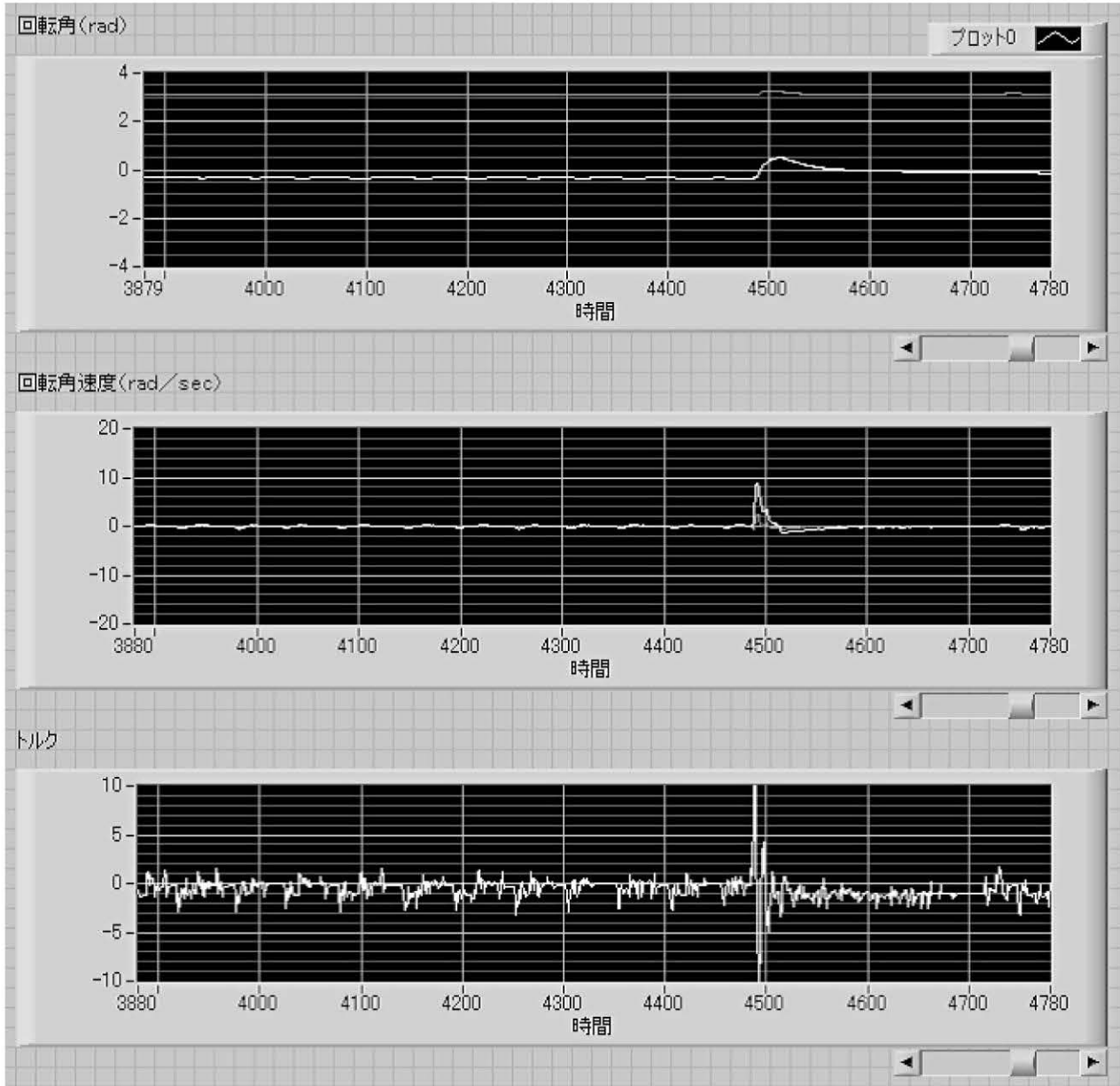


Fig. 4. 倒立状態

と求まる．その他の部品については，文献 [2] に従う．

## 5. 実験結果

Fig.4 に LabVIEW による出力結果を示す．今回は，安定化制御により振子が倒立しているときの出力結果である．上段の波形チャートは回転角，中段は回転角速度，下段はトルクを表している．上段の波形の下は振子 1 の波形で角度 0，上の波形は振子 2 の波形で，角度  $\pi$  で安定している．回転角速度は振子 1 と振子 2 の角速度がどちらもほぼ 0 になっている．トルクは最小限のエネルギーしかかけていない．これらのことがこの波形チャートからわかり，倒立していると確認できる．また途中で波形が乱れているが，これは外乱を加えたときの応答である．外乱を加えた後も波形が元に戻っているところに注目してほしい．

## 6. 結論

今回，Pendubot の形を古田の振子に変形し実験を行った．古田の振子に対して，運動方程式・平衡点・トルク・フィードバックゲインの解析し，必要なパラメータを求めている．実際の古田の振子に適用し，平衡点での倒立を成功させることができた．外乱を加えても平衡点へ追従することを確認することができた．今後は振り上げ制御を加えた振子の制御を行うことを考えている．振り上げ制御に関しては，システムの解析，トルク計算を行っているが実際のシステムに対しての確認が行えていない．振り上げ，安定化の切り替えにおいて条件の確認とゲインを調整する必要がある．また，現在，振子の状態変数に対しては測定値による近似を行っているため，観測器の用いることでより

適切な状態を推定する必要があると考えている。なお、安定化ゲインの微調整については、実際の振子の動きと出力結果を確認しながら調整するというのが、最良の方法と思われる。

## 7. 参考文献

- [1] Mike Bax, "Implementation of a novel controller tuning algorithm on a Furuta pendulum, using time varying linear identification", 2007
- [2] 岸 弦矢:「二重倒立振子の制御」, 小山工業高等専門学校平成 17 年度卒業論文, 2006
- [3] 中村 紘之:「エネルギー法を用いた二重倒立振子の制御」, 小山工業高等専門学校平成 18 年度卒業論文, 2007
- [4] 谷中 大智:「エネルギー法による二重倒立振子の振り上げ制御」, 小山工業高等専門学校平成 21 年度卒業論文, 2010

【受理年月日 2011年 9月30日】