小山工業高等専門学校研究紀要
第 48 号(2015)　　7－ 16

有限変形弾塑性スペクトル確率有限要素法の定式化とそれに関連する分岐解析について

中川　英則[*1]

Formularization of Finite Deformation Spectral Stochastic Finite Element Method and the Related Bifurcation Analysis

Hidenori NAKAGAWA

This paper presents a framework for the construction of finite deformation Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) which is the expansion of the former research carried out in a range of small deformation theory. In addition, we report on the results of benchmark tests to check the effectiveness of the code made in a framework of ordinary nonlinear FEM as preparations before considering the stochastic phenomena. Furthermore, we carried out the two and three dimensional elasto-plastic bifurcation analysis conducting branch-switching procedures that are required as a fundamental research to construct finite deformation SSFEM.

KEYWORDS：Spectral Stochastic FEM, finite deformation theory, elasto-plastic bifurcation

1. はじめに

スペクトル確率有限要素法[1)]は，構造・形状や材料特性が正確に分からない物体に対し，そのパラメータの不確からしさを確率として表現した確率モデルを効率よく解くための手法である．パラメータの値を変えながら何度も計算を必要とするモンテカルロ法に対し，１回の計算で目的対象の確率密度関数を得ることができる．その手法を，準静的状態と微小変形の仮定の範囲で，弾塑性体の解析に用いることができるように開発したものが非線形スペクトル確率有限要素法[2),3)]である．

本紙面では，それに続くものとして準静的状態ではあるが，有限変形理論にまで拡張する場合の定式化について検討する．本論文の構成は以下のようである．２章において，確率を導入する前段階として，既往の研究[4),5),6)]を参考に有限変形弾塑性有限要素法の解析コードの作成とそれに基づく分岐解析の結果について述べる．これは，非線形スペクトル確率有限要素法を有限変形の枠組みで考え，そのプログラムを作成する際の下地となるものである． 特に，幾何学的非線形性に大きく関わる分岐解の存在は，有限変形の範囲にまで理論を拡張した際に再現できなくてはならない現象であり，確率を導入していない通常の有限要素法で分岐解析[7)]に基づきそれを再現しておくことは必要不可欠な準備といえる．続いて３章において，

*1 一般科(Dept. of General Education)，E-mail：nakagawa@oyama-ct.ac.jp

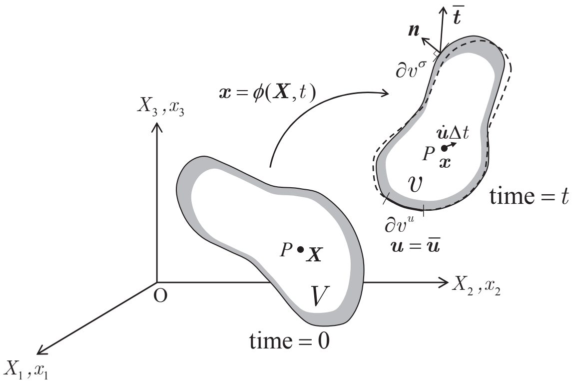

図１　基準配置Vと現在配置v

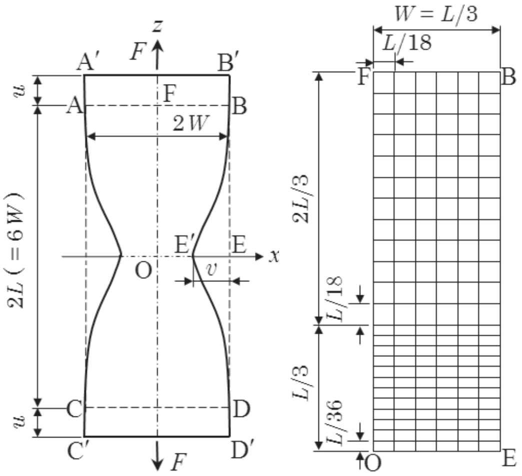

図２　ベンチマークモデル[10]

確率境界値問題を設定し，有限変形理論にまで拡張する．その際に，2 つの仮定を導入する．その仮定は，非線形スペクトル確率有限要素法で導入された仮定[2),3)]の自然な拡張となるものであるが，その正当性を数学的に示すことは複雑過ぎるため，数値解析を通してそのことを示す他はない．それを踏まえて，今後の課題として４章にまとめた．

２．塑性不安定現象とその解析

２．１　境界値問題の設定

図１に示すように，連続体が時刻$t=0$において占める体積を基準配置V，時刻tにおいて占める体積を現在配置vで表す．また，基準配置Vにおいて位置$\boldsymbol{X}\in V$にあった物質点が運動し空間位置$\boldsymbol{x}\in v$となる関係を次の関数で表すことにする．

$$\boldsymbol{x}=\phi(\boldsymbol{X},t)\quad(\boldsymbol{X}\in V\,,\,0\leqq t<\infty)$$

ここで，関数ϕは連続微分可能であって，また$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{x}$の対応については $\det[\nabla_X\phi]>0$ とする．

現在配置vにおいて静的可容応力場${}^t\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$が満たす式を次に示す[8)]．ここに，${}^t\boldsymbol{\sigma}$はCauchy応力であり，左肩記号は現時刻を表し，左下記号がない場合には，現時刻と参照時刻が同じであることを意味する[4), 9)]．

$$\left.\begin{array}{ll}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{div}\,{}^t\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0}\\ {}^t\boldsymbol{\sigma}={}^t\boldsymbol{\sigma}^T\end{array}\right. & (v\text{内部において})\\ {}^t\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}=\bar{\boldsymbol{t}} & (\text{応力境界 }\partial v^\sigma\text{ において})\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

２．２　有限要素定式化

上記の静的可容応力場$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$のつり合い式に，一階までの導関数が$p(\geqq 2)$乗 Lebesgue 可積分である任意の変位関数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$を乗じ領域$v$での積分をとることで次の弱形式を得る[11),12)]．但し，変位境界∂v^uにおいて$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\bar{\boldsymbol{u}}\ \ (\boldsymbol{x}\in\partial v^u)$を満たすものとする．

$$\int_v(\mathrm{div}\,{}^t\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{u}\,dv=0$$

$$\to W(\boldsymbol{u})=\int_v{}^t\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}\,dv-{}^tR=0\quad\cdots\cdots(2)$$

ここに，

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)+\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^T\right\}$$

$${}^tR=\int_{\partial v^\sigma}\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{u}\,ds+\int_{\partial v^u}\boldsymbol{t}\cdot\bar{\boldsymbol{u}}\,ds+\int_v\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}\,dv$$

である．

ここで，時刻t毎に汎関数$W(\boldsymbol{u})$は変位関数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$が含まれるSobolev空間上の強圧的連続双一次形式となっている[11), 12)]．そのため，第一変分$\delta W(\boldsymbol{u})=0$を満たす解$\boldsymbol{u}^{exact}(\boldsymbol{x})$を求めればよい．第一変分はGaussの発散定理を用いて次となる．

$$\delta W(\boldsymbol{u})=\int_v{}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv-\delta\,{}^tR\quad\cdots\cdots(3)$$

$$(\text{但し，}\ \delta\,{}^tR=\int_{\partial v^\sigma}\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,ds+\int_v\rho\boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dv)$$

ここで，$\delta W(\boldsymbol{u})=0$は$\boldsymbol{u}$について非線形となるため，通常は Newton-Raphson 法などの反復解法を用いる．以下，添え字のkは反復回数を表す．

$$\delta W(\boldsymbol{u}_k)+D\delta W(\boldsymbol{u}_k)[\boldsymbol{u}]=0$$

$$\to\ D\delta W(\boldsymbol{u}_k)[\boldsymbol{u}]=-\delta W(\boldsymbol{u}_k)\quad\cdots\cdots(4)$$

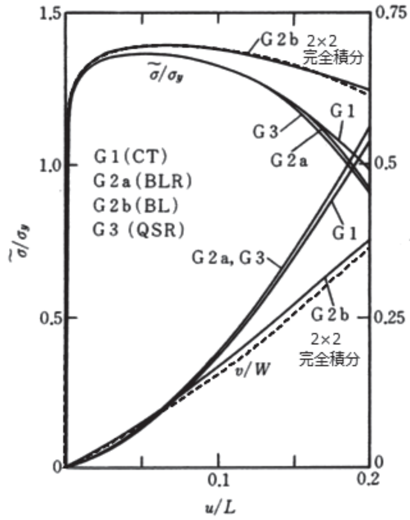

図３　ベンチマークテスト[10]と解析結果（破線）との比較（公称応力 $\tilde{\sigma}/\sigma_y$ とくびれ v/W）

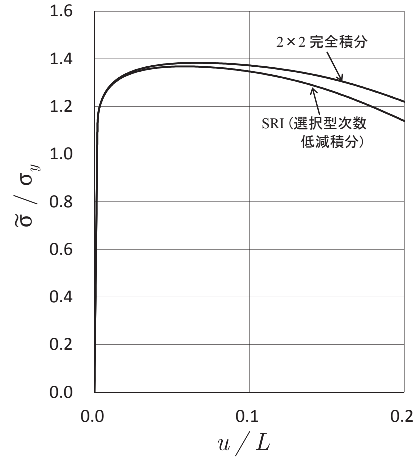

図４　2×2 完全積分(BL)と選択型次数低減積分(SRI)を用いた解析結果の比較

ここで，Gateaux 微分 $D\delta W(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{u}]$ を計算することは煩雑なので, 通常は次の方法を用いる[9), 13)].

$$\frac{d\delta W(\boldsymbol{u})}{dt}=\frac{d\delta W(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}} \quad \cdots\cdots (5)$$

すなわち，t で微分して $\dot{\boldsymbol{u}}$ についてまとめることで $\boldsymbol{u}$ 方向への微分を得ることにする．式(4) は

$$\left.\begin{aligned} D\delta W(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{u}]&=\frac{d\delta W(\boldsymbol{u})}{dt}\Delta t\\ &=\left(\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv\right)^{\bullet}\Delta t-(\delta\,{}^tR)^{\bullet}\Delta t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (6)$$

となる．ここに，$(\ )^{\bullet}$ はラベル $\boldsymbol{X}$ を固定して t についての導関数(物質時間導関数)を表す[8), 9)]．ここで，$(\delta\,{}^tR)^{\bullet}\Delta t$ は $\delta\boldsymbol{u}$ の変化が関係してくるため厳密にはゼロではない[14)] が, ここでは外力項としての全体の変化は小さいものとして考慮しないことにする．

したがって，式(4) は次のようにまとまる．

$$\left(\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv\right)^{\bullet}\Delta t=\delta\,{}^tR-\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv \quad \cdots\cdots (7)$$

以下，式(7) の左辺の展開にあてる．しかしながら，現配置 $\boldsymbol{x}=\phi(\boldsymbol{X},t)$ について物質時間微分をとることは煩雑なため，共役な仕事を成すように変形前の基準配置に pull-back[8), 14)] し，そこで $\boldsymbol{X}$ を固定して t について微分をとる[13), 14)]．

$$\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv=\int_V {}^t_0\boldsymbol{S}:\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}\,dV \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに $\boldsymbol{S}$ は第 2 Piola-Kirchhoff 応力，$\boldsymbol{E}$ は Green-Lagrange ひずみをそれぞれ表し，左肩記号は現時刻，左下記号は参照時刻をそれぞれ表すものとする[4), 9)]．変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$，および体積変化率 $J=\det\boldsymbol{F}$ を用いて，第２Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}$ は以下のように定義される．

$${}^t\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{J}\boldsymbol{F}\cdot{}^t_0\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}^T \quad \cdots\cdots (9)$$

また，$\boldsymbol{S}$ と共役なひずみである Green-Lagrange ひずみ $\boldsymbol{E}$ およびその変分 $\delta\boldsymbol{E}$ は以下のように定義される．

$${}^t_0\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)+\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T+\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)\right\}$$

$$\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}=\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}_L+\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}_{NL}$$

$$\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}_L=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)+\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T\right\}$$

$$\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}_{NL}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)+\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)\right\}$$

ここで $\int_V {}^t_0\boldsymbol{S}:\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}\,dV$ の時間微分をとると，

$$\left.\begin{aligned} &\int_V {}^t_0\dot{\boldsymbol{S}}:\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}+{}^t_0\boldsymbol{S}:(\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E})^{\bullet}\,dV\\ &=\int_V {}^t_0\dot{\boldsymbol{S}}:\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}+{}^t_0\boldsymbol{S}:(\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}_{NL})^{\bullet}\,dV \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$(\delta\,{}^t_0\boldsymbol{E}_{NL})^{\bullet}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)+\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)\right\}$$

updated Lagrange 形式とするため，これをさらに現

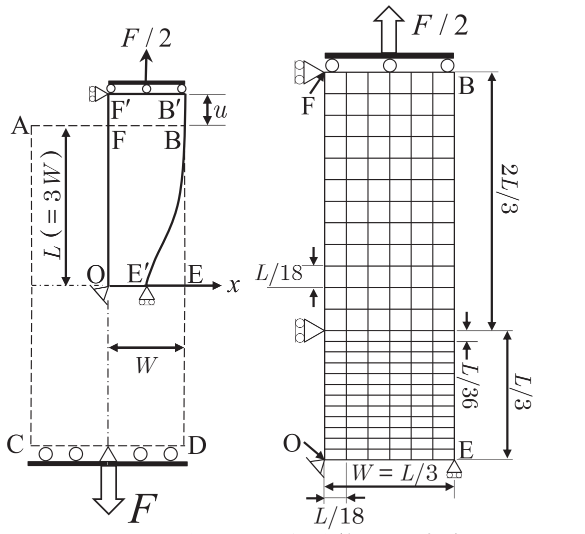

図５　２次元（平面ひずみ）塑性不安定解析に用いたモデル

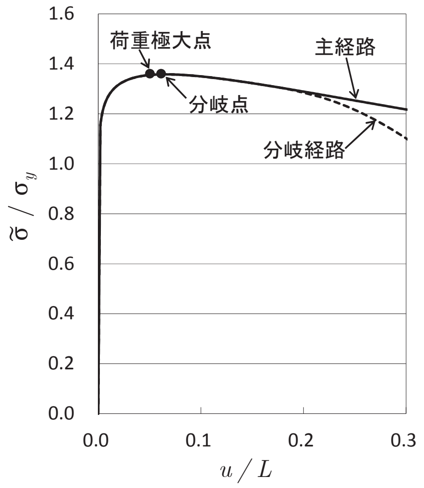

図６　平面ひずみ状態のつり合い経路

在配置vにpush-forwardする[8),13),14)]．現配置vを基準配置とする第２Piola-Kirchhoff応力${}_t^t\boldsymbol{S}$の速度であるTruesdellの応力速度${}_t^t\dot{\boldsymbol{S}}$と${}_0^t\dot{\boldsymbol{S}}$の間に次の関係が成り立つ[9),14)]．

$$ {}_0^t\dot{\boldsymbol{S}} = J\boldsymbol{F}^{-1}\cdot{}_t^t\dot{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{F}^{-T} \quad \cdots\cdots(11)$$

この関係を用いると，式(7)の左辺は現在配置vについての次式となる．

$$\left(\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv\right)^{\bullet} = \int_v {}_t^t\dot{\boldsymbol{S}}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv + \int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\frac{1}{2}(\,\delta\boldsymbol{F}_t^T\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T\cdot\delta\boldsymbol{F}_t\,)\,dv$$

ここに，

$$\frac{1}{2}(\,\delta\boldsymbol{F}_t^T\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T\cdot\delta\boldsymbol{F}_t\,) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)+\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\right\}$$

以上より，式(7)は次のようになる．

$$\left\{\int_v {}_t^t\dot{\boldsymbol{S}}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv+\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\frac{1}{2}(\,\delta\boldsymbol{F}_t^T\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T\cdot\delta\boldsymbol{F}_t\,)\,dv\right\}\Delta t = \delta\,{}^tR-\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv \quad \cdots\cdots(12)$$

上記をupdated Lagrange法における接線剛性方程式という[4),5),6),9)]．

２．３　弾塑性構成則

文献[4),5)]に従い弾塑性構成則としては，J_2流れ則を採用した．客観応力速度は，相対Kirchhoff応力のJaumann速度${}_t^t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(J)}$を用いる．これにより，対称な接線剛性マトリクスを得ることができる[9)]からである． $\boldsymbol{D}$はひずみ速度(ストレッチングテンソル)を表すものとすると，J_2流れ則は以下のように示される．

$$ {}_t^t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(J)} = {}_t^t\boldsymbol{C}^{ep}:\boldsymbol{D} \quad \cdots\cdots(13)$$

${}_t^t\boldsymbol{C}^{ep}$を指標表記すると次のよう．

$$\left.\begin{aligned} {}_t^tC^{ep}_{ijkl} &= G\left[\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right] \\ &\quad -\frac{3G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{{}^t\bar{\sigma}^2(\mathrm{H}'/3\mathrm{G}+1)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\bar{\sigma} = \mathrm{H}(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_y\left(1+\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_y}\right)^n,\quad \sigma_y = E\,e_y$$

ここに，Eはヤング率，νはポアソン比をそれぞれ表すとして，$G=E/\{2(1+\nu)\}$である．また，$\bar{\sigma}$は相当応力，$\boldsymbol{\sigma}'$は偏差応力，$\bar{\varepsilon}^p$は相当塑性ひずみ，σ_yは降伏応力をそれぞれ表している．

ここで，updated Lagrange 形式の式(12)ではTruesdellの応力速度${}_t^t\dot{\boldsymbol{S}}$を用いているため，以下のように相対Kirchhoff応力のJaumann速度${}_t^t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(J)}$からの変換を行う[4),5),6),9)]．

$$ {}_t^t\dot{\boldsymbol{S}} = {}_t^t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(J)}-\boldsymbol{D}\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}-{}^t\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D} \quad \cdots\cdots(15)$$

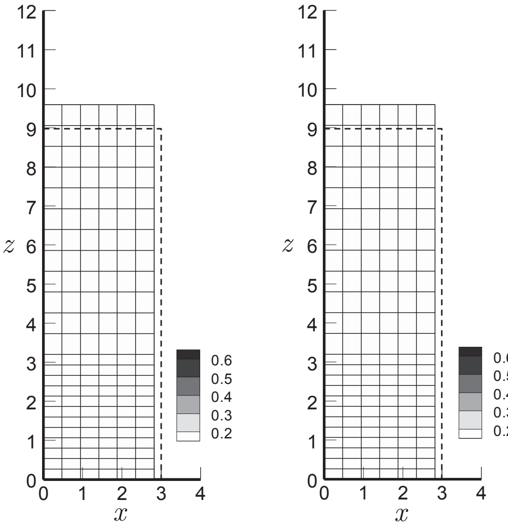

図 7　**図 6** の分岐点における塑性ひずみ分布(左：主経路，右：分岐経路)

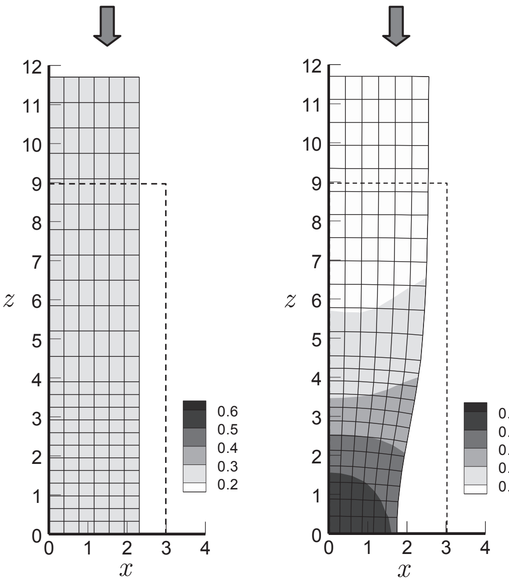

図 8　**図 6** の u/L =0.3 時点における塑性ひずみ分布(左：主経路，右：分岐経路)

これに従い updated Lagrange 法における接線剛性方程式(12) は最終的に次のようになる[4), 5), 6), 9)].

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\displaystyle\int_v ({}^t_t\boldsymbol{C}^{ep}:\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}-{}^t\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D}):\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv\right.\\ \left.+\displaystyle\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\frac{1}{2}(\delta\boldsymbol{F}_t^T\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T\cdot\delta\boldsymbol{F}_t)\,dv\right\}\Delta t\\ =\delta^tR-\displaystyle\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv\end{array}\right\}\cdots\cdots(16)$$

2．4　ベンチマークテストとの比較

2．2節，2．3節の定式化に基づき作成した有限要素解析コードの精度検証を行うため，平面ひずみ引張りに関するベンチマークテスト[10)]との比較を行った．用いた解析モデルと要素分割を**図 2** に示す．本解析で用いた条件は，ベンチマークに用いられた条件と完全には一致していない．ベンチマーク[10)]では端面AB,CDに一様な変位増分を与えているが，本解析では端面AB,CDに一様な引張り分布荷重を増分として与えている．これは，次節に記す分岐解析を行うに当たり，参照した文献[4), 5), 6)]の境界条件に従ったためである．その他の条件は全て同じである．その条件を以下に記す．

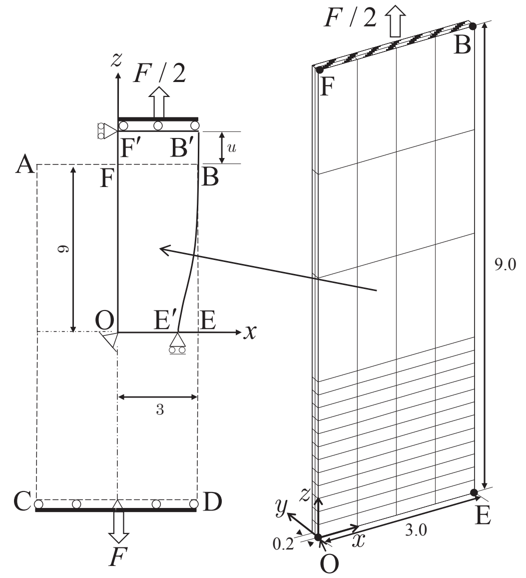

図 9　3 次元塑性不安定解析に用いたモデル

(Prandtl-Reuss の関連流れ則)

von Mises の降伏関数：$F=\dfrac{1}{3}\left[\,\bar{\sigma}^2-\mathrm{H}(\bar{\varepsilon}^p)^2\,\right]$

$$\begin{cases}\sigma=E\varepsilon & (\sigma\leqq\sigma_y)\\ \sigma=\mathrm{H}(\bar{\varepsilon}^p)=\sigma_y\left(1+\dfrac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_y}\right)^n & (\sigma\geqq\sigma_y)\end{cases}$$

$E=200$ Gpa ，$\varepsilon_y=\sigma_y/E=1/500$

$n=0.0625$ ，$\nu=0.333$

また境界条件について注意すべき点は，ベンチマーク[10)]では端面AB,CDは完全固着としている点である．後述2．5節の分岐解析においても**図 2** と同じ要素分割を用いるが，ベンチマークのモデルと異なる点は，境界条件として端面AB,CDが完全固着となっていないことである．

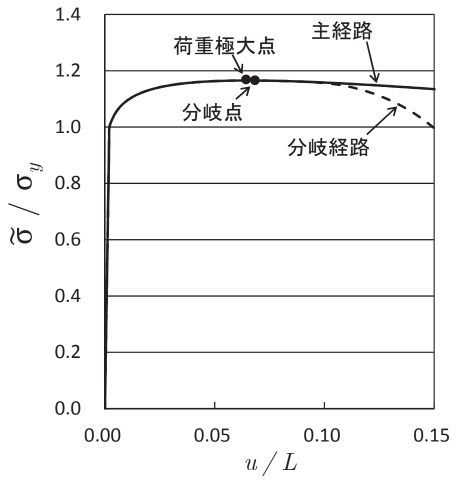

図 10　3 次元塑性不安定解析のつり合い経路

文献[10]に示されている「公称応力$\tilde{\sigma}/\sigma_y$と伸びu/L」および「くびれ率v/Wと伸びu/L」のベンチマーク結果に今回の解析結果を破線で加え合わせたものが**図 3** である．文献[10]によると，**図 3** は同一プログラムおよび**図 2** の要素分割のもとで，使用する要素のみを変更した場合の比較である．**図 3** において，BL は低減積分を一切施さない 4 節点要素による 2×2 完全積分，CT は三角形要素による積分，BLR は 1×1 の積分点による低減積分，QSR は 8 節点アイソパラメトリック要素による積分をそれぞれ表している．今回の解析では，2×2完全積分およびb-bar法による選択的次数低減積分(SRI)[15] を行ったため，そのうちの 2×2 完全積分によるものを破線で**図 3** に追加している．BL と比較した結果，$\tilde{\sigma}/\sigma_y$について相対誤差は最大で 1.8%であり，「$\tilde{\sigma}/\sigma_y$とu/L」に関しては精度よく一致する．しかし，くびれ率v/Wについて相対誤差は最大で 4.0%となり，若干固めの解析結果となった．また，完全積分および選択的次数低減積分(SRI)による解析結果の比較が**図 4** である．SRI を用いることにより，完全積分よりは柔らかい結果となったが，**図 3** に載っている G1,G2a,G3 までとはいかなかった．G2a のように，1×1 の積分点による低減積分を行えばさらに柔らかい結果となることが予想されるが，それ以上の解析は行わなかった．

2．5　分岐解析

本研究では，初期不正の導入により分岐経路での挙動を疑似評価する解析ではなく，完全系での分岐解析を行う．したがって，基本経路上で分岐

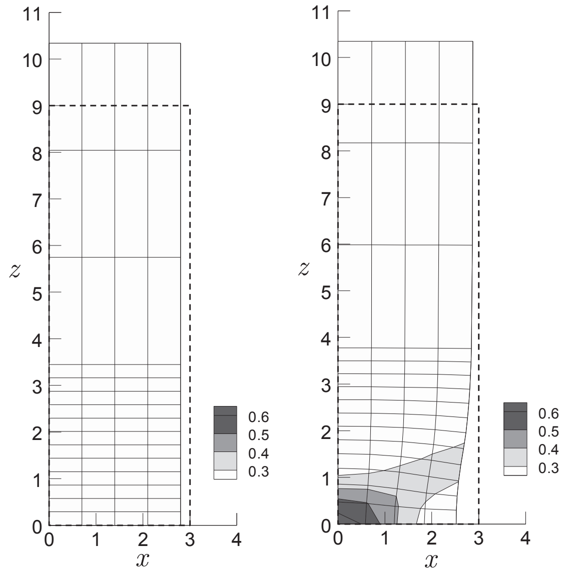

図 11　図 10 上の u/L=0.15 時点での塑性ひずみ分布(左：主経路，右：分岐経路)

点の位置を求め，分岐経路方向への切替え操作[7]を行うことで分岐モードを求めることになる．また**2．4**節では言及しなかったが，荷重極大点およびそれ以降の不安定解析を行うために，本解析では反復計算ごとに超平面を更新する弧長制御法[9]を用いている．文献[4, 5, 6]によると，分岐時における降伏状態から除荷の可能性を排除することで，Hill の線形比較体[16]を用いた場合と全く同様に，接線剛性マトリクスの特異性条件の判定だけで分岐点の位置を求めることができることが示されている．そこで，本研究でもこの方法を用いた．また，分岐経路への切替え操作については，固有値解析を併用することなく，接線剛性マトリクスの LDL^T 分解により負の固有値をもつ点(荷重極大点は除く)を調べ[17]，変位修正ベクトルの適当なスケーリングにより主経路から分岐経路への誘導を行う Scaled -Corrector 法[6, 7, 9, 17]を用いた．

２次元の塑性不安定解析では，**図 5** に示すように平面ひずみ状態における引張り問題[4, 5, 6]を取り上げた．要素分割はベンチマークのモデルと同じ**図 2** のものを用いたが，端面 AB ,CD が完全固着となっていないことをここで再度強調しておく．すなわち，端面 AB 上にある節点は，x 軸方向へは自由に可動でき変位拘束していない.「公称応力$\tilde{\sigma}/\sigma_y$と伸びu/L」の関係を**図 6** に示す．硬化型の構成則を用いていながらも荷重極大点が存在し，そこでも接線剛性マトリクスは負の固有値をもつ．

図6の経路上にマークされた，分岐点およびu/Lが 0.3 となった時点における塑性ひずみ分布を図7および図8に示す．主経路上では常に変形は一様である．分岐経路へ枝分かれした時点(図6の分岐点)では，図7に示すように主経路上での歪分布との違いは現れていないが，u/Lが0.3になった時点での両者の塑性ひずみ分布は大きく異なることが分かる．局所変形が一部に集中するとともに，他の部分では除荷の状態となっている．

3次元の塑性不安定解析では，図9に示すようにy軸方向の厚みが小さい平面応力状態に近い引張り問題を取り上げた．このような要素分割にした理由は，計算機のスペックに合わせて解析の自由度を落としながらも，将来に向けて出来るだけ早くに3次元解析を導入する必要があるためである．文献[4]と同様に，図9の端面(斜線)に引張力を与えても均一変形となる境界条件を用いた．この境界条件は，(x,y,z)方向の変位を(U,V,W)，表面力を(t_1,t_2,t_3)とすると次のように表せる．

$$\begin{cases} U=0\,,\ t_2=t_3=0\ \ (x=0\text{の面において}) \\ V=0\,,\ t_3=t_1=0\ \ (y=0\text{の面において}) \\ W=0\,,\ t_1=t_2=0\ \ (z=0\text{の面において}) \end{cases}$$

「公称応力$\tilde{\sigma}/\sigma_y$と伸びu/L」の関係を図 10 に示す．2 次元解析と同様に，3 次元解析においても，荷重極大点を迎えた直後に分岐が発生している．図11はu/Lが0.15となった時点における塑性ひずみ分布である．主経路上では常に変形は一様であるが，分岐経路上ではu/Lがまだ小さい段階では塑性域が全体に一様に分布しているが，やがてu/Lの増加とともに局所変形が一部に集中し，他の部分では除荷の状態となっている．図9に示す要素分割は粗いため，局所くびれを再現するまでには至っていない[18),19)]が，局所くびれを起こすであろう位置に塑性ひずみが集中していることは確認できる．

３．有限変形弾塑性スペクトル確率有限要素法

以下の３．１から３．３節においては，有限変形に拡張する際に弾塑性の扱いでコアとなる部分に焦点を絞り説明を行い，非線形スペクトル確率有限要素法の全容に関する詳細は，他の文献[2), 3), 20)]に譲るものとする．また，確率変数となる座標の更新および変形勾配の扱いに関しても他の文献[21)]に譲るものとする．

３．１　確率境界値問題の設定

ここで扱う連続体vの確率モデルとは，材料特性の１つであるヤング率Eが正確に分からない物体に対し，その不確からしさを確率的に表現したモデルを指す．通常の確率過程では，時間的に変化する確率変数を扱うが，ここでは時間の代わりに空間的に変化する確率変数として，ヤング率を$E(\boldsymbol{x},\omega)$で表す．ここでωは標本空間Ωの標本点を表し，$\boldsymbol{x}$は連続体v内における点の位置座標を表している．境界条件が与えられた連続体vにおける変位$u_i(\boldsymbol{x},\omega)$ $(i=1\sim3)$は次の確率境界値問題の解となる．以下，物体力が働いた状態を基準とするため，物体力の項は現れないものとする．

$$\left.\begin{aligned} &[\,C_{ijkl}(\boldsymbol{x},\omega)\,\dot{u}^e_{k,l}(\boldsymbol{x},\omega)\,]_{,i}=0 \\ &\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\,\dot{u}_{i,j}(\boldsymbol{x},\omega)+\dot{u}_{j,i}(\boldsymbol{x},\omega)\,\right\} \\ &\dot{u}^e_{k,l}(\boldsymbol{x},\omega)=\dot{u}_{k,l}(\boldsymbol{x},\omega)-\dot{\lambda}(\boldsymbol{x},\omega)\partial_{\boldsymbol{\sigma}}f_{kl}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\omega)) \\ &{}^t\dot{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{x},\omega)\,n_j(\boldsymbol{x})=\dot{\bar{t}}_i(\boldsymbol{x})\ \ (\text{応力境界}\ \partial v^\sigma\ \text{において}) \\ &\dot{u}_i(\boldsymbol{x},\omega)=\dot{\bar{u}}_i(\boldsymbol{x})\qquad(\text{変位境界}\ \partial v^u\ \text{において}) \end{aligned}\right\}\quad(17)$$

式(17)を直接的に解くかわりに，以下３．２節に述べる確率汎関数(エネルギー関数)について停留問題を作り，そこに区分的に値を持つ空間についての基底関数および2次確率過程について確率変数が属する Hilbert 空間について完全系を成す基底関数を用いて離散化した近似方程式を解く[22), 23)]．そのとき，弾塑性体について時刻tの瞬間毎に成り立つ汎関数[3), 14), 24), 25)]に関して以下の上下界定理[3), 25)]が成り立つ．

３．２　上下界定理[3), 25)]

以下は$\omega\in\Omega$を固定する毎に成り立つ，サンプルパスについての不等式である．

【∂v^u 面固定の場合 】

∂v^σ上で$t_i=\bar{t}_i$および∂v^u上で$u_i=0$の場合

$$\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}}(\omega),C(\omega)\right]=-\int_v\frac{1}{2}\dot{u}^e_{i,j}C_{ijkl}\,\dot{u}^e_{k,l}\,dV+\int_{\partial v^\sigma}\dot{u}_i\dot{\bar{t}}_i\,dS\quad\cdots\cdots(18)$$

ここに，$\dot{u}^e_{i,j}=\dot{u}_{i,j}-\dot{\lambda}(\nabla f)_{ij}$　である．

$$\Pi_c\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\omega),C(\omega)\right]=\int_v\frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}C^{-1}_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}+\dot{\lambda}(\nabla f)_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij}dV+\int_v\mu_j\dot{\sigma}_{ij,i}\,dV\quad\cdots\cdots(19)$$

このとき，歪エネルギーを

$$U(\omega)=\int_v \frac{1}{2}E(\boldsymbol{x},\omega)C_{ijkl}\,\dot{u}^e_{i,j}\dot{u}^e_{k,l}\,dV \quad \cdots\cdots(20)$$

とおくと，次式が成り立つ．

$$\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}}(\omega),C(\omega)\right] \leqq U(\omega) \leqq \Pi_c\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\omega),C(\omega)\right]\cdots(21)$$

【∂v^σ 面自由の場合 】

∂v^σ 上で $t_i=0$ および ∂v^u 上で $u_i=\overline{u}_i$ の場合

$$\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}}(\omega),C(\omega)\right]=\int_v \frac{1}{2}\dot{u}^e_{i,j}C_{ijkl}\,\dot{u}^e_{k,l}\,dV \quad \cdots\cdots(22)$$

$$\Pi_c\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\omega),C(\omega)\right]=-\int_v \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}C^{-1}_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}\,dV+\int_v \dot{\mu}_j\dot{\sigma}_{ij,i}\,dV$$
$$+\int_{\partial v^u}\overline{u}_i\dot{t}_i\,dS \quad \cdots\cdots(23)$$

このとき，次式が成り立つ．

$$\Pi_c\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\omega),C(\omega)\right] \leqq U(\omega) \leqq \Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}}(\omega),C(\omega)\right]\cdots(24)$$

但し，式(18)～(20),(22),(23) の右辺について正確には $u_i(\boldsymbol{x},\omega)$，$C_{ijkl}(\boldsymbol{x},\omega)$，$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},\omega)$，$\mu_j(\boldsymbol{x},\omega)$，$t_i(\boldsymbol{x},\omega)$ と書くべきであるが，記述を見易くするため変数に当たる部分 $(\boldsymbol{x},\omega)$ を省略した．また，式(19) の第２項における $\dot{\lambda}(\nabla f)_{ij}\dot{\sigma}_{ij}$ は，$\Pi_c(\dot{\boldsymbol{\sigma}},C)$ の最小値を 0 に揃えるために追加した項である [25]．

本問題の設定では，∂v^u 面固定として荷重変位を解析モデルの端面に与える．そのため，式(21) の不等式を取り上げる．すると，$\omega=\omega_0$ を固定する毎に以下の不等式が成り立つ．

$$\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}}(\omega_0),C(\omega_0)\right] \leqq U(\omega_0) \leqq \Pi_c\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\omega_0),C(\omega_0)\right]$$

ここで，上式の左辺 $\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}}(\omega_0),C(\omega_0)\right]$ における $\dot{\boldsymbol{u}}(\omega_0)$ は，$\omega=\omega_0$ を固定する毎に運動学的可容変位場 [8] を構成する関数空間の中で任意の関数を取り動く．その中で，$\dot{\boldsymbol{u}}^{exact}(\omega_0)$ なものが最大値を取り $U(\omega_0)$ に一致する．また，確率変数ではない関数 $\dot{\boldsymbol{u}}$ も運動学的可容変位場を構成する関数空間の中で任意の関数を取り動き，やはり $\dot{\boldsymbol{u}}^{exact}$ なものが $\dot{\boldsymbol{u}}^{exact}(\omega_0)$ に一致する．したがって，次の不等式が成り立つ．

$$\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}},C(\omega_0)\right] \leqq U(\omega_0) \quad \cdots\cdots(25)$$

式(21) の右辺についても同様である．よって，

$$\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}},C(\omega_0)\right] \leqq U(\omega_0) \leqq \Pi_c\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}},C(\omega_0)\right]$$

が成り立つ．ここで，両辺の平均をとることで，

$$\Pi\left[\dot{\boldsymbol{u}},\langle C(\omega)\rangle\right]\leqq\langle U(\omega)\rangle\leqq\Pi_c\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}},\langle C^{-1}(\omega)\rangle^{-1}\right]\cdots(26)$$

が導かれる．ここで現れた $\langle C(\omega)\rangle$ および $\langle C^{-1}(\omega)\rangle^{-1}$ をもつ固体をバウンディングメディアとよび $v^\pm$ で表す [3]．なお，式(21),(24) において左辺と右辺に現れる汎関数 Π および Π_c は一致していないことを強調しておく．この点については，Hashin-Shtrikman の変分原理を用いることで解消され，さらには両辺の不等式の幅をさらにシャープに狭めることができる [3),26]．

３．３　有限変形弾塑性スペクトル確率有限要素法

確率境界値問題 式(17) の近似解を計算するために，式(18) の Π について停留問題を作り，それを離散化する．具体的には，$\delta\Pi=0$ は確率に関する部分を除いて式(16) に帰着する [14] ため，式(16) にヤング率が確率変数であることを加味して離散化すればよい．そこで，式(16) の左辺第１項に現れる ${}^t_t\dot{\boldsymbol{S}}={}^t_t\boldsymbol{C}^{ep}:\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}-{}^t\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D}$ について確率を加味すると次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}&{}^t_t\dot{\boldsymbol{S}}(\omega)={}^t_t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(J)}(\omega)-\boldsymbol{D}(\omega)\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)-{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\cdot\boldsymbol{D}(\omega)\\&=\boldsymbol{C}^e(\omega):\{\boldsymbol{D}(\omega)-\dot{\lambda}(\omega)\partial_{\boldsymbol{\sigma}}F({}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega))\}\\&-\boldsymbol{D}(\omega)\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)-{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\cdot\boldsymbol{D}(\omega)\end{aligned}\right\}\cdots(27)$$

ここに，λ は塑性係数，F は降伏関数を表す．また，F は応力の関数となっている．ヤング率という材料特性自体が確率的に変動する他に，応答である応力自体も確率的に変動してくるため，応力の関数である $\partial_{\boldsymbol{\sigma}}F({}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega))$ を確率的に厳密に扱うことは難しい．また，式(27) の第２項

$$\boldsymbol{C}^e(\omega):\dot{\lambda}(\omega)\partial_{\boldsymbol{\sigma}}F({}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)) \quad \cdots\cdots(28)$$

は３重の確率変数の積となっているため，厳密に離散化することは非常に煩雑である．
この問題を回避するため，文献 [2),3] に倣って次のようにする．まず，降伏関数 F を応力の平均値 $\langle{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\rangle$ まわりの摂動展開する．すなわち，

$$F({}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega))=F(\langle{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\rangle)+O\left(\left|{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)-\langle{}^t\boldsymbol{\sigma}\rangle\right|\right)(29)$$

とする．するとここで，$\langle{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\rangle$ を求める必要が出てくるわけであるが，それには式(13) の平均

$$\left\langle {}^{t'}\boldsymbol{\sigma}(\omega)\right\rangle=\left\langle {}^{t}\boldsymbol{\sigma}(\omega)\right\rangle+\left\langle\int_t^{t'} {}_t\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x},\omega)\,dt\right\rangle \quad \cdots\cdots(30)$$

を求めればよい．そこで，相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度から Cauchy 応力速度に変換すると以下となる．

$${}_t\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x},\omega)={}_t^t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}{}^{(J)}+\boldsymbol{W}\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}-{}^t\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{W}-(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,{}^t\boldsymbol{\sigma}$$

$$\left.\begin{aligned}&=\boldsymbol{C}^e(\omega):\{\boldsymbol{D}(\omega)-\dot{\lambda}(\omega)\partial_{\boldsymbol{\sigma}}F({}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega))\}\\&+\boldsymbol{W}(\omega)\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)-{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\cdot\boldsymbol{W}(\omega)-(\mathrm{tr}\boldsymbol{D}(\omega))\,{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\end{aligned}\right\}(31)$$

しかしながら，ここで再び式(28) の問題が生じる．そこで，$v^{\pm}$ 内の応力 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{\pm}$ を実際の応力平均 $\left\langle {}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)\right\rangle$ の代わりに用いることを考える．
そのための仮定を 2 つ設け，式(27)，(31) に適用する．

> 仮定 1: バウンディングメディア $v^{\pm}$ における応力 ${}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}$ は，$\left\langle {}^t\boldsymbol{\sigma}\right\rangle$ の上下界を与える．

そして，確率変動が小さくなれば当然ながら，${}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}$ は $\left\langle {}^t\boldsymbol{\sigma}\right\rangle$ に近づいてゆく．
この仮定 1 により式(27) は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}{}_t^t\dot{\boldsymbol{S}}(\omega)&=E(\omega)\boldsymbol{C}^{e*}:\{\boldsymbol{D}(\omega)-\dot{\lambda}(\omega)\partial_{\boldsymbol{\sigma}}F^{\pm}\}\\&-\boldsymbol{D}(\omega)\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}-{}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}\cdot\boldsymbol{D}(\omega)\end{aligned}\right\}\cdots(32)$$

ここに，$\boldsymbol{C}^e(\omega)=E(\boldsymbol{x},\omega)\boldsymbol{C}^{e*}$ である．

> 仮定 2：バウンディングメディア $v^{\pm}$ における応力は，ひずみおよび塑性係数の平均を通じて関係づけられる．

この仮定 2 により式(31) は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}&{}_t\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm}(\boldsymbol{x})=E^{\pm}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{C}^{e*}:(\left\langle\boldsymbol{D}(\omega)\right\rangle-\left\langle\dot{\lambda}(\omega)\right\rangle\partial_{\boldsymbol{\sigma}}F^{\pm})\\&+\left\langle\boldsymbol{W}(\omega)\right\rangle\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}-{}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}\cdot\left\langle\boldsymbol{W}(\omega)\right\rangle-\left\langle\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}(\omega))\right\rangle{}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}\end{aligned}\right\}(33)$$

これらの仮定は，文献[2), 3)]においては，微小ひずみの理論の枠組みにおいて確率変動が小さい場合に成り立つ関係式として用いられているものである．しかし，微小ひずみの理論と有限変形で状況が異なり注意しなければならないのは，式(27) における $\boldsymbol{D}(\omega)\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)$ の項の影響が関係してくる点である．仮定 1 のもとで，式(32) では $\boldsymbol{D}(\omega)\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}$ としているが，これは

$${}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)=\left\langle{}^t\boldsymbol{\sigma}\right\rangle+O(\,\left|{}^t\boldsymbol{\sigma}-\left\langle{}^t\boldsymbol{\sigma}\right\rangle\right|)\quad\cdots\cdots(34)$$

と近似していることに変わりない．確率変動が小さい場合にはもちろん問題はないが，微小ひずみの理論における式(29) の近似とは異なるものである．式(29) の近似では，降伏関数 F を一度通してからその摂動近似をとっているため，${}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega)$ の変動が F を通じて小さく抑えられている可能性もあると考えられる．これらの近似についての は，数値解析を通じてどのくらいの変動幅であればこの近似が成り立つかを調べる必要がある．

ここで，式(16) の左辺第 2 項に確率を加味すると次のようになる．

$${}^t\boldsymbol{\sigma}(\omega):\frac{1}{2}(\,\delta\boldsymbol{F}_t^T\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T\cdot\delta\boldsymbol{F}_t)\quad\cdots\cdots(35)$$

この項についても，仮定 1 より，

$${}^t\boldsymbol{\sigma}^{\pm}:\frac{1}{2}(\,\delta\boldsymbol{F}_t^T\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T\cdot\delta\boldsymbol{F}_t)\quad\cdots\cdots(36)$$

となる．ここでもやはり，式(34) の近似が現れ，確率変動が小さい場合においてはもちろん問題ない．以上，式(32)，(33)，(36) を式展開において使うことは，「確率変動が小さければ」という条件と，式(33) の成立を同時に要求するが，式(27)，(31)，(35) を直接解くことを考えればかなり緩和されたといえる．ここで，式(34) の近似を確率変動が大きい場合にも成り立たせるための解決策としては，例えば，multi-element polynomial chaos method[27)]のように，予め確率空間を小確率空間に分割し，変動が小さくなったこの小空間で以上の展開を行い，目的の値を条件付き確率として求め，再度そこから全体での平均などの確率特性を再構築することが考えられる．数値計算の効率と解析対象の自由度数から考えても，あくまでも確率変動を小さく抑え込むしかないのではと思われる．

４．まとめと今後の課題

微小変形理論の範囲で行ってきた非線形スペクトル確率有限要素法の構築を，有限変形理論にまで拡張する際の定式化について検討した．また，その構築に際しての下地となる，確率を導入していない通常の有限変形弾塑性有限要素法に関するプログラムコードを構築し，2 次元，3 次元の分岐解析を行った．今後の課題としては，有限変形弾塑性スペクトル確率有限要素法のプログラムコードを構築し，３．３節における理論の適用範囲を調べてゆく．確率を導入することの利点は，構造・形状や材料特性の不確からしさを取り込めることであるが，もう１つ別に分岐現象のシミュレーシ

ョンという観点からの利点がある．それは，除荷と載荷が場所ごとに異なって生じることが分岐を起こす原因であることから，材料特性などのばらつきを考慮することで，除荷と載荷が確率的に変動しながら起こることになるため，繰返し計算における数値誤差によって最も不安定な解に到達することが期待されるという点である．この点を踏まえ敢えて完全系の分岐解析 [4), 5), 6), 7)]を行った次第であり，今後，確率有限要素法を通して調べてゆきたい．

参考文献

1）Ghanem, R. G. and Spanos, P. D.：Stochastic finite elements: a spectral approach, Springer, Berlin (1991)

2） Anders,M.S. and Hori, M.：Stochastic Finite Element Method for Elasto-Plastic Body, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 46, pp. 1897-1916 (1999)

3） Hori,M. : Introduction to Computational Earthquake Engineering, 2nd Edition, Imperial College Press (2011)

4）岡澤重信，宇佐美勉，野口裕久, 藤井文夫：3 次元塑性不安定解析による引張鋼材の局部くびれ挙動，土木学会論文集 No.654/ I-52, pp.285-296 (2000)

5）Okazawa,S., Usami,T., Noguchi, H. and Fujii,F. : Three-Dimensional Necking Bifurcation in Tensile Steel Specimens, J. Engrg. Mech., ASCE, pp. 479-486 (2002)

6）Noguchi, H. and Okazawa,S. : Scaled corrector and branch-switching in necking problems,Computational Mechanics., 26, pp. 236-242 (2000)

7）藤井文夫，大崎純，池田清宏：構造と材料の分岐力学（計算工学シリーズ 3），コロナ社(2005)

8）京谷孝史，非線形 CAE 協会（編）：よくわかる連続体力学ノート，森北出版(2008)

9）久田 俊明，野口 裕久：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善(1996)

10）川井謙一：軸対称および平面ひずみ引張りに関するベンチマークテスト，「塑性と加工」（日本塑性加工学会誌）, Vol. 32, No.364, pp.553-559 (1991)

11）田端正久：偏微分方程式の数値解析，岩波書店(2010)

12） Reddy, B.D. : Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements (Texts in Applied Mathematics), Springer(1998)

13）渡邉浩志：非線形有限要素法特論　東京大学大学院工学系研究科 機械工学専攻 講義資料(2012) http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2012/

14）Bonet,J. and Wood,R.D.：Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press(1997)

15） Hughes, T.J.R. : Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.15, pp.1413-1418(1980)

16）Hill,R：A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, Vol.6, pp. 236-249 (1958)

17）野口裕久，久田俊明：Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発，日本機械学会論文集(A 編) 58 巻 555, pp.2191-2198 (1992)

18）川井謙一：平面応力引張りに関するベンチマークテスト，「塑性と加工」（日本塑性加工学会誌）, Vol.32, No.364, pp.560-564 (1991)

19）北川浩，田辺淳二，宿利清己，浜田実：くびれの数値解析, 日本機械学会論文集(A 編) 46 巻，405, pp.486-496 (1980)

20）堀宗朗, 中川英則：非線形スペクトル確率有限要素法の提案と断層問題の適用に関する基礎的研究，土木学会論文集 A Vol.66, No.4, pp.643-652 (2010)

21）S.Acharjee, N.Zabaras：Uncertainty propagation in finite deformations－A spectral stochastic Lagrangian approach, Comput.Methods Appl. Mech. Engrg., pp. 2289-2312(2006)

22）Manas K.Deb, Ivo M.Babuska and J.Tinsley Oden：Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., pp. 6359-6372(2001)

23）Gabriel J. Lord, Catherine E. Powell, Tony Shardlow：An Introduction to Computational Stochastic PDEs (Cambridge Texts in Applied Mathematics), Cambridge University Press(2014)

24）渡部修：有限変形を受ける弾塑性体の混合形変分原理, 日本機械学会論文集(A 編) 55 巻，510,pp.257-265(1989)

25）Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd Edition, Pergamon Press(1974)

26）Hori, M. and Munashinge,S. : Generalized Hashin-Shtrikman variational principle for boundary-value problem of linear and non-linear heterogeneous body, Mechanics of Materials, 31, pp. 471-486 (1999)

27） Wan, X. and Karniadakis,G.E. : MULTI-ELEMENT GENERALIZED POLYNOMIAL CHAOS FOR ARBITRARY PROBABILITY MESURES, SIAM J. Sci. Compt., Vol.28, No.3, pp.901-928(2006)

【受理年月日　2015年 9月29日】