小山工業高等専門学校
研究紀要第51号(2018)

Total Lagrange形式に基づく平面ひずみ弾塑性不安定解析

中川　英則*1

Plane strain elasto-plastic instability analysis based on Total Lagrangian formulation

Hidenori NAKAGAWA

This paper describes instability analyses of plane strain finite deformation elasto-plastic problems in the frame of total Lagrangian(i.e. TL) formulation. In spite of instability analyses of plane strain finite deformation elasto-plastic problems are well known, the reasons why the author covers these problems in this paper are as follows. The author studies applications of spectral stochastic finite element method (i.e. SSFEM) to finite deformation elasto-plastic problems. In this field, Acharjee and Zabaras presented in 2006 a paper concerned with applications of SSFEM to the finite deformation elasto-plastic problems, where they treated stable analyses in a frame of TL formulation. On the other hand, the author has constructed nonlinear SSFEM in a framework of updated Lagrangian(i.e. UL) formulation. Both of these are theoretically equivalent, but numerical analysis produces differences as a matter of course. In order to compare them, unstable analysis was carried out as an earlier study in the frame of ordinary nonlinear Finite Element formulation not including probability.

KEYWORDS : non-linear FEM, finite deformation theory, Total Lagrangian Fromulation, elasto-plastic problems, instability analysis

1. はじめに

平面ひずみ状態における有限変形弾塑性問題について，total Lagrange形式の枠組みで解析コードの作成とそれに基づく不安定解析を行ったので，その詳細を本紙面に記す．古く既に知られた内容の研究であるため，この期に及んで一体何をしているのだとのそしりを受けかねないが，以下の理由による．(1)著者は有限変形弾塑性問題へのスペクトル確率有限要素法(以下 SSFEM と記す)の適用に関する研究[1),2),3)]を行っており，そこでの必要性から先ずは確率を導入していない通常の非線形有限要素解析コードの作成とそれに基づく不安定解析を行った次第である．Acharjee, Zabarasの両氏により，世界に先駆けて有限変形弾塑性問題へのの SSFEMの適用に関する論文[4)]が発表されて久しいが，そこではtotal Lagrange形式の枠組みで安定領域での解析が行われている．一方，著者はこれまで updated Lagrange 形式の枠組みで SSFEM の解析を行ってきている．理論上両者は等価であるが，数値解析としては当然ながら差が生じるため，両者の比較のためにtotal Lagrange形式の枠組みでのSSFEMコードを構築する必要が生じた．その先行研究として，本紙面に記す確率を導入していない通常の非線形有限要素解析を

*1 一般科(数学)（Dept. of General Education, Mathematics），E-mail: nakagawa@oyama-ct.ac.jp

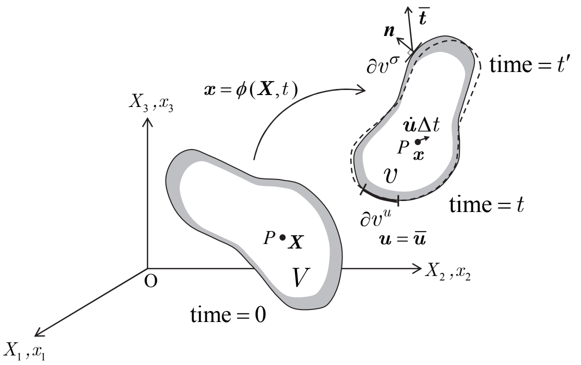

図１　基準配置V と現在配置v（概念図）

行った次第である．(2) (1) に記した解析を行うために参考にした文献[5),6),7),8)]では，updated Lagrange 形式の枠組みで不安定解析が行われている．そのため，安定領域だけでもよいので total Lagrange 形式の枠組みで有限要素解析を行っている文献はないものかと探したが，理論を記した書籍[9),10)]以外には目当てとする資料は現時点ではそう多く[11)] は見つからなかった. ましてや, total Lagrange 形式の枠組みで，不安定領域での有限要素解析を行った結果について記された文献は見当たらなかった．そのために，その詳細を記すことに少しは意義があるのではないかと思い紀要に記すに至った次第である．

以下，2 章では有限要素定式化とプログラムコードを構築する際に必要となるアルゴリズムを述べる．続いて 3 章では，不安定領域を経て枝分かれした主経路および分岐経路に関する数値解析の結果について詳細を述べ，最後に 4 章においてまとめとする．

２．塑性不安定現象とその解析

２．１　境界値問題の設定

図 1 に示すように, 連続体が時刻$t=0$において占める体積を基準配置V，時刻tにおいて占める体積を現在配置vで表す．また，基準配置Vにおいて位置$\boldsymbol{X}\in V$にあった物質点が運動し空間位置$\boldsymbol{x}\in v$となる関係を次の関数で表すことにする.

$$\boldsymbol{x}=\phi(\boldsymbol{X},t)\ \ (\boldsymbol{X}\in V\,,0\leqq t<\infty)$$

ここで，関数ϕは連続微分可能であって，また$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{x}$の対応については $\det[\nabla_X\phi]>0$ とする．

現在配置vにおいて静的可容応力場${}^t\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$が満たす式を次に示す．ここに，${}^t\boldsymbol{\sigma}$は Cauchy 応力であり，左肩記号は現時刻を表し，左下記号がない場合には，現時刻と参照時刻が同じであることを意味する．

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}\mathrm{div}\,{}^t\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0} & \\ \quad {}^t\boldsymbol{\sigma}={}^t\boldsymbol{\sigma}^T & (v\text{ 内部において})\end{array}\right. \\ {}^t\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}=\bar{\boldsymbol{t}} \qquad (\text{応力境界 }\partial v^\sigma\text{ において})\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

２．２　有限要素定式化

上記の静的可容応力場$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$のつり合い式に, 一階までの導関数が$p(\geqq 2)$乗 Lebesgue 可積分である任意の変位関数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$を乗じ領域$v$での積分をとることで次の弱形式を得る．但し，変位境界∂v^uにおいて$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\bar{\boldsymbol{u}}$ $(\boldsymbol{x}\in\partial v^u)$を満たすものとする．

$$\int_{{}^{t'}v}(\mathrm{div}\,{}^{t'}\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{u}\,dv=0$$

$$\rightarrow\ W(\boldsymbol{u})=\int_{{}^{t'}v}{}^{t'}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}\,dv-{}^{t'}F_{\mathrm{ext}}=0\quad\cdots\cdots(2)$$

ここに,

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)+\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^T\right\}$$

$${}^{t'}F_{\mathrm{ext}}=\int_{\partial^{t'}v^\sigma}{}^{t'}\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{u}\,ds+\int_{\partial^{t'}v^u}{}^{t'}\boldsymbol{t}\cdot\bar{\boldsymbol{u}}\,ds+\int_{{}^{t'}v}\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}\,dv$$

である．

ここで, 時刻t毎に汎関数$W(\boldsymbol{u})$は変位関数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$が含まれる Sobolev 空間上の強圧的連続な双一次形式となっている．そのため，第一変分$\delta W(\boldsymbol{u})=0$を満たす解$\boldsymbol{u}^{exact}(\boldsymbol{x})$を求めればよい.

第一変分は Gauss の発散定理を用いて次となる.

$$\delta W(\boldsymbol{u})=\int_{{}^{t'}v}{}^{t'}\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dv-\delta\,{}^{t'}F_{\mathrm{ext}}\quad\cdots\cdots(3)$$

(但し，$\delta\,{}^{t'}F_{\mathrm{ext}}=\int_{\partial^{t'}v^\sigma}{}^{t'}\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,ds+\int_{{}^{t'}v}\rho\boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dv$)

ここで，$\delta W(\boldsymbol{u})=0$は$\boldsymbol{u}$について非線形となるため，通常は Newton-Raphson 法などの反復解法を用いることになる．以下，下添え字のkは反復回数を表している．

$$\delta W(\boldsymbol{u}_k)+D\delta W(\boldsymbol{u}_k)[\boldsymbol{u}]=0$$
$$\rightarrow\ D\delta W(\boldsymbol{u}_k)[\boldsymbol{u}]=-\delta W(\boldsymbol{u}_k)\quad\cdots\cdots(4)$$

ここで，Gateaux 微分 $D\delta W(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{u}]$ を計算することは煩雑なので，通常は次の方法を用いる．

$$\frac{d\delta W(\boldsymbol{u})}{dt}=\frac{d\delta W(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}}\quad\cdots\cdots(5)$$

すなわち，tで微分して$\dot{\boldsymbol{u}}$についてまとめることで$\boldsymbol{u}$方向への微分を得ることにする．式(4)は

$$\left.\begin{aligned} &D\delta W(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{u}] = \left.\frac{d\delta W(\boldsymbol{u})}{dt}\right|_t \Delta t \\ &= \left(\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dv\right)^{\bullet} \Delta t - (\delta\, {}^tF_{\mathrm{ext}})^{\bullet} \Delta t \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (6)$$

となる．ここに，$(\ )^{\bullet}$はラベル$\boldsymbol{X}$を固定してtについての導関数(物質時間導関数)を表す．ここで，$(\delta\, {}^tF_{\mathrm{ext}})^{\bullet}\Delta t$は$\delta\boldsymbol{u}$の変化が関係してくるため厳密にはゼロではないが，ここでは準静的な仮定の下での外力項としての全体の時間変化は小さいため考慮しない[9)]．したがって，式(4)は次のようにまとまる．

$$\left(\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dv\right)^{\bullet} \Delta t = \delta\, {}^{t'}F_{\mathrm{ext}} - \int_{{}^tv} {}^t\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dv \quad \cdots\cdots (7)$$

以下，式(7)の左辺の展開にあてる．しかしながら，現配置$\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X}, t)$について物質時間微分をとることは煩雑なため，共役な仕事を成すように変形前の基準配置にpull-backし，そこで$\boldsymbol{X}$を固定してtについて微分をとる．

$$\int_v {}^t\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dv = \int_V {}^t_0\boldsymbol{S} : \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}\, dV \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに$\boldsymbol{S}$は第2 Piola-Kirchhoff応力，$\boldsymbol{E}$はGreen-Lagrangeひずみをそれぞれ表し，左肩記号は現時刻，左下記号は参照時刻をそれぞれ表すものとする[9)]．変形勾配テンソル$\boldsymbol{F}$，および体積変化率$J = \det \boldsymbol{F}$を用いて，第2 Piola-Kirchhoff応力$\boldsymbol{S}$は以下のように定義される．

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \boldsymbol{F} \cdot {}^t_0\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^T \quad \cdots\cdots (9)$$

また，$\boldsymbol{S}$と共役なひずみであるGreen-Lagrangeひずみ$\boldsymbol{E}$およびその変分$\delta\boldsymbol{E}$は以下のように定義される．

$${}^t_0\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right) + \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T + \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)\right\}$$

$$\delta\, {}^t_0\boldsymbol{E} = \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}_L + \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}_{NL}$$

$$\delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}_L = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right) + \left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T\right\}$$

$$\delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}_{NL} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right) + \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)\right\}$$

ここで $\int_V {}^t_0\boldsymbol{S} : \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}\, dV$ の時間微分をとると，

$$\left.\begin{aligned} &\int_V {}^t_0\dot{\boldsymbol{S}} : \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E} + {}^t_0\boldsymbol{S} : (\delta\, {}^t_0\boldsymbol{E})^{\cdot}\, dV \\ &= \int_V {}^t_0\dot{\boldsymbol{S}} : \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E} + {}^t_0\boldsymbol{S} : (\delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}_{NL})^{\cdot}\, dV \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$(\delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}_{NL})^{\cdot} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{X}}\right) + \left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)\right\}$$

以上より，式(7)は最終的に次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\int_V {}^t_0\dot{\boldsymbol{S}} : \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E} + {}^t_0\boldsymbol{S} : (\delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}_{NL})^{\cdot}\, dV\right\} \Delta t \\ &= \delta\, {}^{t'}F_{\mathrm{ext}} - \int_V {}^t_0\boldsymbol{S} : \delta\, {}^t_0\boldsymbol{E}\, dV \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (11)$$

上記をtotal Lagrange法における接線剛性方程式という[9)]．また，正確には式(11)の左辺および右辺の第2項は，時刻tではなくイタレーションをk回行った時点での時刻である．ここでは，より複雑化しないためにも式(11)で表している．

２．３　弾塑性構成則

文献[5),6),7),9)]に従い弾塑性構成則としては，J_2流れ則を採用した．客観応力速度は，相対Kirchhoff応力のJaumann速度 ${}^t_t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(\mathrm{J})}$ を用いる．これにより，対称な接線剛性マトリクスを得ることができるからである． $\boldsymbol{D}$はひずみ速度(ストレッチングテンソル) を表すものとすると，J_2流れ則は以下のように示される．

$${}^t_t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(\mathrm{J})} = {}^t_t\boldsymbol{C}^{ep} : \boldsymbol{D} \quad \cdots\cdots (12)$$

ここに，${}^t_t\boldsymbol{C}^{ep}$を指標表記すると次のようである．

$$\left.\begin{aligned} {}^t_tC^{ep}_{ijkl} &= G\left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right. \\ &\quad \left. - \frac{3G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{{}^t\bar{\sigma}^2(\mathrm{H}'/3\mathrm{G}+1)}\right] \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\bar{\sigma} = \mathrm{H}(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_y\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_y}\right)^n, \quad \sigma_y = E\, e_y$$

(Prandtl-Reussの関連流れ則)

von Misesの降伏関数： $F = \frac{1}{3}\left[\ \bar{\sigma}^2 - \mathrm{H}(\bar{\varepsilon}^p)^2\ \right]$

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma = E\varepsilon && (\sigma \leqq \sigma_y) \\ &\sigma = \mathrm{H}(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_y\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_y}\right)^n && (\sigma \geqq \sigma_y) \end{aligned}\right. \quad \cdots\cdots (14)$$

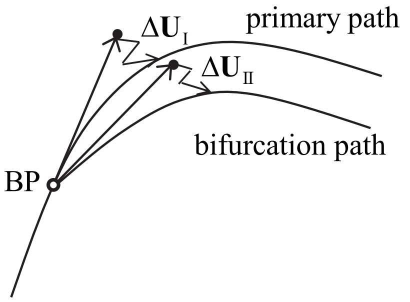

図２　scaled corrector 法の概念図

ここに，E はヤング率，ν はポアソン比をそれぞれ表すとして，$G = E/\{2(1+\nu)\}$ である．また，$\bar{\sigma}$ は相当応力，$\boldsymbol{\sigma}'$ は偏差応力，$\bar{\varepsilon}^p$ は相当塑性ひずみ，σ_y は降伏応力をそれぞれ表している．

ここで，相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 ${}^t_t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(\mathrm{J})}$ と Truesdell の応力速度 ${}^t_t\dot{\boldsymbol{S}}$ の関係は次式で表せる [5),6),7),9)].

$$ {}^t_t\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}^{(\mathrm{J})} = {}^t_t\dot{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{D}\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma} + {}^t\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D} \quad \cdots\cdots (15) $$

したがって，

$$ {}^t_t\dot{\boldsymbol{S}} = {}^t_t\boldsymbol{C}^{ep} : \boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}\cdot{}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D} $$
$$ = \{({}^t_tC^{ep}_{ijkl} - \delta_{ki}{}^t\sigma_{lj} - {}^t\sigma_{ik}\delta_{lj})\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l\}\cdot\boldsymbol{D} $$
$$ = \left[\left\{ {}^t_tC^{ep}_{ijkl} - \frac{1}{2}(\delta_{ki}{}^t\sigma_{lj} + \delta_{lj}{}^t\sigma_{ik} + \delta_{li}{}^t\sigma_{jk} + \delta_{kj}{}^t\sigma_{il}) \right\} \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l \right]\cdot\boldsymbol{D} \quad \cdots\cdots (16) $$

が成り立つが，式(16) と ${}^t_t\dot{\boldsymbol{S}} = {}^t_t\boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}$ の関係より

$$ {}^t_tC_{ijkl} = {}^t_tC^{ep}_{ijkl} - \frac{1}{2}(\delta_{ki}{}^t\sigma_{lj} + \delta_{lj}{}^t\sigma_{ik} + \delta_{li}{}^t\sigma_{jk} + \delta_{kj}{}^t\sigma_{il}) \cdots (17) $$

と表せる．ここで，${}^t_0\dot{\boldsymbol{S}}$ と ${}^t_t\dot{\boldsymbol{S}}$ および ${}^t_0\dot{\boldsymbol{E}}$ と ${}^t_t\dot{\boldsymbol{E}}$ の間には，次の関係が成立する．

$$ {}^t_t\dot{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{J}\,{}^t_0\boldsymbol{F}\cdot{}^t_0\dot{\boldsymbol{S}}\cdot{}^t_0\boldsymbol{F}^T \quad \cdots\cdots (18) $$

$$ {}^t_0\dot{\boldsymbol{E}} = {}^t_0\boldsymbol{F}^T\cdot{}^t_t\dot{\boldsymbol{E}}\cdot{}^t_0\boldsymbol{F} \quad \cdots\cdots (19) $$

ここで，式を ${}^t_t\dot{\boldsymbol{S}} = {}^t_t\boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}$ に適用すると，

$$ {}^t_0\dot{\boldsymbol{S}} = J\,{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\{{}^t_t\boldsymbol{C} : ({}^t_0\boldsymbol{F}^{-T}\cdot{}^t_0\dot{\boldsymbol{E}}\cdot{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1})\}\cdot{}^t_0\boldsymbol{F}^{-T} $$
$$ = J\{{}^t_tC_{ijkl}\,{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_i\otimes{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_j\otimes{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_k\otimes{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_l\} : {}^t_0\dot{\boldsymbol{E}} $$

を得る．これを ${}^t_0\dot{\boldsymbol{S}} = {}^t_0\boldsymbol{C} : {}^t_0\dot{\boldsymbol{E}}$ と比べることにより，

$$ {}^t_0\boldsymbol{C} = J\,{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\{{}^t_t\boldsymbol{C} : ({}^t_0\boldsymbol{F}^{-T}\cdot{}^t_0\dot{\boldsymbol{E}}\cdot{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1})\}\cdot{}^t_0\boldsymbol{F}^{-T} $$
$$ = J\,{}^t_tC_{ijkl}\,{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_i\otimes{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_j\otimes{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_k\otimes{}^t_0\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}_l $$
$$ = J\frac{\partial X_p}{\partial{}^tx_i}\frac{\partial X_q}{\partial{}^tx_j}\frac{\partial X_r}{\partial{}^tx_k}\frac{\partial X_s}{\partial{}^tx_l}\,{}^t_tC_{ijkl}\,\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q\otimes\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_s \cdots (20) $$

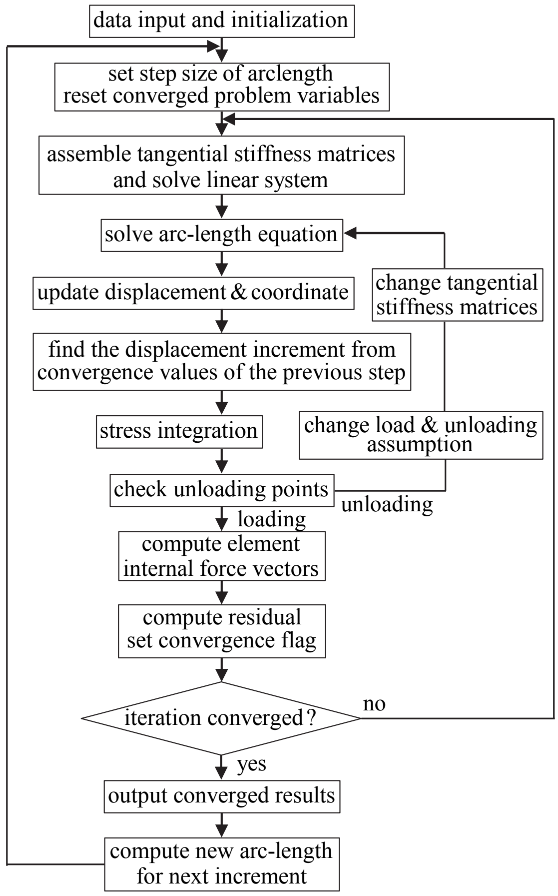

図３　弧長制御法を入れた Newton-Raphson 法

が導かれるが，さらに式(20) に式(17) を代入して，

$$ {}^t_0C_{pqrs} = J\frac{\partial X_p}{\partial{}^tx_i}\frac{\partial X_q}{\partial{}^tx_j}\frac{\partial X_r}{\partial{}^tx_k}\frac{\partial X_s}{\partial{}^tx_l}\left\{ {}^t_tC^{ep}_{ijkl} - \frac{1}{2}\left(\delta_{ki}{}^t\sigma_{lj} + \delta_{lj}{}^t\sigma_{ik} + \delta_{li}{}^t\sigma_{jk} + \delta_{kj}{}^t\sigma_{il}\right)\right\} \quad (21) $$

を得る．total Lagrange 形式の枠組みで構築した場合には，構成則にこの変換が加わることになり，今回の数値解析では，この変換を解析コードに加えている．

著者が updated Lagrange 形式の枠組みで SSFEM の解析を構築 [1),2),3)] している理由は，元々の構成則が現配置を基準に構築されたものであり，total Lagrange 形式の枠組みで構築した場合に生じる式(21) の変換を避けるためである．何故なら，SSFEM では，J，x，${}^t_tC^{ep}_{ijkl}$，σ_{ij} が全て確率変数となるため，式(21) の変換を通すことによる煩雑さと数値解析の精度低下が危惧されるからである．

2．4　弧長制御法およびscaled corrector法

(弧長制御法)[9), 12)]

弧長制御法は１回の予測子とその後の数回におよぶ修正子による繰返し計算により，変位のみならず荷重も未知数として非線形な曲線を追跡する方法である．

弧長制御法の予測子計算では，弧長ξに対して

$$\begin{cases} \mathbf{K}\,\Delta\mathbf{U} = \Delta\Lambda\,\boldsymbol{p} & \cdots\cdots(22) \\ {}^{t}\Delta\mathbf{U}\,\boldsymbol{G}\Delta\mathbf{U} + \gamma\,\Delta\Lambda^{2} = \xi^{2} & \cdots\cdots(23) \end{cases}$$

を解く．荷重増分$\boldsymbol{p}$に対して荷重変数$\Delta\Lambda$を1.0とした時の解を$\mathbf{U}_{p}$とすると，$\Delta\mathbf{U} = \Delta\Lambda\,\mathbf{U}_{p}$である．また，式(23)における$\boldsymbol{G}$は対角行列であり，その対角成分が０であるか否かにより式に関与する節点自由度を選択でき，さらに非ゼロの場合は対応する節点自由度の予測量の２乗をスケーリングできる．荷重変数の予測量の２乗もγでスケーリングできる．ここで，$\Delta\mathbf{U} = \Delta\Lambda\,\mathbf{U}_{p}$を式に代入することで次式を得る．

$$\Delta\Lambda = \pm\frac{\xi}{\sqrt{{}^{t}\mathbf{U}_{p}\boldsymbol{G}\,\mathbf{U}_{p} + \gamma}} \quad \cdots\cdots(24)$$

ここで，右辺の復号は，荷重増分の正負(載荷または除荷)を定めるものであり，平衡経路を進む向きに合わせて選択する．

次に予測子によってつり合い経路から逸脱した点を，修正子による反復計算により再び平衡経路上へと引き戻す．修正子を$(\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)}, \mathrm{d}\Lambda^{(i+1)})$で表す．ここで，上付き添字iは反復計算(イタレーション)の回数を表している．修正子の計算では次の方程式を解く．

$$\begin{cases} {}^{t'}_{0}\mathbf{K}^{(i)}\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)} - \mathrm{d}\Lambda^{(i+1)}\boldsymbol{p} = {}^{t'}\Lambda^{(i)}\boldsymbol{p} - {}^{t'}_{0}\mathbf{F}^{(i)}_{\mathrm{int}} & \cdots\cdots(25) \\ {}^{t}\Delta\mathbf{U}\,\boldsymbol{G}\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)} + \gamma\,\Delta\Lambda\,\mathrm{d}\Lambda^{(i+1)} = 0 & \cdots\cdots(26) \end{cases}$$

式(26)で，$\boldsymbol{G}$が単位行列で，$\gamma = 1$の場合は，計算済みの予測子に修正式が直交するように反復計算を行っていることに相当する．

しかしながら，式(25),(26)を直接に解くことは出来ないため，以下の過程を経て修正子$(\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)}, \mathrm{d}\Lambda^{(i+1)})$を求めることになる．

$$\begin{cases} {}^{t'}_{0}\mathbf{K}^{(i)}\mathbf{U}^{(i+1)}_{p} = \boldsymbol{p} & \cdots\cdots(27) \\ {}^{t'}_{0}\mathbf{K}^{(i)}\,\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)}_{E} = {}^{t'}\Lambda^{(i+1)}\boldsymbol{p} - {}^{t'}_{0}\mathbf{F}^{(i)}_{\mathrm{int}} & \cdots\cdots(28) \end{cases}$$

を解くことで得た$(\mathbf{U}^{(i+1)}_{p}, \mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)}_{E})$を用いて変位修正子を

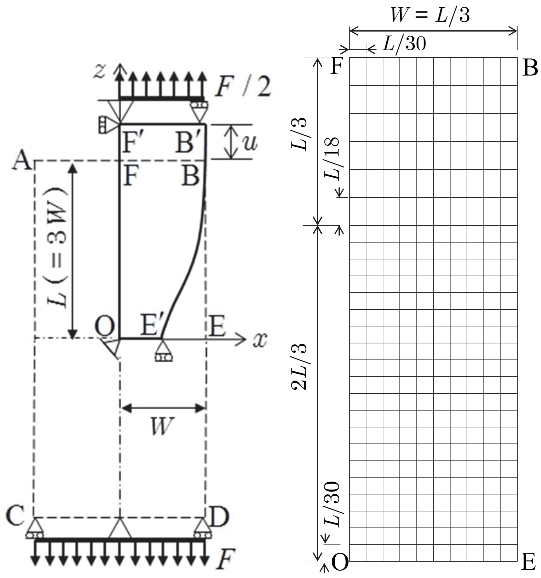

図４解析モデル(左)と有限要素分割（右）

$$\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)}_{E} + \mathrm{d}\Lambda^{(i+1)}\mathbf{U}^{(i+1)}_{p} \quad \cdots\cdots(29)$$

と求める．但し，式(29)を式(26)に代入した

$$\mathrm{d}\Lambda^{(i+1)} = -\frac{{}^{t}\Delta\mathbf{U}^{(i+1)}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)}_{E}}{{}^{t}\Delta\mathbf{U}\,\boldsymbol{G}\,\mathbf{U}^{(i+1)}_{p} + \gamma\,\Delta\Lambda} \quad \cdots\cdots(30)$$

を解くことで荷重修正子$\mathrm{d}\Lambda^{(i+1)}$を求め，最後に式(29)によって変位修正子$\mathrm{d}\mathbf{U}^{(i+1)}$を求めればよい．

(scaled corrector 法)[7), 9), 13)]

scaled corrector 法については,その理論が論文に限らず最近は書籍にもなっているため，ここでは概要のみを記す．理論の詳細を追いたい場合は,それらの文献[7), 9), 13)]を参照頂きたい．特に，以下の概要は文献[7)]を参考にしたものである．分岐点では接線剛性マトリクスが特異となり，その固有値にゼロを含む．ここで，図２に示す主経路上および分岐路上の予測子をそれぞれ$(\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{I}}, \Delta\Lambda_{\mathrm{I}})$，$(\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{II}}, \Delta\Lambda_{\mathrm{II}})$とする．その関係は,

$$\begin{cases} {}^{t'}_{0}\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{I}} = \Delta\Lambda\,\boldsymbol{p} & \cdots\cdots(31) \\ {}^{t'}_{0}\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{II}} = \Delta\Lambda\,\boldsymbol{p} & \cdots\cdots(32) \end{cases}$$

ここで，式(31),(32)の解はそれぞれ

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{U}_{\mathrm{I}} = C_{\mathrm{I}}\,\theta_{S} + \Delta\mathbf{U}_{p} & \cdots\cdots(33) \\ \Delta\mathbf{U}_{\mathrm{II}} = C_{\mathrm{II}}\,\theta_{S} + \Delta\mathbf{U}_{p} & \cdots\cdots(34) \end{cases}$$

と書ける.特に,分岐点に非常に近い点において,

$$\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{I}} \cong \Delta\Lambda\,\mathbf{U}_{p} (\triangleq \Delta\mathbf{U}_{p}) \quad \cdots\cdots(35)$$

なる関係が成り立つことに注意する．ここに，$\mathbf{U}_{p}$

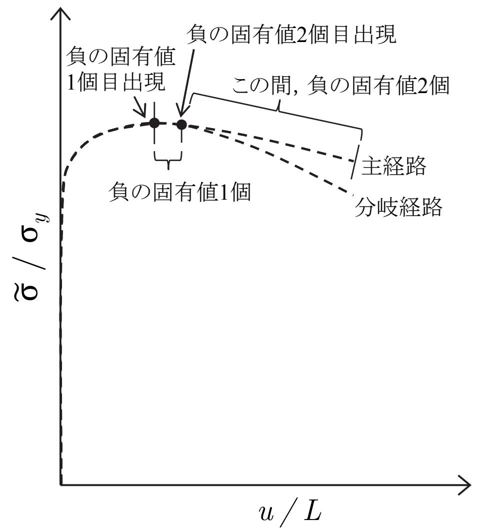

図５　**負の固有値の変化**（ 主経路 ）

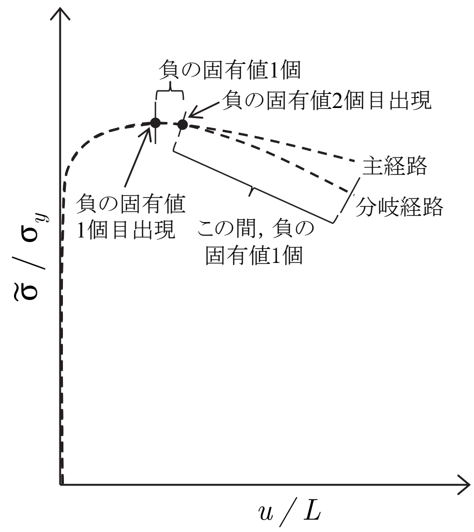

図７　**負の固有値の変化**（ 分岐経路 ）

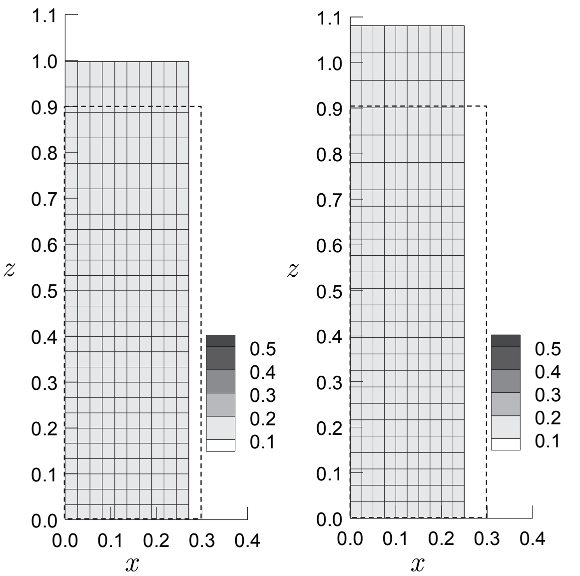

図６　塑性ひずみ分布（ 主経路 ）
(左:$u/L = 0.108$ ，右: $u/L = 0.201$)

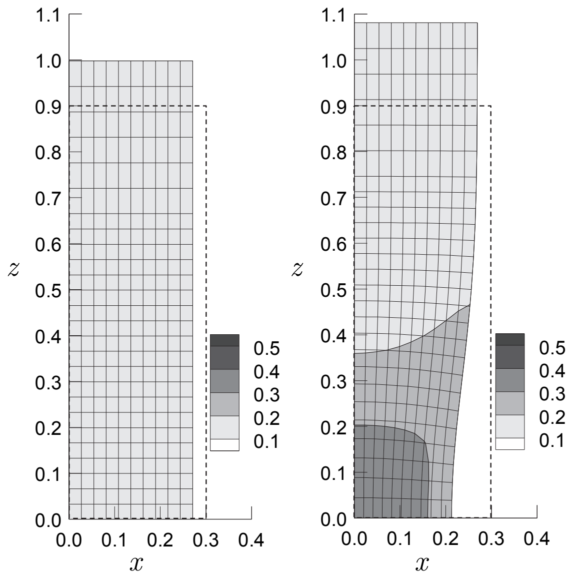

図８　塑性ひずみ分布（ 分岐経路 ）
(左:$u/L = 0.108$ ，右: $u/L = 0.201$)

は分岐点に非常に近い点において得た $^{t'}_{0}\mathbf{K}$ に対する以下の解である．

$$^{t'}_{0}\mathbf{K}\mathbf{U}_p = \boldsymbol{p} \quad \cdots\cdots(36)$$

ここで，式(32) から式 (31) を引くと，

$$\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{II}} = C\,\theta_S + \Delta\mathbf{U}_{\mathrm{I}} \cdots\cdots (37)$$

を得る．ここに，$C = C_{\mathrm{II}} - C_{\mathrm{I}}$ と置いた．また，θ_S は以下の解である．

$$^{t'}_{0}\mathbf{K}\,\theta_S = \lambda\,\theta_S \ (\lambda \to 0) \quad \cdots\cdots(38)$$

式(38) における $\lambda \to 0$ は平衡経路上の点を限りなく分岐点に近づけていったときの極限を意味する．このとき残差を $^{t'}\boldsymbol{R}$ と表すと，

$$^{t'}_{0}\mathbf{K}\mathrm{d}\mathbf{U}_E = {}^{t'}\boldsymbol{R} \quad ({}^{t'}\boldsymbol{R} \to \mathbf{0}) \quad \cdots\cdots(39)$$

が成り立っていることが分かる．ここで式(39) における $^{t'}\boldsymbol{R} \to \mathbf{0}$ は，分岐点に非常に近い点(有限要素法では分岐点に到達する 1 つ前のインクリメントに相当する)において，弧長制御法の反復計算により平衡経路上の点に引き戻していったときの極限を意味する．

このときに，ほとんど $\mathrm{d}\mathbf{U}_E /\!/ \theta_S$ なる関係が成り立つことから，分岐点における θ_S の代わりとして分岐点に非常に近い点で求めた $\mathrm{d}\mathbf{U}_E$ を用いることが出来るということが野口・久田によって示さ

れた[7),9),13)]．$\mathbf{dU}_E$ を正規化して θ_S の代用とする手法を scaled corrector 法という．

２．５　プログラムのアルゴリズム

本研究では，初期不正の導入により分岐経路での挙動を疑似評価する解析ではなく，完全系での分岐解析を行っている．したがって，基本経路上で分岐点の位置を求め, scaled corrector 法により分岐経路方向への切替え操作を行うことで分岐モードを求めることになる．また，荷重極大点およびそれ以降の不安定解析を行うために，本解析では反復計算ごとに超平面を更新する弧長制御法[9)] を用いている．アルゴリズムを図３に示す.

２．４節に記した scaled corrector 法であるが, 理論的には非常に納得がいくものの，いざプログラムにコードとして載せようというときに著者は困難を感じた．それは，弧長制御法を組込んだ Newton-Raphson 法の繰り返し計算のアルゴリズムにおいて，実際にどのように組込んだらよいかについての詳細が記載されている文献がないためであると気づいた．数値解析を行う上で試行錯誤を繰り返し悩みながらも，その手順についてどうにか掴むことができたのでその手順を記す.

(step1) 分岐点に到達する 1 つ前のインクリメントにおいて，修正子による最後のステップの段階で, 式(39) における $\mathbf{dU}_E$ を求め正規化する.

(step2) 分岐点のインクリメントにおける予測子として，$\Delta\mathbf{U}_p$ に step1 で求めた $\mathbf{dU}_E$ を正規化した $\tilde{\theta}_S \cong \theta_S$ を加え式(37) で表される $\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{II}}$ を作り，修正子の反復計算に入る.

このとき， $\tilde{\theta}_S$ のスケーリングに当たる式(37) の C は文献により $0.01 \sim 0.1$ の間で適切に調節する．ただ，本研究では後述する３．３節の数値解析においては $C = 0.004$ と設定した．予測子 $\Delta\mathbf{U}_{\mathrm{II}}$ により分岐経路に近いていれば，C については若干の差があっても後の修正子による反復計算の段階で分岐方向の平衡経路上に乗ってゆく.

３．数値解析

３．１　数値解析モデルの設定

解析モデルを図４の左側に示す．解析モデルは，

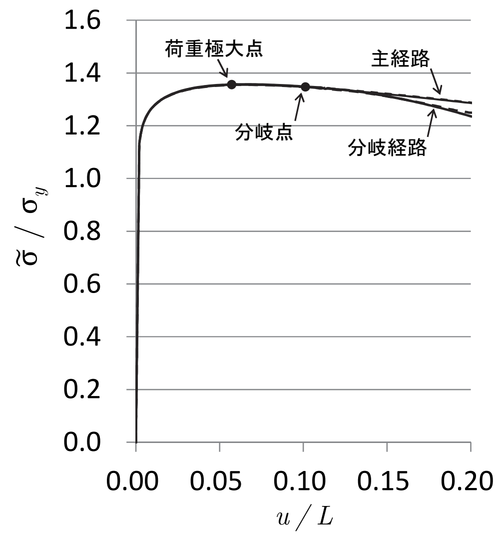

図９　UL 形式と TL 形式の平衡経路の比較
(実線: UL 形式，破線: TL 形式)

$L = 0.9$[m] ，$W = 0.3$[m] と設定した．解析モデルの両端面に一様な引張り分布荷重を増分として与えてゆく．対称性から，1/4 部分(矩形OEBF）のみの解析を行う．また，OEBF において，点E および点B は x 軸方向に可動としている．図４の右側に有限要素分割を示す．有限要素には，x 軸方向に 10 分割，z 軸方向に 26 分割の計 260 個のアイソパラメトリック四辺形 1 次要素を用いた．分岐経路に入った後に応力集中が予想される領域を予め細かく分割している．また，今回の解析では Hughes によって発案[14)] された b-bar 法による選択的次数低減積分(SRI)を用いている. SRI を考慮しないと解析モデルは次第に硬くなってゆき，分岐点が現れずに主経路のみしか追わない.

２．３節に記した弾塑性構成則に用いたパラメータは文献[5),6),7)]を参考にして以下のようである.

$$E = 200\ \text{Gpa}\ ,\ \varepsilon_y = \sigma_y / E = 1/500$$
$$n = 0.0625\ ,\ \nu = 0.333$$

３．２　主経路の解析

主経路を追った場合の平衡経路上に出現する特異点の概念図を図５に示す．硬化型の構成則を用いていながらも荷重極大点が存在し，そこでも接線剛性マトリクスは負の固有値をもつ．接線剛性マトリクスの LDL^T 分解により負の固有値の存在を追ってゆくと，図５に示す荷重極大点において 1 個目の負の固有値が出現する．そのまま平衡経路を追ってゆくと，やがて 2 個目の負の固有値

が出現する．この点が分岐点に対応している．正確に述べれば，この点が分岐点に対応しているかどうかを調べる必要があるが，その理論については古くから知られており現在は詳しい書籍[12]も出ているので詳細はそちらに譲ることにする．そして，2 個目の負の固有値が出現した後は，平衡経路として主経路を追う限りにおいては，この間ずっと接線剛性マトリクスの負の固有値の数は2個のままであった．但し，公称ひずみu/Lが0.2 (20%)になった時点で計算を止めているため，この間に限っての話である．

図６の左側に公称ひずみu/Lが0.108 となった時点(分岐点が出現した時点) およびu/Lが0.201 となった時点における塑性ひずみε_{zz}分布を図６の右側に示す．このように，主経路上では常に変形は一様となっている．

３．３　分岐経路の解析

分岐経路を追った場合の平衡経路上に出現する特異点の概念図を図７に示す．負の固有値の存在を追ってゆくと，３．２節の主経路の場合と同様に図７に示す荷重極大点において1個目の負の固有値が出現する．そのまま平衡経路を追ってゆくと，やがて2個目の負の固有値が出現する．この点が分岐点であるが，この時点で２．４節に記した Scaled -Corrector 法により主経路から分岐経路への誘導を行っている．そして，分岐経路に入った後は，接線剛性マトリクスの負の固有値の数は1個となる．平衡経路として分岐経路を追う限りにおいては，この間ずっと接線剛性マトリクスの負の固有値の数は1個のままとなる．但し，公称ひずみu/Lが0.2 (20%)になった時点で計算を止めているため，この間に限っての話である．

図８の左側に公称ひずみu/Lが0.108 となった時点(分岐点が出現した時点) およびu/Lが0.201 となった時点における塑性ひずみε_{zz}分布を図８の右側に示す．分岐経路へ枝分かれした時点($u/L=0.108$)では，図８の左側に示すように主経路上での塑性ひずみ分布との違いは現れていないが，分岐経路に入ると解析モデルの一部の領域が除荷し始め，やがて塑性ひずみが一部の領域に大きく集中し局所変形が生じる．u/Lが0.201 となった時点における塑性ひずみε_{zz}分布を見るとその様子がはっきりと分かる．

３．４　TL 形式と UL 形式による解析結果の比較

著者はこれまでに有限変形弾塑性問題へのスペクトル確率有限要素法を構築する際の先行研究として，確率を導入していない通常の非線形有限要素解析コードの作成とそれに基づく不安定解析を updated Lagrange 形式(UL 形式)の枠組みで行っている[15]. 本節では, 今回行った total Lagrange 形式(TL 形式)の枠組の解析結果と前回に行った UL 形式の枠組での解析結果[15]を比較するために，図９に「公称応力$\tilde{\sigma}/\sigma_y$と公称ひずみu/L」の関係を示す．但し，前回[15]とは用いた有限要素分割が異なるため，今回の有限要素分割に合わせて改めて UL 形式に基づく不安定解析を行っている．

分岐経路について，u/Lが0.190 を過ぎた辺りから僅かに UL 形式と TL 形式の解析結果に誤差が生じているが，これは分岐経路に入ってしばらくすると一部の領域の局所変形が進み，全体的な塑性ひずみ分布のバランス(すなわち, 応力分布のバランス)が崩れてくることによる数値誤差の影響が大きく関係していると思われる．もう一つの要因としては，収束判定 $\| F_{\mathrm{int}} - F_{\mathrm{ext}} \| / \| F_{\mathrm{ext}} \| \leqq \varepsilon$ において, UL 形式では閾値を$\varepsilon = 10^{-8}$と設定していたが, TL 形式では閾値を$\varepsilon = 10^{-5}$と設定して収束計算を行っていたことも影響していると思われる．ただ，今回の主な目的は TL 形式でのプログラムの作成と TL 形式において Scaled -Corrector 法を用いての分岐解への誘導が出来るかの確認であり，また解析結果を得た後に分かったことでもあったためこれ以上の再計算はしていない.

４．まとめと今後の課題

平面ひずみ状態における確率を導入していない通常の有限変形弾塑性問題について，total Lagrange 形式の枠組みで解析コードの作成とそれに基づく不安定解析を行った．特に，scaled corrector 法は論文[7, 13]に限らず現在は書籍[9]にもなっているが，弧長制御法を組込んだ Newton-Raphson 法の繰り返し計算のアルゴリズムにおいて，どのように組込んだらよいかについての詳細な説明は少ないと感じている．そのため，その手順についても記した．また，以前に行った updated Lagrange 形式の枠組みで新たな有限要素分割で行った不安定解析の結果と比較し，良好な一致を得ることができた.

次の段階として確率を導入し，updated

Lagrange形式での扱いに限らず, total Lagrange形式の枠組みでのスペクトル確率有限要素法の構築を考えている．また，有限変形弾塑性問題へのスペクトル確率有限要素法の開発を行い，材料物性が確率的に変動する中での不安定解析についても検討してゆこうと考えている．

参考文献

1) 中川英則：接線剛性行列の構築にNISP アプローチを用いた非線形スペクトル確率有限要素法の基礎的研究，土木学会論文集A2(応用力学) , Vol.72, No.2, pp.I_167-I_177 (2016)

2) 中川英則 : 1, 2 次元確率変数を含む弾塑性問題および有限変形問題への NISP 確率有限要素法の適用，土木学会論文集 A2(応用力学) ， Vol.73， No.2， pp.I_245-I_254 (2017)

3) H.Nakagawa : Proposal of Nonlinear Spectral Stochastic Finite Element Method with Tangent Stiffness Matrix Constructed by Non-Intrusive Spectral Projection Method, ICMCSSE2018, CD-ROM distributed , No.134 (2018)

4) S.Acharjee, N.Zabaras：Uncertainty propagation in finite deformations －A spectral stochastic Lagrangian approach－, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , pp. 2289-2312(2006)

5) 岡澤重信，宇佐美勉，野口裕久, 藤井文夫 : 3 次元塑性不安定解析による引張鋼材の局部くびれ挙動，土木学会論文集 No.654/ I-52, pp.285-296 (2000)

6) S.Okazawa, T.Usami, H.Noguchi, and F. Fujii, : Three-Dimensional Necking Bifurcation in Tensile Steel Specimens, J. Engrg. Mech., ASCE, pp. 479-486 (2002)

7) H.Noguchi and S.Okazawa : Scaled corrector and branch-switching in necking problems, Computational Mechanics., 26, pp. 236-242 (2000)

8) 冨田佳宏：塑性不安定現象の数値シミュレーション，材料，第 39 巻，442, pp.1-11(1990)

9) 久田俊明，野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善 (1996)

10) 岡部朋永：テンソル解析からはじめる応用固体力学, コロナ社 (2015)

11) 北川浩, 冨田佳宏：弾塑性大ひずみ解析のための有限要素法，材料，第 29 巻，422， pp.1-13(1980)

12) 藤井文夫 ， 大崎純，池田清宏：構造と材料の分岐力学（計算工学シリーズ 3），コロナ社(2005)

13) 野口裕久，久田俊明 : Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発，日本機械学会論文集（A 編），58 巻 555, pp.2191-2198 (1992)

14) Hughes, T.J.R.：Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.15, pp.1413-1418(1980)

15) 中川英則: 有限変形弾塑性スペクトル確率有限要素法の定式化とそれに関連する分岐解析について，小山工業高等専門学校紀要,第 48 号, pp.7-16(2015)

【受理年月日　2018年 9月14日】