小山工業高等専門学校研究紀要
第33号 (2001)、11－18

ヤングの不等式の拡張とその他の問題

The extensions of Young's inequality and other Problems

河島　博
Hiroshi KAWASHIMA

1．はじめに

ここでは，過去に自分で解いたいくつかの問題の解法を紹介する。但し，最後の定理はモーレーに帰する。ここでは三角関数による初等的証明を与える。この方法だと，普通の著作にある職人芸的な証明よりずっと分かり易いと思われる。

2．ヤングの定理の拡張

まず，ヤングの不等式を取り上げる。

［定理］　$y=f(x)$ は狭義の単調増加連続関数で原点を通るとする。そのとき，$a, b \geqq 0 \Rightarrow$

$$ab \leqq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

等号は，$b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$ の時のみ成立する。

私は，このヤングの不等式を次のように拡張した。

［定理］　$y=f(x), y=g(x)$ は共に原点を通る狭義の単調増加連続関数とする。(但し，$f'(x)$，$g'(x)$ は共に連続で，$g'(x) \fallingdotseq 0$ とする。)〈注：$f(x)$ は区分的に滑らかな関数に拡張してもよい。〉

そのとき，$a, b \geqq 0 \Rightarrow$

$$g(a)b \leqq \int_0^a g'(x)f(x)dx + \int_0^{f^{-1}(b)} g(X)f'(X)dX \qquad (イ)$$

〈注：a, b の範囲は，正確には次の制限がつく。

$M \equiv \lim_{x \to \infty} f(x)$ とおいたとき，

$a \in [0, \infty), b \in [0, M)$ でなければならない。

また，上の ≡ は"＝とおいて定義するという意味で使っている。〉

(注：$g(x) \equiv x$ のとき，(イ)の左 $= \int_0^a f(x)dx$，(イ)の右 $= \int_0^{f^{-1}(b)} Xdf(x) = \int_0^b f^{-1}(x)dx$ (但し $X \equiv f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(X)$ とした)で，ヤングの不等的が出る。)

［証］

$$h(t) \equiv \int_0^t g'(x)f(x)dx +$$
$$+ \int_0^{f^{-1}(b)} g(x)f'(x)dx - bg(t)$$

とおくと，

$$h'(t) = g'(t)f(t) - bg'(t) = g'(t)\{f(t)-b\}$$

となる。

仮定より $g'(t) > 0$ として可。また，$t \gtreqless f^{-1}(b)$ によって，{　} $\gtreqless 0$ であるから，$h(t)$ は $t=f^{-1}(b)$ のとき，最小値をとる。

よって，この最小値が0となることを言えば，全ては完了する。

つまり，$b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$ のとき，$h(a)$ が0になることを言えればよい。

$$h(a) = h\{f^{-1}(b)\} = \int_0^{f^{-1}(b)} g'(x)f(x)dx + \int_0^{f^{-1}(b)} g(x)f'(x)dx - f(a)g(a) = \int_0^a \{f'(x)g(x) + f'(x)g(x)\}dx - f(a)g(a) = [f(x)g(x)]_0^a - f(a)g(a) = 0$$

これより定理は証明された。［了］

3．掛谷の定理の不等式化

次の問題は有名である。$a \gtreqless b \Rightarrow a^{2m+1} \gtreqless b^{2m+1}$（但し，$m$ は自然数）

そして，その証明は次のように行う。
$y = f(x) \equiv x^{2m+1}$ のグラフを考える。

まず，第１象限では，$0 \leqq a < b \Rightarrow a^n < b^n$ が成立する。（但し，n は２以上の自然数）
$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1})$
で，$b-a =$ 正，$b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1} =$ 正より，左辺＝正となるからである。

次に，$n = 2m+1$ として，グラフが原点に関して対称より，結論を出すのである。

私は，グラフの助けを借りずに，代数的に直接に証明出来るのではと考え，次の定理をやはり代数的に証明することにより，上とは違う証明方法を得ることが出来た。

そのために，掛谷の定理を紹介し，合せて私なりの証明をつけてみる。

［定理］　$n \geqq 1, a_0 > a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n > 0 \Rightarrow$
$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$　(イ)
の根の絶対値は１より大である。

〈注：$n = 1$ のとき，$f(z) \equiv a_0 + a_1 z = 0 \Leftrightarrow z = -\dfrac{a_1}{a_1}$

$\therefore |z| = \dfrac{a_0}{a_1} > 1$ で明らかに定理は成り立つ。〉

［証］　n は２以上の自然数としてよい。

$f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n > 0$ であるから，$z = 1$ は根ではない。

故に，$z \neq 1, |z| \leqq 1 \Rightarrow f(z) \neq 0$ を言えば可。
$(z-1)f(z) = zf(z) - f(z)$
$= (a_n z^{n+1} + a_{n-1} z^n + \cdots + a_2 z^3 + a_1 z^2 + a_0 z)$
$-(a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + \cdots + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0)$
（但し，$a_{n+1} \equiv 0$）
$= (a_n - a_{n+1}) z^{n+1} + (a_{n-1} - a_n) z^n + \cdots + (a_0 - a_1) z - a_0$　(ロ)
また，
$0 = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n-1} - a_n) + \cdots + (a_0 - a_1) - a_0$　(ハ)
〈注：(ハ)は(ロ)で $z = 1$ とすれば出るが，直接に確認出来る。（$\because$ 右辺 $= (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0) - (a_{n+1} + \cdots + a_0) = -a_{n+1} = 0$）

(ロ)－(ハ)：$(z-1)f(z) = \sum_{k=1}^{n+1} (a_{k-1} - a_k)(z^k - 1)$　(ニ)

そこで，$z \neq 1, |z| \leqq 1$ と仮定すると，
$|z^k| = |z|^k \leqq 1$
となるから，z^k は複素平面上の原点を中心とする単位円の周または内部にある。（但し $z \neq 1$）

よって，$z^k - 1$ は -1 を中心とする単位円の周または内部である。（但し $z - 1 \neq 0$）

よって，実部の記号 R_e（虚部は I_m）を使って，
$R_e\{(z-1)f(z)\} = \sum_{k=2}^{n+1} (a_{k-1} - a_k) R_e(z^k - 1) +$
$+ (a_0 - a_1) R_e(z-1)$　(ホ)
この(ホ)の第１項は０以下，第２項は $z-1 \neq 0$ であるから，負である。〈注：$R_e(z^k - 1) \leqq 0$（$k \geqq 2$ のとき）〉
$\therefore R_e\{(z-1)f(z)\} < 0$
$\therefore (z-1)f(z) \neq 0$
$\therefore f(z) \neq 0$（$z \neq 1, |z| \leqq 1$）

よって，$|z| \leqq 1 \Rightarrow f(z) \neq 0$（$\because f(1) \neq 0$ より）対偶を取って $f(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$　　［了］

（注：上の証明は，本質的には，モノグラフの複素数（高橋　正昭　著）1968　による。　改訂版 1990　には出ていない。）

いよいよ，問題の定理が書き出せることになった。

［定理］　$y = f(x) \equiv 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{2m-1} x^{2m-1} + a_{2m} x^{2m}$ は，
$1 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_{2m-1} \geqq a_{2m}$（但し $a_{2m} > 0$）と
$2a_{2k} \geqq a_{2k-1} + a_{2k+1} (k = 1, 2, \cdots, m)$（但し $a_{2m+1} = 0$）
の２つの条件のもとに，任意の実数 x についてf(x) はいつも正である。

［証］Case 1　$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 1$ よりよい。
Case 2　$x \in [-1, 0)$ のとき，$t \equiv -x$ とおいて
$g(t) \equiv f(x) = f(-t) = 1 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + \cdots$
$+ (a_{2m-2} - a_{2m-1} t) t^{2m-2} + a_{2m} t^{2m}$
で，$k = 1, 2, \cdots, m-1$ に対して $a_{2k} - a_{2k+1} t \geqq 0$ より $g(t) \geqq a_{2m} t^{2m} > 0$ でよい。

〈注：$g(1) = (1 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots$
$+ (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m} \geqq a_{2m} > 0$ でよい。〉

問題は，次のCase 3 である。

Case 3　$x \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow t \in (1, \infty)$ のとき

$$g(t) = 1 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + a_4 t^4 - a_5 t^5 + \cdots - a_{2m-1} t^{2m-1} + a_{2m} t^{2m}$$

$$tg(t) = t - a_1 t^2 + a_2 t^3 - a_3 t^4 + a_4 t^5 - \cdots + a_{2m-2} t^{2m-1} - a_{2m-1} t^{2m} + a_{2m} t^{2mt}$$

$$\therefore (1+t)g(t) = 1 + (1-a_1)t - (a_1 - a_2)t^2 + (a_2 - a_3)t^3 - (a_3 - a_4)t^4 + (a_4 - a_5)t^5 - (a_5 - a_6)t^6 + \cdots - (a_{2m-1} - a_{2m})t^{2m} + (a_{2m} - a_{2m+1})t^{2m+1}$$

$$= 1 + (1-a_1)t + t^2\{(a_2 - a_3)t - (a_1 - a_2)\} + t^4\{(a_4 - a_5)t - (a_3 - a_4)\} + \cdots + t^{2m}\{(a_{2m} - a_{2m+1})t - (a_{2m-1} - a_{2m})\} \geqq 1$$

となり，（$\because$ 仮定により $(a_{2k} - a_{2k+1})t \geqq a_{2k-1} - a_{2k} \geqq 0$）で言えた。（注：$k = 1, 2, \cdots, m$ のとき）

［了］

〈注：これより，$a_k \equiv 1 (k = 1, 2, \cdots, 2m)$ のとき $y = f(x) \equiv 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2m} > 0$ であるからこれを使って，$a \gtreqless b \Rightarrow a^{2m+1} \gtreqless b$ がグラフを使わないで，証明できることになった。〉

［定理の系］$a \gtreqless b \Rightarrow a^{2m+1} \gtreqless b^{2m+1}$

［証］$a^{2m+1} - b^{2m+1} = (a-b)(a^{2m} + a^{2m-1}b + \cdots + b^{2m})$
ここで，$b = 0$ のときは定理は明らかであるから，$b \fallingdotseq 0$ として，$x \equiv \dfrac{a}{b}$ とおくと，

$$a^{2m+1} - b^{2m+1} = (a-b)b^{2m}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2m})$$

所で，右辺の最後の因数は正であるから，上の定理が言えたことになった。［了］

〈注１：上の定理の２条件の後のものをはずせるかどうかは今の所は私には分かっていない。
C.G.で色々やってみると，案外簡単に出るかも知れない。〉

〈注２：$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = 0$ なら，下の条件は勿論のこと成り立つが，これはあまりにも自明である。〉

４．整数辺三角形について

３辺が共に整数となる三角形を“整数辺三角形”と定義する。

次の定理はよく知られている。

［定理］３辺がピタゴラス数である三角形が，特に３辺の最大公約数が１であるならば，直角の頂点から斜辺に下した垂線だけが分数で，他の頂点から下した垂線は２つとも整数となる。

［証］初等的に知られているように，３辺 a, b, c を既約なピタゴラス数とすれば，互いに素な u，v を用いて

$$a = u^2 - v^2,\ b = 2uv,\ c = u^2 + v^2$$

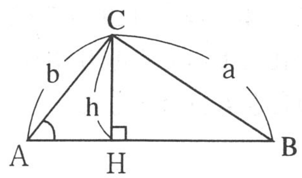
の形で表わされる。（但し $\angle C = 90°$ とした）

C から対辺 c に下した垂線の長さ h を求めてみると，

$$\sin A = \frac{h}{b} = \frac{a}{c} \text{ より } h = \frac{ab}{c}$$

つまり $h = \dfrac{2uv(u^2 - v^2)}{u^2 + v^2}$

でよい。



A からの垂線は b，B からの垂線は a で，残りの２つは整数でよい。［了］

このことを踏まえて，次のことを問題にする。

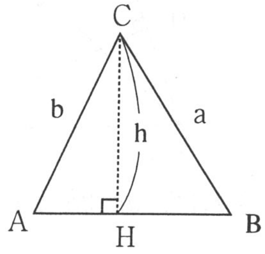
ピタゴラス三角形とは，三辺 a, b, c が整数で，かつ $a^2 + b^2 = c^2$ の関係をみたす三角形である。それにならって，ヘロン三角形とは三辺が整数で，かつその面積が整数となる三角形とする。

そのとき，次の定理が成り立つ。

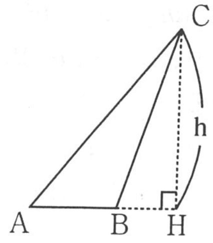
［定理］ヘロン三角形は２つのピタゴラス三角形の和ないしは差で表わされる。（但し，垂線の１つは整数で，ピタゴラス三角形は除く。）

［証］

Case 1 の図



Case 2 の図



まず，仮定より図のhは整数とする。

Case 1 の場合，$\overline{AH}=b\cos A$ であるが，仮定より$\cos A$は有理数。よって，$\overline{AH}$は有理数である。所が$\overline{AH}=\sqrt{b^2-h^2}$ であるから，$\overline{AH}$は分数ではない。（∵ 分数^2 ≒ 整数より）同様にして$\overline{BH}$も整数が言えるから，$\triangle ACH, \triangle BCH$はピタゴラス三角形でよい。（この場合は和となる。）

Case 2 の場合，$\overline{AH}=b\cos A$ より$\overline{AH}$は有理数はよい。よってCase 1 と同じようにして$\overline{AH}$は整数が言える。同様にして$\overline{BH}=b\cos(180°-B)=-b\cos B$ より$\overline{BH}$の整数も言える。〈注：$\overline{BH}=\overline{AH}-c$ からも出る。〉よって，$\triangle ACH, \triangle BCH$は共にピタゴラス三角形でよい。（この場合は差となる。）

〈注：括弧の但し書きは必要である。
シェルピンスキー「ピタゴラスの三角形」1961 によれば，$a=65, b=119, c=180$ のとき，$S=1638$ であるが $2S=3276=2^2\times3^2\times7\times13$ は，$65=5\times13$，$119=7\times17$，$180\times2^2\times3^2\times5$ のいずれによっても割り切れない。つまり，どの垂線の長さも分数となる。〉

いよいよ，次の定理が出せる段階となった。その前に，念の為に“垂線辺”を定義する。

三角形の頂点から対辺に下した垂線の足と元の頂点とで出来る線分を垂線辺というのである。

[定理] ピタゴラス三角形でないヘロン三角形において，少なくとも 2 つの垂線辺の長さが整数であるならば，三辺の最大公約数は 1 でない。

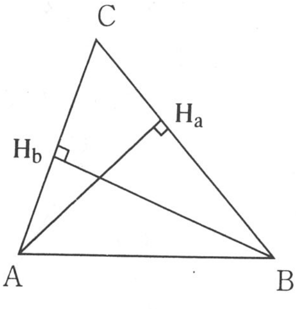
つまり対偶を言えば，三辺の最大公約数 1 であるならば，垂線の長さが整数のものはあっても高々 1 個である。

[証] a, b, c に関する垂線辺をh_a, h_b, h_cとかく。

h_a, h_bが共に整数とする。

$2S=ah_a, 2S=bh_b$　　(イ)

により，$a|2S$, $b|2S$ となる。



これより $(a, b) \fallingdotseq 1$ となる。それは，もし $(a, b)=1$ とすれば，$ab|2S$ が言えるから $2S \geqq ab$ となる。

一方，$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ により

$2S=ab\sin C<ab$（∵ $C \fallingdotseq 90°$ より）で矛盾が出るからである。

よって $d\equiv(a, b)$ かつ $d \fallingdotseq 1$ とする。すると，(イ)により $2S$ は d で割り切れる。

よって，ヘロンの公式により

$4S=\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)} \Leftrightarrow$

$4(2S)^2=(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)\times$

$(a+b-c)=-4(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)$

により，$1 \fallingdotseq p|(a, b)$ となる素数 p により c は割り切れるから〈注：p は d の素因数の 1 つ〉

$p|(a, b, c)$ つまり $(a, b, c) \fallingdotseq 1$　　[了]

〈注：$\mathrm{mod}\,p$ を取ると

$4\times0\equiv c\times c\times c\times(-c)=-c^4(\mathrm{mod}p) \Leftrightarrow$

$c^4\equiv0(\mathrm{mod}p)$ により $p|c$ が言える。〉

（注：本により，ヘロン三角形の中にはピタゴラス三角形を入れないものもあるが，この論文では入れることにした。勿論，ピタゴラス三角形はヘロン三角形でもある。）

さらに，これをまとめて

[定理] ヘロン三角形の三辺の最大公約数が 1 であるならば，垂線辺の長さが整数のものは存在しても高々 2 である。そして存在するものが 2 個のときに限ってピタゴラス三角形になる。

〈注：垂線辺の長さが整数となるものが，1 個だけとなる既約ヘロン三角形として次のものを例示する。

$a=13$, $b=14$, $c=15$

「高校数学公式活用事典」旺文社　1994〉

5．モーレーの定理の１つの初等的証明

この定理をまず掲げよう。この証明法は既知の著作では職人芸的な証明しか，(それも三角形の内部の場所での正三角形についてのみ)，扱っていない。

ここでは，外部に出来る正三角形の場合の証明も扱うことにする。

［定理］三角形の各辺の両端における内角の３等分線の内，この辺に近いもの同志により出来る３交点は，１つの正三角形を作る。外角の場合にも同じことが言える。

これを証明する前に，２，３の公式を事前に準備しよう。

［公式１］

$$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)$$

［証］

左 辺 $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = -4\sin\theta(\sin^2\theta - \frac{3}{4})$

$= -4\sin\theta(\sin^2\theta - \sin^2 60^\circ)$

$= -4\sin\theta\sin(\theta+60^\circ)\sin(\theta-60^\circ)$

（∵ $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ により）　［了］

［公式２］

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

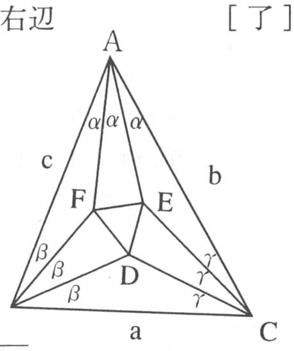
$= \sin^2(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \sin^2(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$

［証］

左辺 $= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 - 2\sin\alpha\sin\beta \times (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = (\sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta) - (2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta)$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha \times \sin^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) + \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta =$ 右辺　［了］

［内部の時の証］



図のように $\alpha \equiv \frac{1}{3}\angle A$, $\beta \equiv \frac{1}{3}\angle B, \gamma = \frac{1}{3}\angle C$ と取り，$\triangle DEF$ を決めて，証明すると，

$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 - 2\overline{AE}\,\overline{AF}\cos\alpha$,

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\sin(\alpha+\gamma)} \Leftrightarrow \overline{AE} = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$,

同様にして $\overline{AF} = \dfrac{c\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ が出る。

また，$\dfrac{a}{\sin 3\alpha} = \dfrac{b}{\sin 3\beta} = \dfrac{c}{\sin 3\gamma} = 2R$ を使って，

$\overline{AE} = \dfrac{2R\sin 3\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} =$

$\dfrac{2R\times 4\sin\beta\times\sin(60^\circ+\beta)\sin(60^\circ-\beta)\sin\gamma}{\sin(60^\circ-\beta)} =$

〈注：$\alpha+\beta+\gamma = 60^\circ$ より $\alpha+\gamma = 60^\circ-\beta$〉

$= 8R\sin\beta\sin(60^\circ+\beta)\sin\gamma$

同様にして

$\overline{AF} = 8R\sin\gamma\sin(60^\circ+\gamma)\sin\beta$

これらを最初の式に代入すると，

$\overline{EF}^2 = (8R)^2\sin^2\beta\sin^2\gamma\{\sin^2(60^\circ+\beta) + \sin^2(60^\circ+\gamma) - 2\times\sin(60^\circ+\beta)\sin(60^\circ+\gamma)\cos\alpha\}$

所で

$\cos\alpha = \cos(60^\circ-\beta-\gamma) = \cos[180^\circ - \{(60^\circ+\beta) + (60^\circ+\gamma)\}] = -\cos\{(60^\circ+\beta)+(60^\circ+\gamma)\}$ であるから公式により $\{\ \} = \sin^2\{(60^\circ+\beta) + (60^\circ+\gamma)\} = \sin^2\{120^\circ + (\beta+\gamma)\} = \sin^2\{120^\circ + (60^\circ-\alpha)\} = \sin^2(180^\circ-\alpha) = \sin^2\alpha$

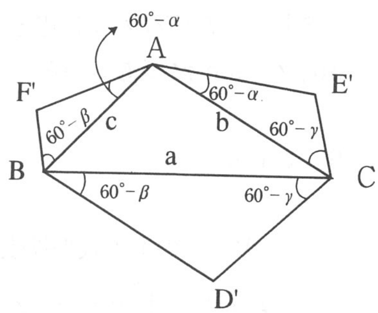
$\therefore \overline{EF}^2 = (8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2 \Leftrightarrow$

$\overline{EF} = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

つまり，３辺とも $8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ であるから，$\triangle DEF$ は正三角形である。　▱

〈注：▱は，途中の１区切を表わす。〉

［外部の時の証］



図のように，外側に出来る三交点は内側に出来る場合と区別するために，dash (′)をつけることにする。また,内部の場合との比較の為に，

$\alpha' \equiv 60^\circ - \alpha$,

$\beta' \equiv 60^\circ - \beta, \gamma' \equiv 60^\circ - \gamma$

も導入する。

$\overline{E'F'}^2 = \overline{AE'}^2 + \overline{AF'}^2 - 2\overline{AE'}\,\overline{AF'}\cos\angle E'AF'$

（但し $\angle E'AF' = 120^\circ + \alpha = 180^\circ - (60^\circ - \alpha) = 180^\circ - \alpha'$）

〈注：$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ - (\alpha+\beta+\gamma) =$

$180° - 60° = 120°$ 〉

$$\frac{\overline{AE'}}{\sin\gamma'} = \frac{b}{\sin(120° - \alpha - \gamma)} = \frac{b}{\sin(\alpha' + \gamma')} \Leftrightarrow$$

$$\overline{AE'} = \frac{b\sin\gamma'}{\sin(\alpha' + \gamma')}$$

同様にして $\overline{AF'} = \dfrac{c\sin\beta'}{\sin(\alpha' + \beta')}$ が出る。

所が $\sin 3\alpha = \sin(180° - 3\alpha) = \sin 3(60° - \alpha) = \sin 3\alpha'$ 等により $b = 2R\sin B = 2R\sin 3\beta'$ であるから

$$\therefore \overline{AE'} = \frac{2R\sin 3\beta'\sin\gamma'}{\sin(120° - \beta')} =$$

$$\frac{8R\sin\beta'\sin(60° + \beta')\sin(60° - \beta')\sin\gamma'}{\sin(60° + \beta')} =$$

（$\because \sin(120° - \beta') = \sin\{180° - (120° - \beta')\} = \sin(60° + \beta')$ より）

$= 8R\sin\beta'\sin\gamma'\sin(60° - \beta')$

同様にして

$\overline{AF'} = 8R\sin\gamma'\sin\beta'\sin(60° - \gamma')$

これらを最初の式に代入すると

$\overline{E'F'} = (8R)^2\sin^2\beta'\sin^2\gamma'\{\sin^2(60° - \beta') + \sin^2(60° - \gamma') + 2\times\sin(60° - \beta')\times\sin(60° - \gamma')\times\cos\alpha'\}$

所で $\cos\alpha' = \cos(120° - \beta' - \gamma') = \cos\{(60° - \beta') + (60° - \gamma')\}$ であるから公式2により

$\{\} = \sin^2\{(60° - \beta') + (60° - \gamma')\} = \sin^2\alpha'$

$\therefore \overline{E'F'}^2 = (8R\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma')^2 \Leftrightarrow$

$\overline{E'F'} = 8R\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'$

〈注： $\alpha' = 60° - \alpha, \beta' = 60° - \beta, \gamma' = 60° - \gamma$，また $\alpha + \beta + \gamma = 60°$ である。〉

つまり，$\triangle D'E'F'$ は3辺とも長さが $8R\times\sin\alpha'\times\sin\beta'\times\sin\gamma'$ であるから，正三角形である。［了］

6．おわりに

（1°）ヤングの不等式の拡張定理について

(イ) $\Leftrightarrow g(a)b \leqq \int_0^a g'(x)f(x)dx + \int_0^b g\{f^{-1}(x)\}dx$

（$\because X = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(X)$ とおいたから）

この方が，一般に使われているヤングの定理により近い。〈注：$g = id \Leftrightarrow g(x) \equiv x$ の時が，ヤングの定理になる。〉

(イ) $\Leftrightarrow g(B)f(A) \leqq \int_0^A f'(x)g(x)dx + \int_0^B f(x)g'(x)dx$

$\Leftrightarrow f(a)g(b) \leqq \int_0^a f'(x)g(x)dx + \int_0^b f(x)g'(x)dx$ (ロ)

〈注：(イ)で

$a = B, b = f(A), X = x$ として，真ん中の式が出る。〉

［(ロ)の証］$h(t) \equiv$

$\int_0^t f'(x)g(x)dx + \int_0^b f(x)g'(x)dx - f(t)g(b)$

とおく。

まず，$h(b) = 0$ が言える。

$h(b) = \int_0^b f'(x)g(x)dx + \int_0^b f(x)g'(x)dx -$

$f(b)g(b) = \int_0^b \{f(x)g(x)\}'dx - f(b)g(b)$

$= [f(x)g(x)]_0^b - f(b)g(b) = \{f(b)g(b) - f(0)g(0)\} - f(a)f(b) = -f(0)g(0) = 0$

でよい。

また，$h'(t) = f'(t)g(t) - f'(t)g(b) = f'(t)\{g(t) - g(b)\}$ ここで，$f'(t) > 0$ としてよいから $t \gtreqless b \Rightarrow g(t) \gtreqless g(b)$ より $h(t)$ は $t = b$ で最小値0をとる。また，(ロ)の等号条件は $a = b$ で，その時に限る。［了］

〈注：$a = 0$ or $b = 0$ のときは，(ロ)の左辺 $= 0$ より(ロ)の成立するのは明らかで，等号（=）$\Leftrightarrow a = b = 0$ も明白であるから，$a, b > 0$ のときだけを考えればよい。そして，上の計算から，$= \Leftrightarrow a = b$ も言えて，全てが完了している訳である。〉

(ロ)の式の応用をしてみる。

$f(x) \equiv x^\theta, g(x) \equiv x^\Theta$（但し θ, Θ は正の定数）とおくと

$f'(x) = \theta x^{\theta-1}, g'(x) = \Theta x^{\Theta-1}$ であるから，(ロ)の左辺 $= a^\theta b^\Theta$，(ロ)の右辺は $\int_0^a = \int_0^a \theta x^{\theta-1}x^\Theta dx$

$$= \theta\left[\frac{x^{\theta+\Theta}}{\theta+\Theta}\right]_0^a = \frac{\theta}{\theta+\Theta}a^{\theta+\Theta},$$

同様に $\int_0^b = \dfrac{\Theta}{\theta+\Theta}b^{\theta+\Theta}$

$$\therefore a^\theta b^\Theta \leqq \frac{\theta}{\theta+\Theta}a^{\theta+\Theta} + \frac{\Theta}{\theta+\Theta}b^{\theta+\Theta}$$

〈注：$= \Leftrightarrow a = b$〉

特に，$\theta + \Theta = 1 \Leftrightarrow \Theta = 1 - \theta$ のとき

$a^\theta b^{1-\theta} \leqq \theta a + (1-\theta)b$（但し $0 < \theta < 1$）

〈注：$= \Leftrightarrow a = b$〉

今迄の分析から，次の予想定理が考えられる。

［予想定理］$f_i(i=1,2,\cdots,n)$ は，区間 $I\equiv[0,+\infty)$ で狭義の単調増加な連続関数で，全て原点を通るとする。かつ $f_j'(x)\neq 0$ on $I^0=(0,\infty)$，かつ I^0 で連続 $(j=1,2,\cdots,n-1)$ とする。〈注：$f_n'(x)$ は I^0 上で連続だけを仮定する。〉このとき，$a_k\in I^0(k=1,2,\cdots,n)$ について，次の不等式が成り立つ。

$$f_1(a_1)f_2(a_2)\cdots f_n(a_n)\leqq\sum_{k=1}^{n}\int_0^{a_k}f_1(x)f_2(x)\cdots f_k'(x)\cdots f_n(x)dx \qquad (s)$$

ここで等号条件 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$ である。

(s) は $n=2$ の時はよいから，$n=3$ の時を考えて見る。表現を簡単にして

$$f(a)g(b)h(c)\leqq\int_0^a f'(x)g(x)h(x)dx+\int_0^b f(x)g'(x)h(x)dx+\int_0^c f(x)g(x)h'(x)dx \qquad (s)_3$$

［略証］ $u(s,t)\equiv\int_0^s f'(x)g(x)h(x)dx+\int_0^t f(x)g'(x)h(x)dx+\int_0^c f(x)g(x)h'(x)-f(s)g(t)h(c)$

とおくと，$u(c,c)=0$ は簡単に出る。また，$u(s,c)$ は $s=c$ の時のみ，最小値0を取ることも分かる。$u_s=0$ かつ $u_t=0\Leftrightarrow s=t=c$ が出るかが，問題となる。

$$u_s=0\Leftrightarrow f'(s)g(s)h(s)=f'(s)g(t)h(c)\Leftrightarrow g(s)h(s)=g(t)h(c)\Leftrightarrow\frac{g(t)}{g(s)}=\frac{h(s)}{h(c)}=k$$

とおく。

$u_t=0\Leftrightarrow f(t)g'(t)h(t)=f(s)g'(t)h(c)\Leftrightarrow f(t)h(t)=f(s)h(c)\Leftrightarrow\dfrac{f(s)}{f(t)}=\dfrac{h(t)}{h(c)}=\ell$ とおく。

Case 1．$k>1$ だと $s>c$ となり，$t>s$ となる。一方，これより $\ell<1$ となり，$t<c$ となる。〰〰により $t<s$ で，これから矛盾が出る。

Case 2．$k<1$ のときからも，矛盾が出る。よって，$k=1$，ゆえに $\ell=1$ となり $t=s=c$ が出る。つまり $n=3$ の時が言えた。 ［略証了］

〈注：$n=3$ の時は，2変数の微分を使う訳だが，まだ本質的な分析が抜けているようである。〉

(s) の式が正しいとすると，2，3の著しい不等式が得られる。

まず，$f_k(x)\equiv f(x)$ のとき

左辺 $=f(a_1)f(a_2)\cdots f(a_n)$，右辺 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^{a_k}\{f(x)\}^{n-1}df(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\{f(x)\}^n}{n}\right]_0^{a_k}=\frac{\{f(a_1)\}^n+\{f(a_2)\}^n+\cdots+\{f(a_n)\}^n}{n}$

これは，幾何平均 $\leqq$ 算術平均で $a_k\to\{f(a_k)\}^n$ としたものである。

次に，$f_k(x)\equiv x^{\theta_k}$ としたとき（但し $\theta_k>0$）

左辺 $=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a_k^{\theta_k}$，右辺 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^{a_k}\theta_k x^{\theta_1}x^{\theta_2}\cdots x^{\theta_k-1}\cdots x^{\theta_n}dx=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\int_0^{a_k}x^{(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)-1}dx=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\left[\frac{x^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}\right]_0^{a_k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta_k}{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k}a_k^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k}$$

（2^0）掛谷の定理の不等式化について

問題の定理の系だけを解決するだけなら，もっと使い易い条件の定理が設定できる。

［定理］ $f(x)\equiv 1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{2m-1}x^{2m-1}+a_{2m}x^{2m}$ において，$a_{2m}>0$，他の係数は0か正であり，かつ $a_{2k}\geqq a_{2k-1},a_{2k+1}\Rightarrow f(x)>0$（$\forall x\in\boldsymbol{R}$）

（但し $k=0,1,2,\cdots,m$ かつ $a_0=1,a_{-1}=a_{2m+1}=0$ とする）

［証］Case 1．$x\geqq 0\Rightarrow f(x)\geqq 1$ でよい。

$x<0$ のときは，$x\equiv -t\Leftrightarrow t=-x$ として $g(t)\equiv f(-t)=1-a_1t+a_2t^2-a_3t^3+a_4t^4-\cdots+a_{2m}t^{2m}$ とおくと，

Case 2．$t\in(0,1)\Leftrightarrow x\in(-1,0)$ のとき

$g(t)=(a_0-a_1t)+t^2(a_2-a_3t)+t^4(a_4-a_5t)+t^6(a_6-a_7t)+\cdots+t^{2m-2}(a_{2m-2}-a_{2m-1}t)+t^{2m}(a_{2m}-a_{2m+1}t)>0$

（$\because a_{2k}-a_{2k+1}t\geqq a_{2k}-a_{2k+1}\geqq 0$ で，末項 $=a_{2m}t^{2m}$ は正であるから）

〈注：$g(1)=(a_0-a_1)+(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+(a_6-a_7)+\cdots+(a_{2m-2}-a_{2m-1})+a_{2m}\geqq a_{2m}>0$〉

Case 3．$t\in[1,\infty)\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]$ のとき

$g(t)=1+t(a_2t-a_1)+t^3(a_4t-a_3)+t^5(a_6t-a_5)+\cdots+t^{2m-1}(a_{2m}t-a_{2m-1})\geqq 1$（$\because$ 初項 $=a_0=1$，

$a_{2k}t-a_{2k-1} \geqq a_{2k}-a_{2k-1} \geqq 0$ であるから）
〈注： $g(1)=1+(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)$
$+\cdots+(a_{2m}-a_{2m-1}) \geqq 1=a_0$〉　　　　［了］

なお，整数辺三角形，モーレーの定理については，今の所は特に言うことはない。

参考文献

柴田　敏男　『位相解析』　築摩書房　1970
杉浦　光夫　他　『解析演習』　東大出版　1989
高橋　正明　『複素数』　科学新興社　1968
シェルピンスキー　『ピタゴラスの三角形』
（訳　銀林　浩）　東京図書　1961
矢野　健太郎　『幾何の有名な定理』
共立出版　1981
清宮　俊雄　『初等幾何学』　裳華房　1972
岩瀬　重雄　『高校数学公式活用事典』
（監修　本部，一松）　旺文社　1994

「受理年月日　2000年９月29日」