

周波数推定法による推定誤差の検討

石山 亮*・灘谷 演***・久保 和良****

Study of Errors Caused by Frequency Estimation Techniques

Ryo Ishiyama*, Hiroshi Nadatani***, Kazuyoshi Kubo****

1. はじめに

正弦波の標本値から周波数を推定する方法に Prony法とBinary法がある。本研究では標本値に雑音が入った場合の、2つの推定法での周波数推定誤差を検討した。

2. 原理

2.1 Prony法による正弦波周波数推定¹⁾

正弦波の標本値は、周波数を f 、標本化周波数を f_s 、定数を n 、他の正弦波定数を A 、 θ 、 d とすると次式となる。

$$x(n) = A \cos(2\pi fn/f_s + \theta) + d \quad (1)$$

$n=0,1,2,3$ とした4点の標本値から次の a と Z_r を計算し、正弦波の周波数を求めることができる。

$$a = \frac{x(0) - x(3)}{x(1) - x(2)} \quad (2)$$

$$Z_r = \frac{a-1}{2} \quad (3)$$

$$f = \frac{f_s \left\{ \arg \left(Z_r + j\sqrt{1-Z_r^2} \right) \right\}}{2\pi} \quad (4)$$

2.2 Binary法による正弦波周波数推定¹⁾

f_s を変えながら標本化を行い、最終的に $f_s = 4f$ に近づけながら周波数を推定する方法がBinary法である。まず標本化密度 k を次式で定義する。

$$k = f_s / (2f) \quad (5)$$

(3)式に(2)式と $n=0,1,2,3$ の(1)式を代入すれば

$$Z_r = \frac{x(3) - x(2) + x(1) - x(0)}{2\{x(2) - x(1)\}} = \cos(\pi/k) \quad (6)$$

が得られる。 Z_r は $k=2$ の時に正負が反転する。

標本化、 Z_r の算出と正負判定を繰り返し、2進数のビット列 $B = (0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_p)$ を逐次決定していくと、最終的に $k=2$ に漸近した標本化周波数 f_s

は次式で与えられる。

$$f'_s = f_c \cdot B \quad (7)$$

ここで f_c は初回標本化周波数である。周波数推定値 f_e は次式によって計算できる。

$$f_e = f'_s / 4 = f_c \cdot B / 4 \quad (8)$$

3. 研究方法

標本化した値に雑音として一様乱数を重畳した。この時、正弦波振幅と雑音振幅の比を雑音比率と呼ぶことにする。雑音比率を一定として毎回別系列の雑音を重畳した標本値に対して100回周波数推定を行い、その推定値の平均と真値との相対誤差を誤差率と呼ぶことにする。

4. 結果と考察

4.1 Prony法による雑音比率と誤差率

Fig.1にProny法による正弦波周波数推定時の雑音比率と誤差率の関係を示す。雑音比率 $n_r \leq 0.1\%$ で誤差率は標本化密度 k に応じて0.01から1に急上昇し、さらに n_r の増大に伴い誤差率は飽和した。 k が大きい方が誤差率は大きくなった。

k が大きいと、(2)式の分母分子それぞれの値が雑音成分に支配される。これが雑音の混入による誤差の発生原因であり、雑音比率によって誤差率が変化する原因であると考えられる。また、 k によって飽和する誤差率が異なるのは、 k により a の値の大小が決まり、 a に対する雑音支配の割合が変わるからと考えられる。

4.2 Binary法による雑音比率と誤差率

Fig.2にBinary法による正弦波周波数推定時の雑音比率と誤差率の関係を示す。雑音比率 n_r の増大により、誤差率は2段階の上昇を示した。前半の

誤差傾向は初回標本化密度 k_c による差が見られず、後半では k_c によって異なる n_r で1から0.1程度に上昇し飽和した。前半の誤差率は概ね0.01以下であるからProny法と比較すると雑音耐性が認められる。

この原因は次の3段階を追うことで理解できる。

第1に雑音の混入により Z_r の計算値が雑音成分に支配され正負が反転すれば、 B の決定を誤るので周波数推定値の誤差の原因となる。Fig.3に B 決定中の Z_r の変化を示した。例えば b_{10} では n_r に応じて Z_r の符号が反転するので、雑音の影響によりビット決定を誤ると考えられる。

第2にFig.3にあるように重みの小さいビットでは Z_r が小さいため、小さい雑音比率でも雑音成分に支配されやすく、これらのビットが誤差の原因となる確率が高い。また重みの大きいビットでは、 Z_r が大きいいため大きい雑音比率においてこれらのビットが誤差の原因となる確率が高くなる。すなわち、雑音比率により誤差の原因となるビット位置が変わるということである。

第3に雑音比率が小さい時は重みの小さいビットでの誤りに起因するため、小さな誤差となり、これが1回目の誤差率上昇となって現れていると考えられる。さらに雑音比率が大きくなり重みの大きいビットの方に誤りの原因が移るとFig.4にあるように各ビットの重みは指数関数的に配分されているため大きな誤差となって現われ、これが2回目の誤差率上昇を引き起こしていると考えられる。

5. 結論

Prony法とBinary法の誤差発生傾向と、雑音耐性の違いを確認した。Binary法の良好な雑音耐性は、Binary法の逐次推定方式自体がもたらしていることを述べた。

参考文献

1) 灘谷 演:”正弦波信号解析法の評価,”平成11年度 卒業論文,pp.1-8 (1999)

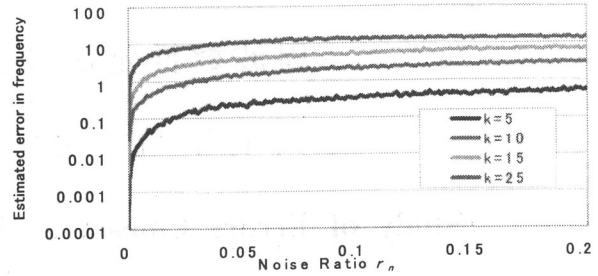


Fig.1 Estimated frequency error by a change of noise ratio by Prony Method.

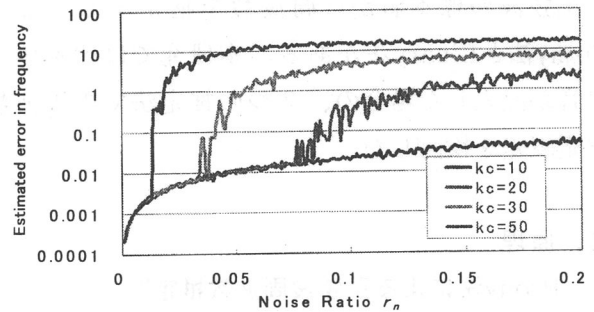


Fig.2 Estimated frequency error by a change of noise ratio with bit number $p=32$ by Binary Method.

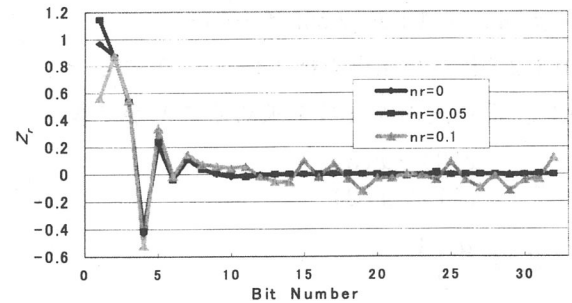


Fig.3 Change of “ Z_r ” by a change of bit number p .

Bit number	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...	b_p
Weight	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$...	$1/2^p$
Order of	1	2	3	4	5	...	p
bit determination							

Fig.4 Notion of Binary Method’s parameters.

※ 小山高専電子システム工学専攻科
 ※※ 小山高専電子制御工学科1999年度卒業生 (現在 東京農工大学)
 ※※※ 小山高専電子制御工学科 kubo@oyama-ct.ac.jp