小山工業高等専門学校研究紀要
第 35 号 (2002), 113 − 122

制御理論講話（その3）
— むだ時間 —

西脇昭雄，黒須　茂，山崎敬則*，野田善之**

A Lecture on Control Theory (Part3)
— Dead Time —

Akio NISHIWAKI, Shigeru KUROSU, Takanori YAMAZAKI*, Yoshiyuki NODA**

1．はじめに

普通，実システムにおいては操作に時間おくれが存在する。この時間おくれをむだ時間という。プラントの時定数に比較してむだ時間が小さければ，これを無視しても実用上ほとんど問題にならない。しかしながら，無視できないときは，フィードバック制御系の設計において，難しさが倍増する。本稿では，むだ時間を含む制御系のいくつかの問題を解説する。

****

長屋の住人である熊さんと八つあんが，仕事にあぶれたのを口実にして，今日もご隠居さんのところに，油を売りにやってきました。

ご隠居「どうしたい。しばらく顔を見せないから具合でも悪くしたのかって心配していたんだが，なんだか二人とも元気ないね」

八つあん「どうもこうもありませんぜ。こう仕事がないんじゃあ，わしらのような油虫は干上がってしまいまっせ」

熊さん「ご隠居さんがよくいってましたね。やることはつねにある。それができないから暇になってしまう。職人が暇をもて余すのは能力の問題じゃない。職人に仕事をやらせる責任をとる人がいないからだ。本当にお上もなんとか考えてくれないと，しまいには暴動ですぜ」

八つあん「仕事という仕事は工賃の安い中国や東南アジアへいっちゃったから，みんな暇になっちゃった。役人も従来からの「減点法」によって月給が決まるもんだから，失敗を恐れて手をこまねいているのが一番幸せっていうわけなんですよ」

熊さん「ご隠居，なにか長屋の修繕でも…やらせてもらえませんかね」

ご隠居「おいおい，この間駐車場のライン引きを頼んだばかりじゃないか。仕事とお金の相談ばかりは，わしにもちこまれても困るね」

熊さん「ところで，ご隠居さん。いま，何をやっているんですかい？」

*）　平成4年度機械工学科卒業(現東京都立高専助手)
**）平成12年度電子システム専攻科卒業生(現豊橋技科大修士課程)

ご隠居「わしは年令も年令だからね。新しい制御理論はやめにして，もう最後まで

PID 調節器の調整問題

でも片ずけて，冥土に行くつもりじゃよ。しかも，プラントの伝達関数は

1 次おくれ＋むだ時間系

に限って，話をするつもりじゃ」

八つあん「ご隠居，な…なんです。そのむだ時間ってのは？」

ご隠居「時間おくれのことだよ。復習しようか。Laplace 変換の定義で，時間領域での推移定理というのがあって，信号のおくれ を Laplace 変換で表わすと？」

八つあん「Laplace 変換するときに時間軸がずれるから…原信号 $f(t)$ の Laplace 変換に指数関数が前につきます。つまり，

$$\mathrm{L}[f(t-L)] = e^{-sL}\mathrm{L}[f(t)] \tag{1}$$

ですな」

ご隠居「そうそう。時間おくれ L は伝達関数 e^{-Ls} に対応するから，これをむだ時間要素という」

熊さん「なーんだ。それなら制御工学のはじめに習いましたよ。なんで『むだ時間』なんて妙な名前なんですか？」

ご隠居「うーん。英語の dead time を意訳したんだろうね。名前が妙かどうかは別にして，むだ時間要素を含む系には実際いろいろと巧妙かつ奇妙な性質があるよ」

八つあん「実際には，どんなプロセスにむだ時間要素があるんですかい？」

ご隠居「いろいろあるがね。つぎの 3 つが代表的なむだ時間要素といえると思うが…

1）操作おくれ

操作信号を加えてから，出力されるまでに時間的おくれが存在する。これを操作おくれという。おもに信号の伝達おくれや，不感帯のために生じる。

2）輸送おくれ

物質の輸送にともないおくれる現象をいう。ベルトコンベアによる輸送，パイプラインによる流体の輸送によるおくれである。各種熱交換器も広い意味で輸送おくれタイプである。

3）化学反応おくれ

化学反応プロセスなどでは，化学反応を起こすのに要する時間が状態のおくれの原因となる」

熊さん「具体的に物理モデルを示してもらえませんかね？」

ご隠居「**Fig.1**に示すような全体の時定数 T を n 個の 1 次系に分離したシステムを考える。n を増していって，微小な空間の時定数 T/n はどんどん減少することになる。$n\to\infty$ の極限では，つぎの公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[(T/n)s+1]^n} = e^{-sT} \tag{2}$$

がなりたつことを知っているだろう？」

熊さん「微分･積分の本にでてきた

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3}$$

ですかい？」

ご隠居「そうだよ。そうすると，全体の伝達関数は

$$G(s) = e^{-sT} \tag{4}$$

となるわけじゃ」

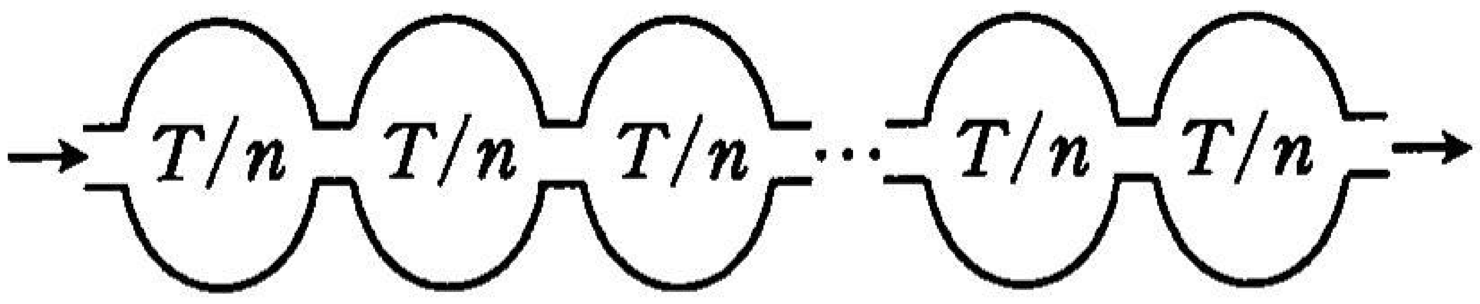

Fig.1

八つあん「そんなモデル，役に立つんですかい？」

ご隠居「これは管内の流れがまざらないピストン流れも，入口から出口までの伝達関数はこの形で書くことができる。さらに，ハイウェイの車の流れをモデル化して偏微分方程式に導いて，追従車理論を展開した研究もある[1)]」

2．時間おくれ振動

八つあん「むだ時間要素には，どんな問題があるのですかい？」

ご隠居「たとえば，プラント $P(s)$ がタンクで積分器，そこへ長いコンベアで運ばれてきた原料が投入されるんだけど，コンベアの手前側でしか投入量の調整ができない。という状況下で原料のレベルを比例制御していると考えよう。出力を $x(t)$ とすると，供給流量 $u(t)$ は

$$u(t) = -kx(t-L) \tag{5}$$

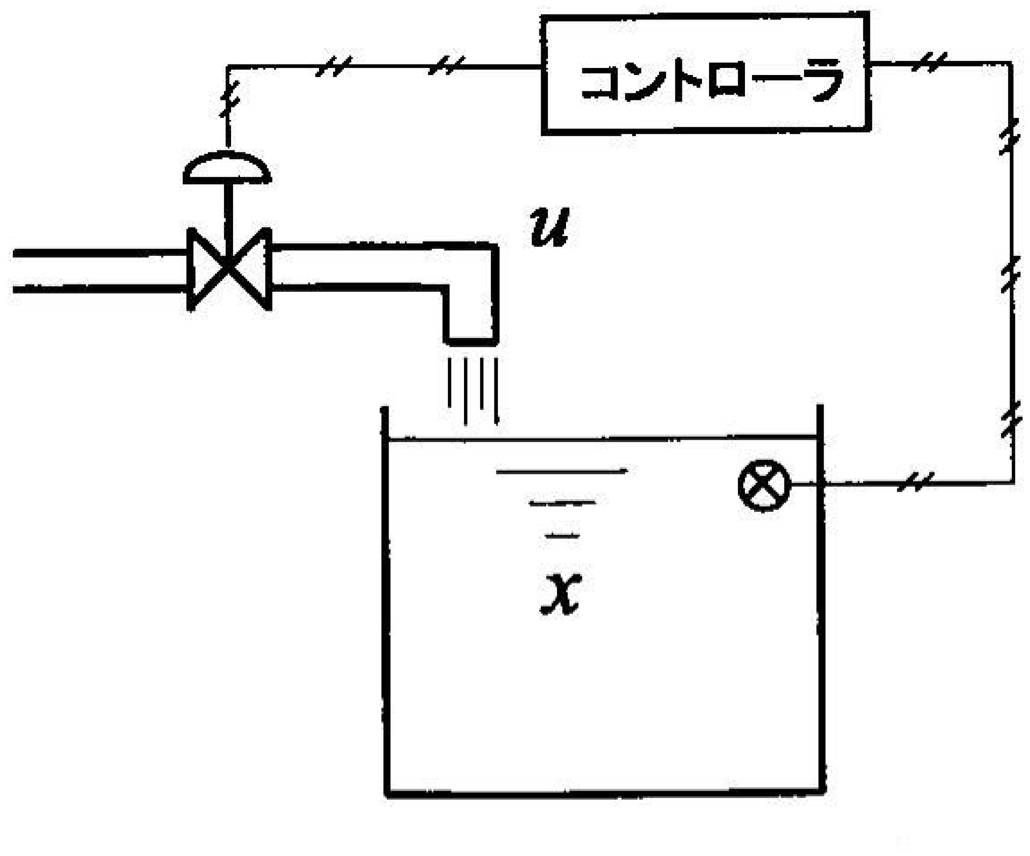

Fig. 2

と書ける。プロセスの方程式は，

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{6}$$

と書ける。簡単のために，$k=1$ とすると，(5)，(6)式とにより

$$\frac{dx}{dt}+x(t-L) = 0 \tag{7}$$

となる。Laplace 変換して特性方程式を求めるとつぎのようになる。

$$s+e^{-Ls} = 0 \tag{8}$$

ここで，システムの安定性はどうやって調べる？」

熊さん「特性根の位置を調べて，複素平面の左側にあれば安定ですぜ」

ご隠居「じゃあ，いま特性根は何個ある？」

熊さん「$x(t)$ はスカラーでしたよね？だったら 1 個です」

ご隠居「(8)式は s に関する超越方程式といって，特性根は無限個あるんだよ。$s=\sigma+j\omega$ とおき，(8)式に代入すると，

$$\sigma+j\omega+e^{-\sigma L}\{\cos\omega L-j\sin\omega L\} = 0 \tag{9}$$

(9)を実部と虚部に分解すると，

$$\left.\begin{aligned}\sigma+e^{-\sigma L}\cos\omega L &= 0\\ \omega-e^{-\sigma L}\sin\omega L &= 0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$\cos\omega L$，$\sin\omega L$ は周期関数であるから，(10)式を満たす解は無限ある。(10)式の②より

$$e^{-\sigma L} = \frac{\omega}{\sin\omega L} \tag{11}$$

いま，$\omega>1$(高周波)を考えれば，$e^{-\sigma L}>0$ であり $|\sin\omega L|<1$ であるから，$e^{-\sigma L}>1$ となり，よって $\sigma<0$ であり，減衰性があるから安定となる。

つぎに，(低周波)を考えれば

$$e^{-\sigma L}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\omega}{\sin\omega L}=\frac{1}{L}$$

となり，$L>1$ ならば $e^{-\sigma L}<1$ となり，よって $\sigma>0$ であり，不安定となる。つまり，時間おくれ L が大きくなれば，不安定になることがあるんじゃよ」

熊さん「ひぇぇっ！無限個！そんなの手に負えませんぜ」

ご隠居「そもそも時間おくれというのは，きわめてありふれた現象だし，プロセス制御なんかの世界では，プラントを比較的低次の有理伝達関数＋むだ時間の形でモデル化することが多いんだよ。古典的な Ziegler，Nichols の PID 制御法だって，プラントは1次おくれ＋むだ時間系だしね。」

八つあん「1次おくれ＋むだ時間系の安定性も教えてくれませんかね」

ご隠居「文献からの結果[2]を天下り式に書くとね。**Fig.3** のような，プラントに比例制御を実施した場合を考える。

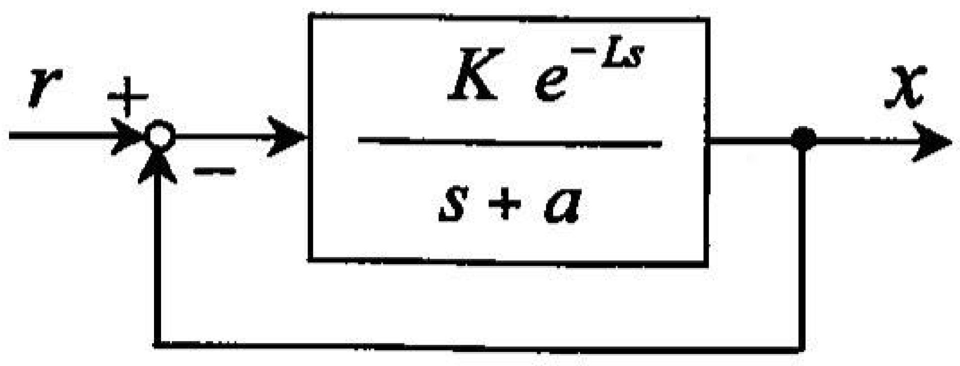

Fig.3

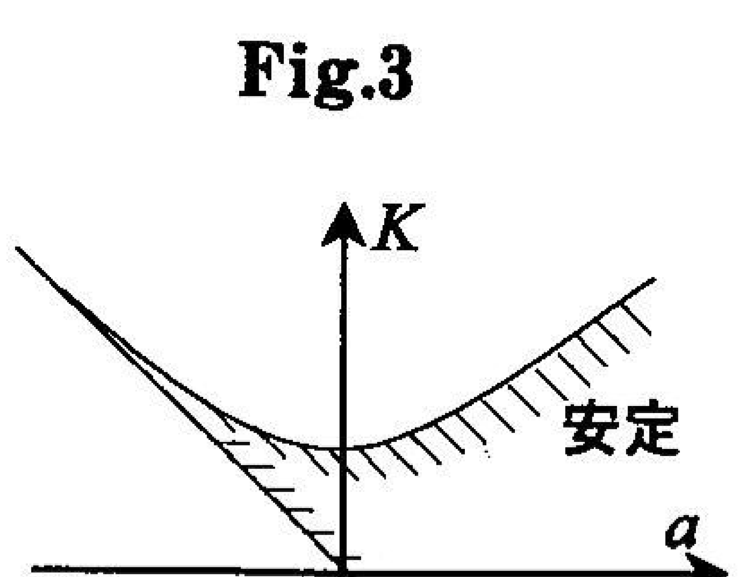

Fig.4

Fig.3 より，特性方程式はつぎのようになる

$$s+a+Ke^{-Ls}=0 \tag{12}$$

簡単のために $L=1$ としよう。$s=\sigma+j\omega$ とおき，(12)式に代入すると，

$$\sigma+j\omega+a+Ke^{-\sigma}(\cos\omega-j\sin\omega)=0 \tag{13}$$

実部と虚部に分けて，0とおくと，

$$\left.\begin{aligned}\sigma+a+Ke^{-\sigma}\cos\omega&=0\\ \omega-Ke^{-\sigma}\sin\omega&=0\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

となる。ここで安定条件は $\sigma<0$ である。そこで $\sigma\approx 0$ と考えると，

$$\left.\begin{aligned}a+K\cos\omega&>0\\ \omega&=K\sin\omega\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

となり，(15)式はつぎの式と等価になる。

$$\left.\begin{aligned}a+K&>0\\ \sqrt{y_1^2+a^2}&>K\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ただし，y_1 は $\tan y=-\dfrac{y}{a}$ の $(0,\ \pi)$ の間の根である。$L=0$ のとき $a+K>0$ が安定条件であり，$L\neq 0$ であれば K に制限がつくことを示している」

3．スミス補償器

八つあん「さっきのように，特性根の数が無限もあっては，どうやって制御器を設計するんですかい？」

ご隠居「むだ時間系の制御にも PID 調節器が用いられる。そして，パラメータの最適調整法には，限界感度法，過渡応答法が使える。むだ時間 L がプラントの主要な時定数 T に対して小さいときには，これらの方法でほとんど問題がないとされる。L/T が大きくなると，積分動作が強調された振動的な応答になる。むだ時間が変動するときには，PID の調整器のパラメータを，むだ時間の最大の値に対して調整すればよい。むだ時間 L が大きく，

かつその変動 ΔL が少ないときには，つぎのスミス補償器が有効である」

熊さん「むだ時間 L を含んだ特殊な制御構造をとって，特性方程式からむだ時間要素を取り除くという方法でしょう？昔，和尚さんから聞いたことがある」

ご隠居「特性方程式が通常の多項式になれば，極は有限個だものね。最初に提案されてから40年以上も経つけれど，さまざまな改良が加えれらて今日まで受け継がれている手法で，そのアイデアがいろいろな理論の原型にもなっているんだ。プロセス制御の分野で広く用いられているモデル予測制御（model predictive control）や内部モデル制御（internal model control）なんかも，その流れを汲んでいるといえるね」

八つあん「そのスミス補償器とやらを説明して下さいよ？」

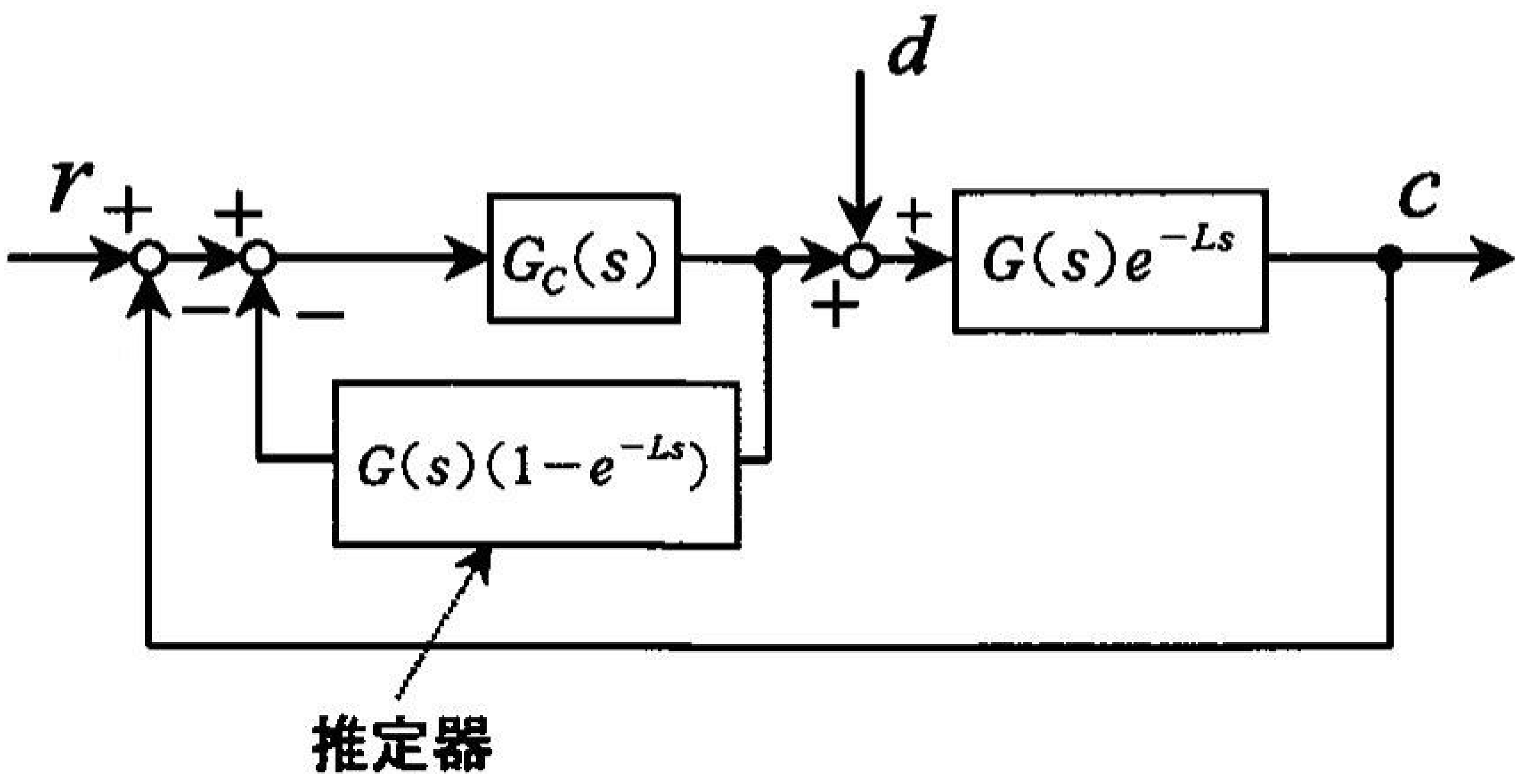

Fig. 5　スミス補償器

ご隠居「むだ時間系をうまく制御するには，むだ時間経過後に現れる出力に予測して制御入力を修正すればよい。この考えに基づいて実現したのが **Fig.5** に示すスミス補償器である。むだ時間経過後に現れるプラントの出力は，局所フィードバック部分 $G(s)(1-e^{-Ls})$ の $G(s)e^{-Ls}$ の出力でキャンセルされる。**Fig.5** のフィードバック制御系において，目標値入力 $R(s)$ から，出力信号 $C(s)$ までの伝達関数は

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_c(s)G(s)e^{-Ls}}{1+G_c(s)G(s)} \tag{17}$$

であり，特性方程式は

$$1+G_c(s)G(s)=0 \tag{18}$$

となる。(18)式にみられるように，特性方程式からむだ時間要素の項が削除されており，むだ時間のない系と同じように，極の数が有限個になる。$G_c(s)$ の設計が容易になる」

熊さん「目標値入力 $R(s)$ に対してはよいとしても，外乱に対してはどうなんです？」

ご隠居「外乱に対してはつぎの伝達関数で示されるように，よい応答を与える補償ははない。

$$\frac{C(s)}{D(s)}=\frac{G(s)e^{-Ls}}{1+G_c(s)G(s)}[1+G_c(s)G(s)(1-e^{-Ls})] \tag{19}$$

このように余計に複雑になっちゃう。そこで，目標入力に対して良い応答を与えるとともに，外乱に対してもよい応答を与えることを目的とした外乱補償器が提案されている。渡部の方法が有効である[6,7]」

熊さん「むだ時間 L が ΔL だけ変動したときのロバスト安定性はどうなんです？」

ご隠居「スミス法では，プラントの正確なモデルを用いて，出力の予測を行っている。したがって対象の同定誤差があったり，操作中にパラメータ変動がでたときなど，パラメータの不一致があると考える方が自然である。これをパラメータのミスマッチとよんでおり，スミス補償器を採用した

場合かえって安定性を損なうこともある。

スミス補償器においてミスマッチが存在するときの安定性に関しては，Palmar，および山中らの研究が有名である[8~11]。これらの研究では，ナイキストの安定判別法を用いている。すなわち，一巡伝達関数のゲインがすべての周波数領域において1以下ならば，安定であるとする。$G_c(s)$ と $G(s)e^{-Ls}$ とからなる制御系に対してナイキストの安定定理を適用すると，

$$|G_c(j\omega)G(j\omega)e^{-Lj\omega}| < 1 \tag{20}$$

および，

$$\lim_{\omega\to\infty}|G_c(j\omega)G(j\omega)| < 1/2 \tag{21}$$

ここに(20)式はPalmarの結果であり[4]，(21)式は渡部の結果である[11]。さらに，制御対象のむだ時間が $L+\Delta L$ に変動したりミスマッチがあったときの安定性を調べる。

$G_c(j\omega)G(j\omega)$ が連続で，$0<\omega_0<\omega$ を満たす ω に対して(19)式を満たす ω_0 がある。

$$|G_c(j\omega_0)G(j\omega_0)| < 1/2 \tag{22}$$

$\omega_0=0$ の場合，すべての ω に対して(21)式が成り立つので，$G_c(j\omega_0)G(j\omega_0)$ のベクトル軌跡は必ず $-1+j0$ 点の右側を通過し，どのようなむだ時間ミスマッチが存在してもシステムは安定である。$\omega_0>0$ の場合，系の安定を補償するむだ時間のミスマッチ ΔL はつぎの条件を満たすことである。

$$|\Delta L| < \frac{2}{\omega_0}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\beta}\right) \tag{23}$$

ただし，

$$\beta = \max_{0\le\omega<\omega_0}|G_c(j\omega_0)G(j\omega_0)| \tag{24}$$

Fig.6 は，

$$G_c(s)G(s)e^{-Ls} = \frac{K}{1+T_s}e^{-Ls} \tag{25}$$

で表わされるシステムの，ミスマッチに対する安定範囲を計算した例であり，時定数に比べてむだ時間の大きい系では，むだ時間ミスマッチによりロバスト安定範囲が狭められていることが分かる」

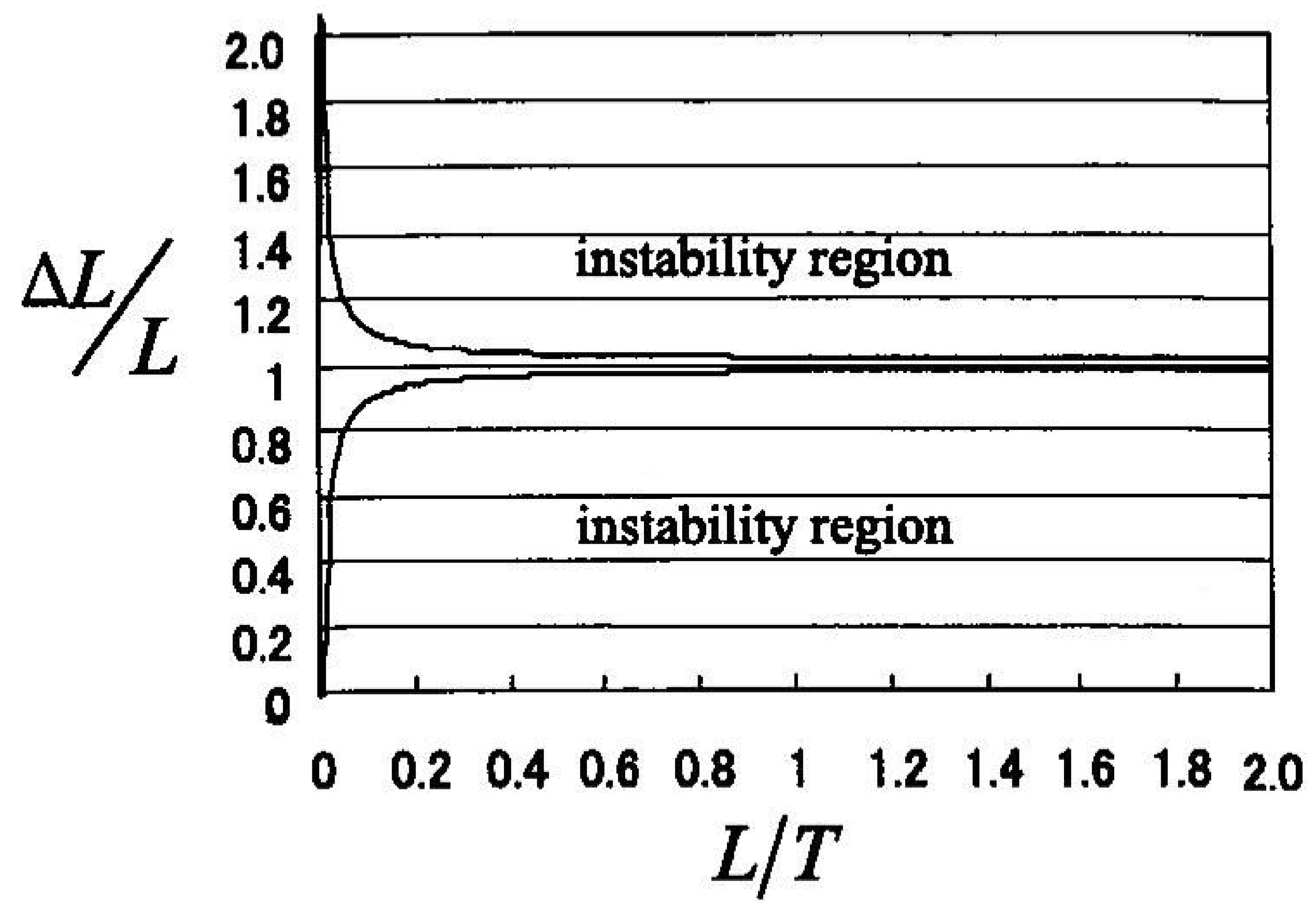

Fig. 6　スミス法によるミスマッチの安定範囲

熊さん「むだ時間 L が大きくなると，ちょっとしたミスマッチで不安定になってしまうわけですね」

八つあん「安定範囲をさらに増やす補償器はないんですかい？」

ご隠居「そこで，この安定範囲の拡張を目的とした補償器の開発がなされている[11]。**Fig.7** はその手法の一部である。これは，フィードバックパスにローパスフィルタを挿入するものである。**Fig.7**において，

$$H(s) = \frac{K}{1+Ts} \tag{26}$$

とする。特性方程式を求めると，

$$1+G_c(s)G_p(1-e^{-Ls}+H(s)e^{-Ls})$$
$$= 1+G_c(s)G_p(s)\left\{1-\frac{(1-K)+Ts}{1+Ts}e^{-Ls}\right\} \tag{27}$$

となり，｛　　｝の中の第2項が安定領域を拡張している。スミス補償器だけの場合が **Fig.8** の水平軸上に並んだ点に示しており，スミス補償器がロバスト安定性のないことを示している。T および K の値により，安定を補償する L の値が拡大されていることがわかる」

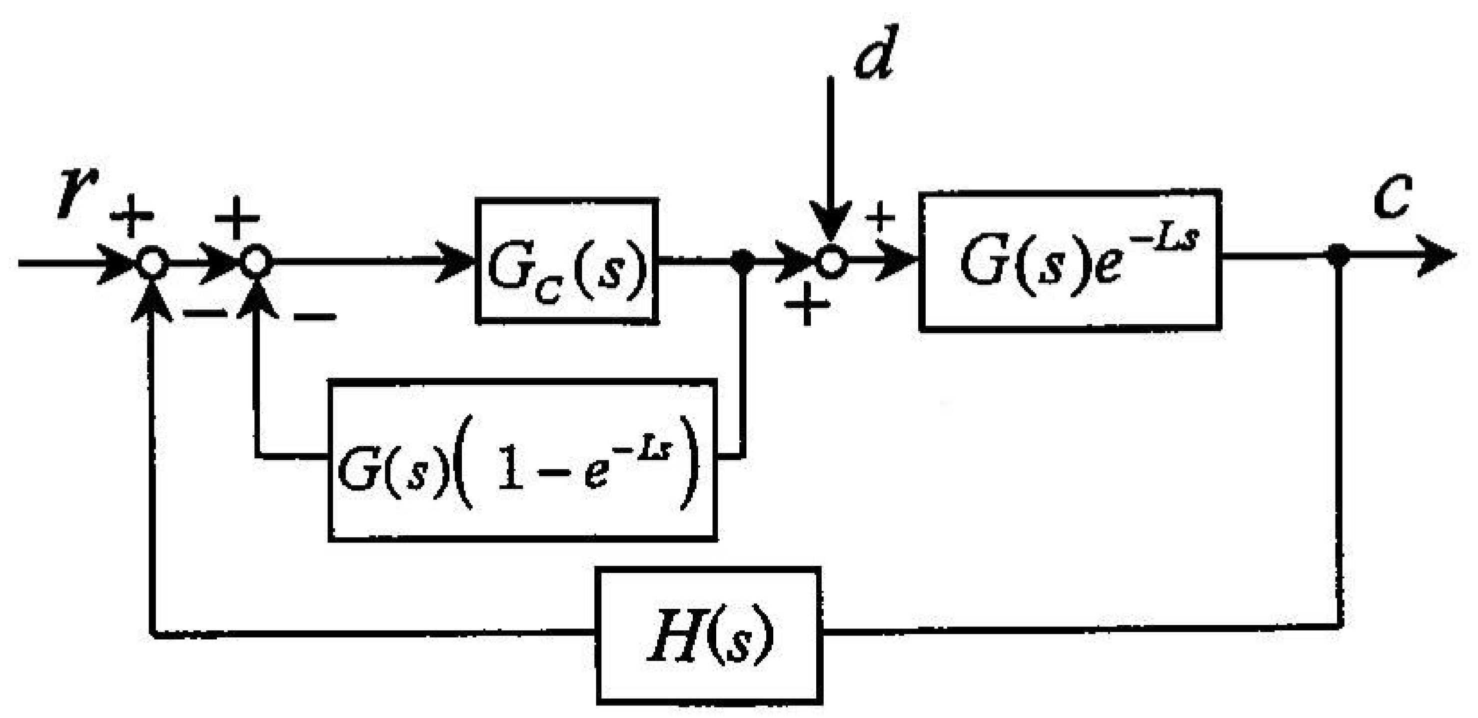

Fig.. 7

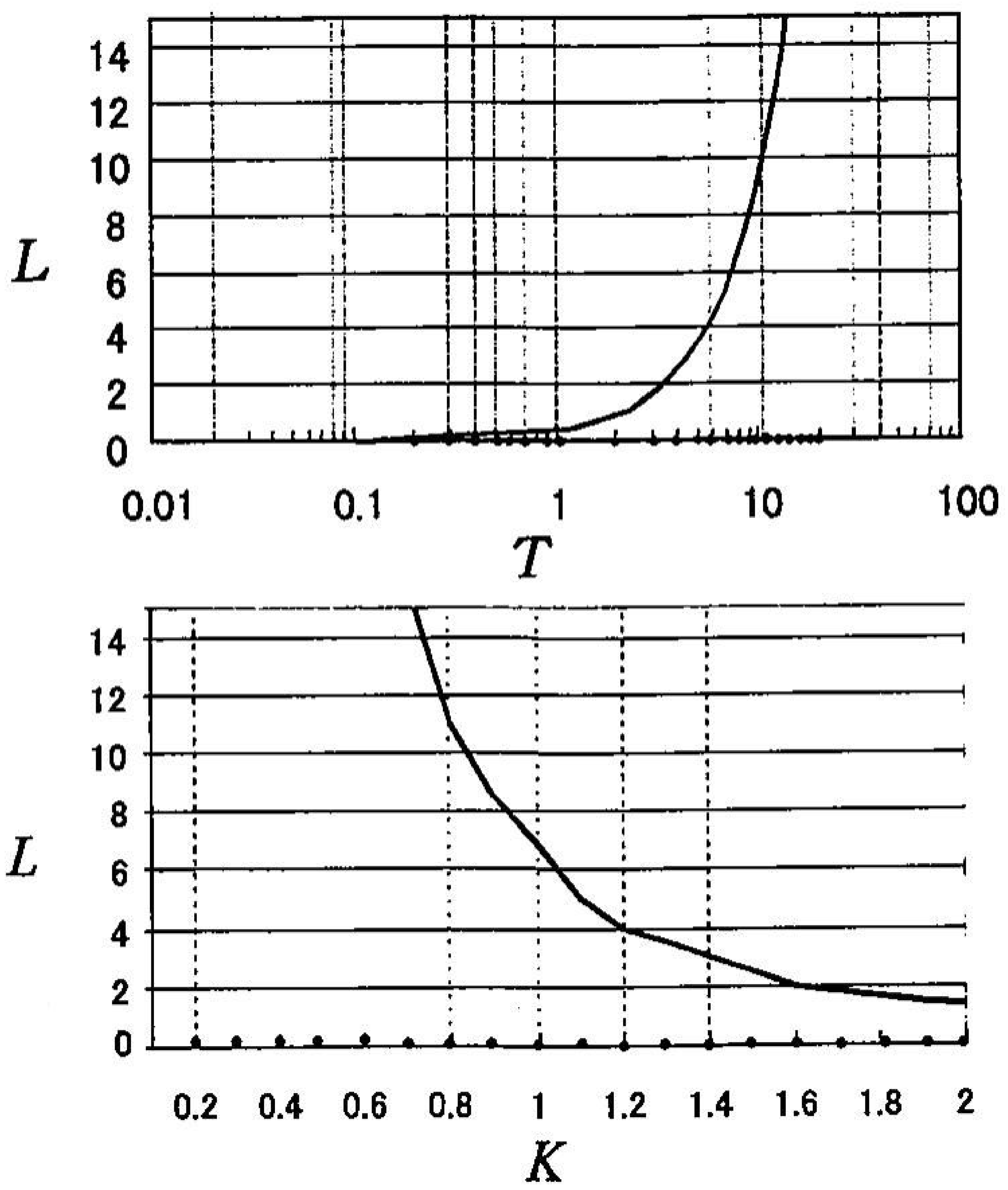

Fig.. 8

4．むだ時間の近似

八つあん「むだ時間を含む制御系の解析や設計を考えるとき，むだ時間を近似して具体的な有限次元の問題に帰着させてしまうことはできないんですかい？」

ご隠居「いい質問でね。『制御則はしかじかの方程式の解を用いてこう書ける』ということが示せても，『ではどうやって解くの？』ということになって片手落ちといえる。むだ時間を含む制御系の解析および設計では伝達関数 e^{-Ls} を有利関数で近似したい場合がしばしば起こる。制御に有用な近似関数としては過渡応答の中間時期における近似の良好なものが望ましい。そこでパデ(Padé)はこの目的のため，つぎの方法を示した。

$$e^{-Ls} \simeq \frac{b_0+b_1s+b_2s+\cdots+b_ps^p}{1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ns^n} \tag{28}$$

のような近似がなりたつものとすれば，

$$(1+a_1s+\cdots+a_ns^n)e^{-Ls} \simeq b_0+b_1s+\cdots+b_ps^p$$

の関係があるから，左辺を s の昇べきの順に展開し，定数項から s^{n+p} の項に到る各係数を右辺の同次の係数と比較し，ちょうど一致するように $a_1\cdots a_n; b_0\cdots b_p$ を定める。e^{-x} に対する Padé 近似を **Table1** に示す。わしも Padé の近似を使って，いろいろ調整法を提案してきたよ」

熊さん「PID 調整器でプロセスの伝達関数が有理関数で与えれば，部分的モデルマッチング法を適用して容易に PID のパラメータを求めることができますね？」

ご隠居「そうそう，そのときむだ時間要素は Padé の近似を用いて，

$$e^{-Ls} = \frac{1-\frac{1}{2}Ls}{1+\frac{1}{2}Ls} \quad \text{or} \quad \frac{1-\frac{1}{2}Ls+\frac{1}{12}L^2s^2}{1+\frac{1}{2}Ls+\frac{1}{12}L^2s^2}$$

とやって設計するわけだよ」

熊さん「それで不都合はないのですかい？」

Table.1　e^{-x} の近似

$n \backslash p$	0	1	2	3
p	1	$\dfrac{1-\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$	$\dfrac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}$	$\dfrac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}$
$p+1$	$\dfrac{1}{1+x}$	$\dfrac{1-\frac{1}{3}x}{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}}$	$\dfrac{1-\frac{3}{5}x+\frac{1}{10}\frac{x^2}{2!}}{1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{10}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{10}\frac{x^3}{3!}}$	$\dfrac{1-\frac{3}{7}x+\frac{1}{7}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{35}\frac{x^3}{3!}}{1+\frac{4}{7}x+\frac{2}{7}\frac{x^2}{2!}+\frac{4}{35}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{35}\frac{x^4}{4!}}$

ご隠居「$L/T<0.5$ ならばまず問題ないが，0.5を超えると，応答が理論とはだいぶくいちがってくるよ。そこで e^{-Ls} をプラントから追い出して補償する方法が北森より提案されている[12]。つまり，**Fig.9** においてプラントの伝達関数 $G_p(s)$ をつぎのような分母系列表現になおして，

$$G_p(s)=\frac{b(s)}{a(s)}e^{-Ls}=\frac{1}{a'(s)}e^{-Ls} \tag{29}$$

とおいて，参照モデルも時間遅れを追い出して，

$$G_m(s)=\frac{1}{\alpha_\sigma(s)}e^{-Ls} \tag{30}$$

とおく。$R(s)$ から $C(s)$ への伝達関数を求めて，(30)式と等置する。

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{cbe^{-Ls}}{sa+cbe^{-Ls}}=\frac{e^{-Ls}}{\frac{s}{c}\frac{a}{b}+e^{-Ls}}=\frac{1}{\alpha_\sigma}e^{-Ls} \tag{31}$$

そうすれば，PID 調節器 $c(s)/s$ はつぎのようになる。

$$c(s)=\frac{sa'}{\alpha_\sigma-e^{-Ls}} \tag{32}$$

ここに e^{-Ls} は Maclaurin 級数に展開して $c_0, c_1, c_2\cdots$ を求めればよい」

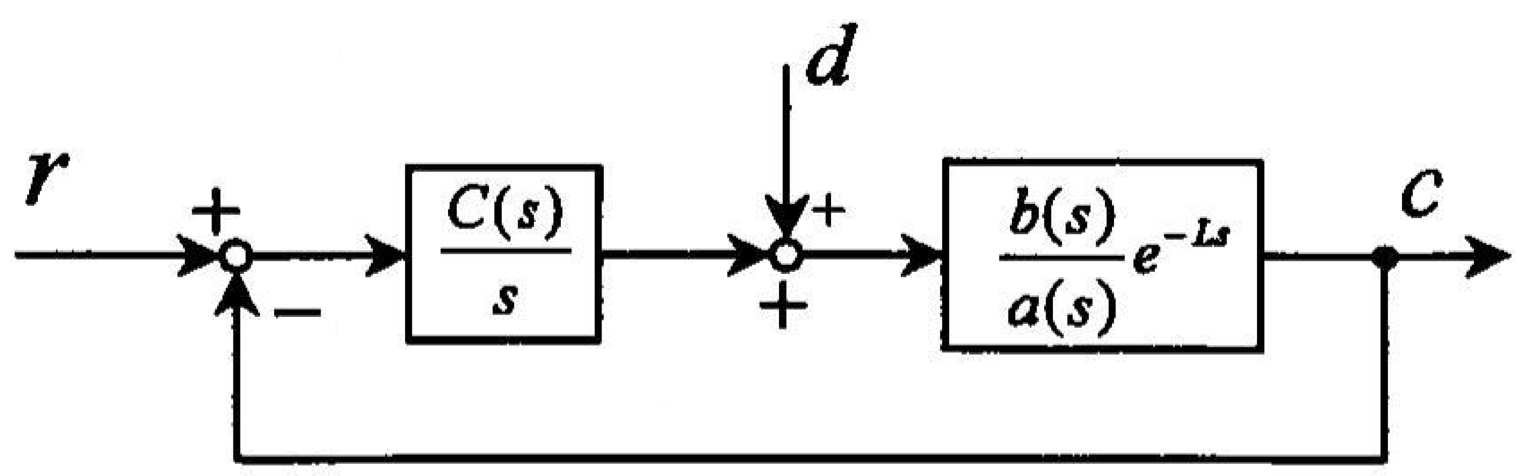

Fig.. 9

参考文献

1）高橋安人：システムと制御，岩波書店，pp143～147(1968)

2）システムと制御，チュートアル講座 '86, p197

3）O. J. Smith：A Controller to Overcome Dead Time, ISA Journal, Vol.6, No.2, pp.28～33(1959)

4）Z. Palmor：Stability Properties of Smith Dead-Time Compensator Controllers, Int. J. Control, Vol.32, No.6, pp.937～949(1980)

5）渡部慶二，伊藤正美：入出力にむだ時間を

含むシステムの制御，システムと制御，Vol.28，No.5，pp269 ～ 277(1984)

6）渡部慶二：Smith 法の外乱補償と安定性について，計測自動制御学会論文集，Vol.23，No.7，pp.727 ～ 733(1987)

7）渡部慶二，伊藤正美：Smith 法の外乱に対する制御特性の改善，計測自動制御学会論文集，Vol.19，No.3，pp.187 ～ 192(1983)

8）渡部慶二：むだ時間をもつ制御系のロバストネス，コンピュートロール，No.3，pp.59 ～ 64(1986)

9）計測自動制御学会：自動制御ハンドブック基礎編，オーム社，(1983)

10）沢野進：むだ時間を含む系のある制御法についての研究，自動制御，Vol.7，No.3，pp.122 ～ 127(1960)

11）K. Yamanaka, E. Shimemura：A Note on a Stability Property of Smith Controllers in Systems with Delay, Report of Sci. and Eng. Lab., Waseda University, No.83-3(1983)

12）北森俊行ほか：むだ時間をループ外に追い出したPID および I-PD 制御系の設計法，SICE'96 in Tottori，107/108(1996)

「受理年月日　2002 年 9 月 25 日」