

## 制御理論講話 (その9) —ロバスト制御の応用—

A Lecture on Control Theory (Part 9)  
—Applications of Robust Control—

渡利 久規, 山崎 敬則, 山川 雄司\*, 黒須 茂\*\*

Hisaki WATARI, Takanori YAMAZAKI, Yuji YAMAKAWA\*, Shigeru KUROSU\*\*

本稿では, 温水器, 水位プロセスでお馴染みの1次系のプラントを例にとり, ロバスト制御の応用として $H_\infty$ 制御の実用化を解説する.

\*\*\*\*\*

### 4. コントローラ的设计

#### 4.1 概要

3章では, モデルの不確かさにはじまり, 不確かさを陽に考えたときに, 制御系をロバスト安定にするための条件とその例題を説明した. しかし, 制御系をロバスト安定にするコントローラ的设计方法は示されていない. そこで, 本章では, 制御系をロバスト安定にするコントローラ的设计方法を解説する.

ロバスト安定条件を満足するコントローラを求めることがロバスト制御の基本であり, その手段が必要である. 既存の理論の中で, 制御系をロバスト安定にする方法には2通りある. そのひとつは, ネバンリナ・ピックの補間定理<sup>2)</sup>, もうひとつは,  $H_\infty$ 制御理論を適用した方法である. ネバンリナ・ピックの補間定理は文献<sup>2)</sup>に任せることにして, 今回の講義では, 後者の $H_\infty$ 制御理論を適用した制御系をロバスト安定にするコントローラ的设计について説明する.

#### 4.2 $H_\infty$ 制御

$H_\infty$ 制御とは, 入力から出力までの伝達関数のゲインの最大値 (すなわち,  $H_\infty$ ノルム) をある値  $\gamma$  以下にするとということである. その一例として,  $\gamma$  を1として考えることにより, 先に求めたロバスト安定条件を $H_\infty$ 制御に活用することができる.

熊さん「おっさんよ〜. また, 言っていることに矛盾があるんじゃないね〜の.  $\gamma$  を1と考えることにより, ロバスト安定条件を $H_\infty$ 制御に活用することができるとはどういう意味なの? 安定性と制御とは全く別の次元での話なのよ」

ご隠居「なんか, 酔っ払いが戯言をいいたしたね. 今, 説明するから落着け. 落着け.  $H_\infty$ 制御は, コントローラを設計する理論じゃ. それで,  $\gamma$  を1として設計されたコントローラは制御系をロバスト安定にしたいのじゃ」

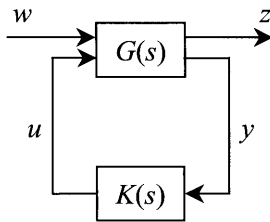
熊さん「そもそも制御系的设计というのは, 安定性, 速応性, 定常特性という評価の組合せですげ. ロバスト安定性だけ満たしていれば, 目出たし目出たしというわけにはいきませんか?」

ご隠居「制御系设计で一番肝心なのは, 安定性を保つことじゃ. それから速応性や定常特性を議論するのじゃ」

$H_\infty$ 制御の解法には, 多くの方法が提案されているが, 本稿では, DoyleらによるDGKF法<sup>3)</sup>を採用する. 簡単な例題を基に,  $H_\infty$ 制御がロバスト安定を考えることに有益であることを示す.

\*) 平成14年度機械工学科卒業(東京大学工学部在学中)

\*\*) 研究所 “Crotech”



$G(s)$ : 一般化プラント,  $K(s)$ :  $H_\infty$ 補償器

Fig. 1  $H_\infty$ 制御

### 4.3 $H_\infty$ 制御問題

定義された外乱 $w$ と制御量 $z$ との間の閉ループ伝達関数 $G_{zw}(s)$ に対して

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (1)$$

とし、かつFig. 1の閉ループ系を安定にする制御器 $K(s)$  ( $H_\infty$ 補償器という)を求める問題である。 $H_\infty$ 制御問題を解くために、まず、一般化プラント(あとで説明する)を求めておかなければならない。

八つあん「大体

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$$

とは何です?」

ご隠居「早い話が、フィードバック制御によって与えられた伝達関数の最大値(ゲイン)をある値以下にすることじゃよ」

八つあん「伝達関数っていったって、一杯あるでしょう?」

ご隠居「制御系に外部から加えられる入力を外部入力(exogenous input)というが、外部入力に対して制御したい量、つまり制御量(controlled output)をなるべく小さく抑えることといえる」

八つあん「小さく抑えたからといって、どういう利点があるんです?」

ご隠居「それが外乱抑制や感度最適化はもちろんのこと、ロバスト安定化問題を陽に扱うことができるのじゃ」

八つあん「外乱抑制といたら、当然、目標値追従もでてこなきゃあ、話になりませんか?」

ご隠居「 $H_\infty$ 制御では、制御量を小さくすることが前提なのじゃ。したがって、目標値追従は目

標値入力に対して制御偏差を問題にするべきじゃよ。目標値に対して制御出力が定常偏差なく追従する制御系はサーボ系とよばれ、内部モデル原理より目標値入力と同じ極をコントローラがもてばよいということは知っているじゃろ。サーボ問題を取り扱おうと、 $H_\infty$ 制御問題として定式化できなくなり、さまざまな方法が研究されている。したがって、例題で示すが、制御対象に目標値発生器を結合した拡大系に対して $H_\infty$ 制御を適用しているのじゃ」

八つあん「目標値のない制御系なんてこの世に存在しないわけですから、目標値追従はつねに考える必要があるから、すべて拡大系について考えているわけですね」

ご隠居「そんなことはないぞ!プロセス制御では、外乱抑制が重要となるから、目標値追従を考慮しない場合もあるのだ」

熊さん「そーいや、外部入力とは何ですか?」

ご隠居「 $H_\infty$ 制御は、外乱抑制を主目的としている。そのため、入力はすべて外乱を考えている。しかし、実際には目標値や観測ノイズを考慮する場合もあるから、それらの入力を総称して外部入力と呼んでいるのだ」

設計のポイントとして以下の点が挙げられる。

1.  $H_\infty$ 制御は、Riccati方程式を解いている。さらに、周波数特性よりロバスト性を考慮する。この2点から現代制御と古典制御の良さを兼ね備えている。
  2. コントローラの次数が高い。 $H_\infty$ 補償器は一般化プラントの次数のコントローラとなることによる。次数の高いコントローラは実現が困難なため、低次元化する必要がある。
  3. コントローラの次数が高いため、自由度が高い。
- 八つあん「一般化プラントと評価関数を与えれば、きっと $H_\infty$ 補償器が決まる筈です。つまり、 $H_\infty$ 制御問題は解決したことになる。コントローラの次数が高いため、自由度が高いとはどういうことですか?自分にとって都合のよい $H_\infty$ 補償器でも選定できるといいたいんですか?」
- ご隠居「例題で示すが、一般化プラントではそ

れぞれの入出力に重みを付けて定義することになる。すなわち、それだけパラメータをいたずらすることができる。だから、自由度が高いと述べたのじゃ。」

#### 4.3.1 一般化プラント

現代制御では、状態方程式と出力方程式で議論していたが、ロバスト制御において考慮しなければならないモデル化誤差（または重み関数）なども含めて、プラントの拡大系として、 $H_\infty$ 制御では一般化プラントというものを定義する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $x$ は状態量、 $z$ は制御量、 $w$ は外部入力、 $u$ は操作量、 $y$ は出力である。

#### 4.3.2 $H_\infty$ 制御問題の解法

解法には、さまざまな提案がなされている。最初に一般解が与えられたのは、1988年のGlover, Doyleの論文である。この論文では、3つのRiccati方程式を解くことによって $H_\infty$ 制御問題を解いている。翌年、1989年にはDoyle, Glover, Khargonekar, Francisらによって2つのRiccati方程式を解くことで、 $H_\infty$ 制御問題の解を与えた。最近の研究では、LMI（線形行列不等式）やBMI（双線形行列不等式）による解法も提案されている。本稿では、1989年のDoyleらの論文よりDGKF法と呼ばれる解法を説明する<sup>3)</sup>。

#### DGKF法の手順

##### 1. 一般化プラントの定義

一般化プラントをつぎの形で定義する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \right\}$$

DGKF法を用いる際には、一般化プラントが つぎのDGKF法の条件を満足することが前提となる。

- (1)  $(A, B_1)$ 可安定、かつ $(C_1, A)$ 可検出
- (2)  $(A, B_2)$ 可安定、かつ $(C_2, A)$ 可検出
- (3)  $D_{12}^T C_1 = B_1 D_{21}^T = 0$ ,  $D_{12}^T D_{12} = D_{21} D_{21}^T = I$

- (4)  $D_{11} = 0$ , かつ $D_{22} = 0$

4つの条件は、それぞれ物理的な意味をもつ。条件(1), (2)は $G_{zw}$ の内部安定化のために必要であり、条件(3)は直交条件および正規化条件。条件(4)は一般化プラントがプロバであることを前提とする。

##### 2. Riccati方程式を解く

一般化プラントについて、以下の2つのRiccati方程式を解く。

$$A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (3)$$

$$A Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (4)$$

2つのRiccati方程式の解の中から、つぎの条件を満たすものを選択する。

$$(1) X = X^T \geq 0 \quad (5)$$

$$(2) Y = Y^T \geq 0 \quad (6)$$

$$(3) \rho(XY) < \gamma^2 \quad (7)$$

行列 $A \geq 0$ とは、 $A$ は正定とって、任意のベクトル $x$ を与えたときに、 $x^T A x > 0$ （スカラー関数）となるような行列を意味する。すなわち、行列 $A$ の固有値がすべて正であればよい。 $\rho(XY)$ とは、行列 $XY$ のスペクトル半径（固有値の絶対値の最大値）を意味する。

##### 3. $H_\infty$ 補償器を構成する

(5)~(7)式の条件を満足するRiccati解を用いて、 $H_\infty$ 補償器は、つぎのように構成される。

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + Z L C_2 \\ \hat{B} &= -Z L \\ \hat{C} &= F = -B_2^T X \\ L &= -Y C_2^T \\ Z &= (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で与えられる。

##### 4.3.3 $H_\infty$ 補償器の構造

一般化プラントのシステムマトリクスを $A$ とするならば、補償器のシステムマトリクス $\hat{A}$ は

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X - B_2 B_2^T X - Z Y C_2^T C_2 \quad (10)$$

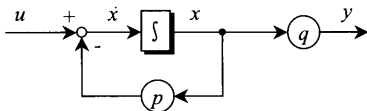


Fig. 2 状態線図

となる。

一般化プラントに対して、つぎの一般的なオブザーバを構成する。

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}y \quad (11)$$

制御則はオブザーバの状態を用いて

$$u = \hat{C}\hat{x} \quad (12)$$

となる。よって、(11)式と(12)式より

$$\begin{aligned} s\hat{x} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}y \\ \hat{x} &= (sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}y \\ u &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}y \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

八つあん「結局、(13)式より $u=Ky$ とおけば、 $H_\infty$ 補償器 $K(s)$ は

$$K(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} \quad (14)$$

となるわけですね？」

ご隠居「その通りじゃ。言うことないぞ」

### 5. 例題

簡単な例題から、 $H_\infty$ 制御の解法を理解しよう。

#### 5.1 1次系 (ノミナルプラント)

1次系のプラント

$$P_0(s) = \frac{K}{Ts+1} \quad (\text{ここで, } K=1, T=10[\text{min}])$$

に対して、コントローラの設計を行う。

プラントの分母・分子を $T$ で割り、つぎの式に書き直す。

$$P_0(s) = \frac{K/T}{s+1/T} = \frac{q}{s+p}$$

ここに、 $p=1/T, q=K/T$ である。

プラントを状態方程式と出力方程式で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -px + u \\ y &= qx \end{aligned} \right\}$$

となり、状態線図はFig. 2のようになる。

さらに、各入出力に重みを考え、 $H_\infty$ 制御系を

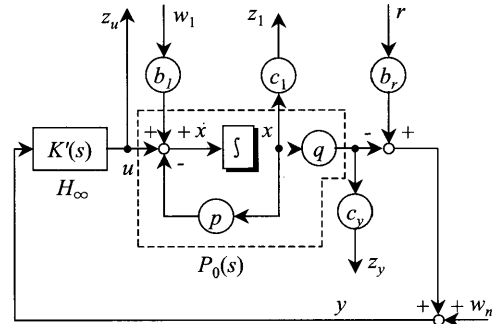


Fig. 3  $H_\infty$ 制御系

構成するとFig. 3のようになり、一般化プラントはつぎのように定義される。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_u \\ z_1 \\ z_y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_y q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_y q & 1 & 0 & b_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_n \\ w_1 \\ r \\ u \end{bmatrix}$$

ここで、 $x$ :状態量、 $z_u$ :制御量(制御入力)、 $z_1$ :制御量、 $z_y$ :制御量(出力)、 $y$ :観測量、 $w_n$ :観測ノイズ、 $w_1$ :外乱、 $r$ :目標値、 $u$ :制御入力である。

八つあん「操作量に該当する $u$ に制御量 $z_u$ を割り当てているよ。なにか理由があるんでしょう？」

ご隠居「DGKF法的前提条件に

$$D_{12}^T D_{12} = I$$

がある。この条件を満たすために、 $D_{12} = [1 \ 0 \ 0]^T$ とする必要があった。そのため、制御量 $z_u$ と制御入力 $u$ を考えたのだ。重みについては、あとで説明するから、もう少し待て」

DGKF法の条件を満足するかを確認する必要がある。そこで、

$$D_{12}^T C_1 = B_1 D_{21}^T = 0, \quad D_{12} D_{12}^T = I$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{22} = 0$$

となり、これらの条件は満足しているが、

$$D_{21} D_{21}^T = (1 \ 0 \ b_r)(1 \ 0 \ b_r)^T = 1 + b_r^2$$

となり、条件を満たしていないため、DGKF法を用いて $H_\infty$ 制御問題を解くことができない。そこで、4つの条件を満足するために、定常偏差をなくするための積分器を付加して制御系をI型にする。

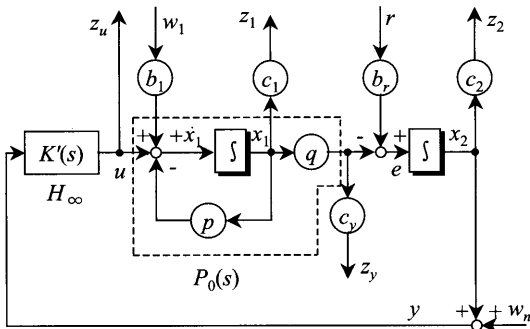


Fig. 4  $H_\infty$ 制御系 (積分器付加)

このことにより、状態量、制御量が1つずつ ( $x_2, z_2$ ) 増えるため、一般化プラントが変化し、条件を満たすようになる。積分器を付加した $H_\infty$ 制御系はFig. 4のようになる。

八つあん「ご隠居。ご隠居のいつていること、ちっとも理論的ではない。直交条件 $D_{21}D_{21}^T$ を満たしていないことが、なぜ定常偏差をなくすためのI動作に関係あるんですか？なにかシステムに不都合があるから、一般化プラントを変えるようにしたんでしょう？その辺のところを簡単に説明して下さいな」

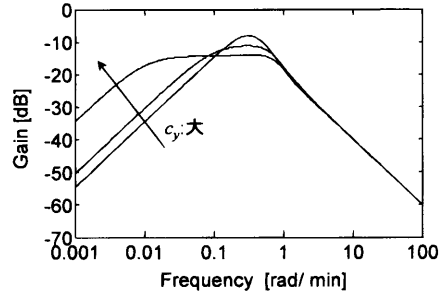
ご隠居「大変よいところに気がついたね。さすがに八つあん。積分器を付加しない場合には、前提条件を満たさない。そこで、状態量と制御量を1つずつ増やすことで一般化プラントを変化させて、条件を満たすようにしたのだ。そうすることで一般化プラントはつぎのようになる」

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ z_u \\ z_1 \\ z_2 \\ z_y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_y q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_n \\ w_1 \\ w_2 \\ r \\ u \end{bmatrix}$$

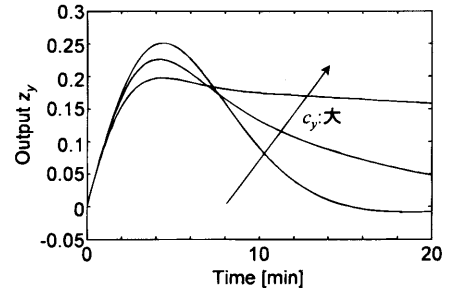
先ほどは満足しなかった条件は

$$D_{21}D_{21}^T = (1 \ 0 \ 0 \ 0)(1 \ 0 \ 0 \ 0)^T = 1$$

となり、 $H_\infty$ 補償器を求めることができる。設計する際のパラメータとして、外乱に対する重み $b_1$ 、目標値に対する重み $b_r$ 、状態量 $x_2$ に対する重み $c_2$ 、



(a) ゲイン線図 ( $z_y/w_1$ )



(b) 外乱応答

Fig. 5  $c_y$ の効果

$H_\infty$ ノルムに対する重み $\gamma$ が考えられる。出力 $z_y$ に対する重み $c_y$ は1とし、制御量 $z_1$ に対する重み $c_1$ は0とする。

熊さん「飛躍がありますね。何の根拠で $c_y=1, c_1=0$ としたんです？」

ご隠居「 $c_y=1$ にした理由は、通常、外乱抑制特性を良好とするために、 $z_y/w_1$ の $H_\infty$ ノルム

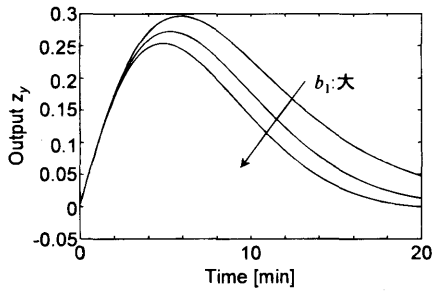
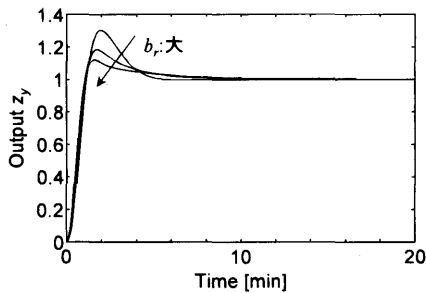
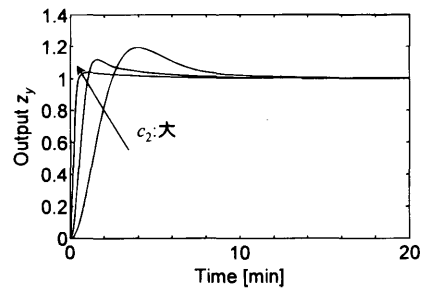
$$\max \left( \frac{z_y}{w_1} \right) = \max \left( b_1 c_y \frac{P}{1+PK} \right) < \gamma$$

を小さくすることを考え、 $c_y$ を大きくすることを考える。しかし、 $c_y$ を大きくすると、中間周波域の $H_\infty$ ノルムは小さくなるが、低周波域において、 $H_\infty$ ノルムが大きくなってしまふ。それにより、外乱応答において、ピーク値は小さくなるが、整定時間は遅くなってしまふ (Fig. 5)。そこで、 $z_y$ に周波数重みを付加した $z_2$ で評価するのだ。 $w_1$ から $z_2$ までの閉ループ系周波数特性は

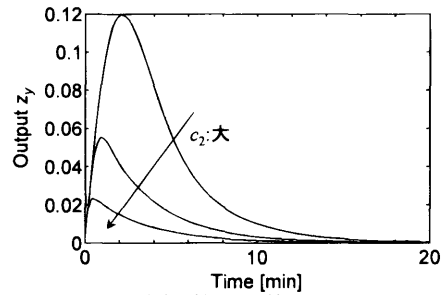
$$\frac{z_2}{w_1} = b_1 c_2 \frac{1}{s} \frac{P}{1+PK} < \gamma$$

となり、積分器によって低周波域のゲインが増大するので、 $\gamma$ を小さくするか、重み $b_1, c_2$ を大



Fig. 8 外乱応答 ( $b_1$ の効果)Fig. 9 目標値応答 ( $b_r$ の効果)

(a) 目標値応答



(b) 外乱応答

Fig. 10 ( $c_2$ の効果)

パなコントローラが得られる。したがって、高周波において、コントローラのゲインが減少することから、ノイズ $w_n$ に対して $H_\infty$ 補償器は有益であることもわかる。重みはつぎのように与えた。

$$b_1=15, b_r=5.3, c_2=1700, \gamma=2000$$

熊さん「これで応答を見せられたって、納得はできませんぜ。何の根拠でこのような重みや $\gamma$ を決めたんですかい？」

ご隠居「まず、 $\gamma$ は2000と決めた。それから、コントローラの設計に最も関係する $b_1$ ,  $b_r$ を大きくしていくのだ。大きくした理由は、外乱抑制特性では、(15)式より、 $z_2/w_1$ の $H_\infty$ ノルムを小さくするため、 $b_1$ を大きくする。目標値追従特性では、(16)式より、 $z_2/r$ の $H_\infty$ ノルムを小さくするため、 $b_r$ を大きくすればよいのだ。(15)式、(16)式から $c_2$ を大きくしてもよいことがわかる。ここで、それぞれの重みを変えたときの応答を示すことにしよう。(Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10) まず、 $b_1$ を変化させたときを見てみよう。ほらな。 $b_1$ を大きくすることで、ピーク値が小さくなり、整定時間も短くなっているだろう。つぎに、 $b_r$ を大

きくしたことで、オーバーシュートが抑えられている。最後に、 $c_2$ を変化させると、両応答を改善していることがわかるだろう。これでなんとなく、重みの役割がつかめたかの。よいか！ $H_\infty$ 補償器は重みの比によって、決まってくるといったな。だから、設計パラメータ(重み)をうまく調整することが重要じゃ。これらの傾向を基に $b_1$ ,  $b_r$ は応答を見ながら、オーバーシュートが小さく、さらにピーク値を小さくし、速応性が良くなるように重みを与えた。最後に、両応答を良好にする $c_2$ を大きくしていったのだ。大きくしすぎると、オーバーシュートが大きくなったり、不安定になるから、応答を見ながら大きくしていったのじゃ。 $\gamma$ を大きくして、同様にその他の重みを大きくして、制御性能を上げて良かったのだが、今回は $\gamma=2000$ と固定した。重みの与え方にこれといった手法はないが、重みを変化させたことによって、どのように応答が変化するかといった傾向を知る必要があるな

八つあん「 $\gamma=2000$ はどうやって決めたのだ？」

ご隠居「重みの比によって $H_\infty$ 補償器が求まるから、なにか1つ値を決める必要がある。とりあえず $\gamma$

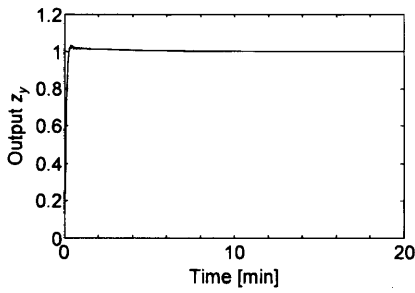


Fig. 11 目標値応答 ( $H_\infty$ 補償器)

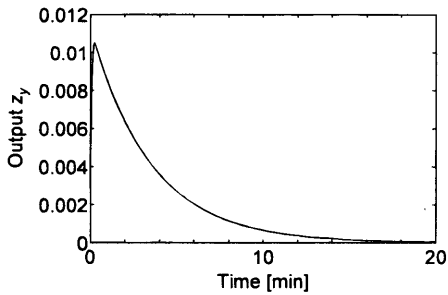


Fig. 12 外乱応答 ( $H_\infty$ 補償器)

を与えたのだ。それにより、ほかの重みを決めることができるのだ」

$H_\infty$ 補償器を適用したときの目標値と外乱に対するステップ応答をFig. 11と Fig. 12に示す。これより、目標値応答をみると、オーバーシュートが小さく、さらに、速応性が良いことがわかる。外乱応答では、ピーク値が小さい、これより、 $H_\infty$ 補償器の有効性を確認できる。

設計された $H_\infty$ 補償器の伝達関数は

$$K(s) = \frac{3.806 \times 10^5 s + 1.059 \times 10^5}{s(s^2 + 210.9s + 4134)}$$

である。分子の係数が大きいことから、コントローラのゲインは高いことがわかる。

八つあん「 $H_\infty$ 補償器の伝達関数は

$$K(s) = \frac{92s + 26}{s(2.4 \times 10^{-4}s^2 + 5.1 \times 10^{-2}s + 1)}$$

$$\approx \frac{92s + 26}{s} = 92 \left( 1 + \frac{1}{3.5s} \right)$$

となり、PIコントローラと等価になりますね」  
ご隠居「確かに、目標値追従と外乱抑制を見ると、Fig.13とFig.14になる。Fig. 11とFig. 12とほと

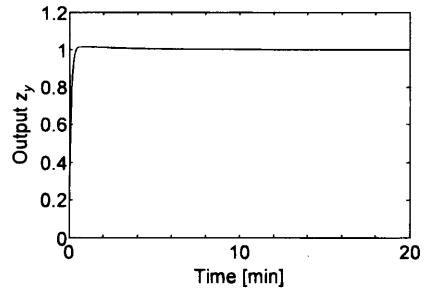


Fig. 13 目標値応答 (PIコントローラ)

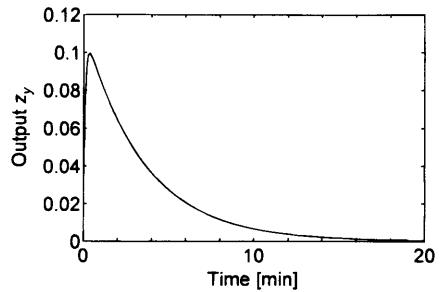


Fig. 14 外乱抑制 (PIコントローラ)

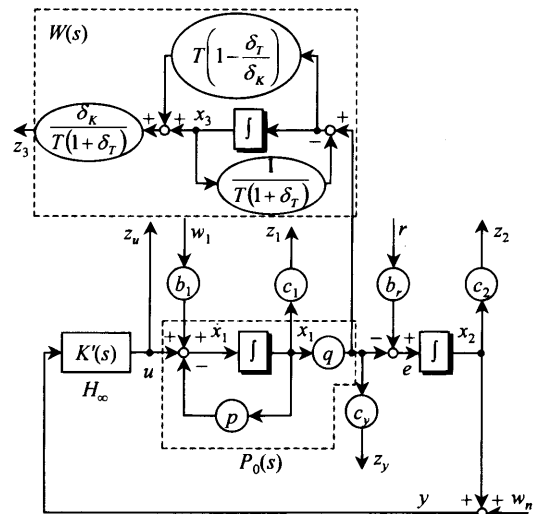


Fig. 15  $H_\infty$ 制御系

んど違いがないことがわかる」

## 5.2 1次系 (変動プラント)

つぎに、不確かさを考慮してコントローラを設計する。不確かさは乗法的な不確かさで考えることとし、 $H_\infty$ 制御系を構成する (不確かさは前の例題で求めている)。 (Fig. 15)

この $H_\infty$ 制御系を基に、一般化プラントはつぎ

のように定義される.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

ここで, それぞれのベクトル・マトリクスはつぎのように与えられる.

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T,$$

$$z = [z_u \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_y]^T,$$

$$w = [w_n \ w_1 \ w_2 \ r]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 \\ q & 0 & -1/T(1+\delta_T) \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \frac{1-\frac{\delta T}{\delta K}}{1+\delta T} p & 0 & \frac{1}{T(1+\delta T)} \left( \delta K - \frac{1-\frac{\delta T}{\delta K}}{1+\delta T} \right) \\ qc_y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [0 \ 1 \ 0],$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_{22} = 0.$$

これらはDGKF法の条件を満足している. 不確かさを乗法的な不確かさで与えた場合には, ロバスト安定条件は, 前項の(16)式より

$$\left\| \frac{P_0 K W}{1 + P_0 K} \right\|_\infty < 1$$

であった. ゆえに, このロバスト安定条件の伝達関数は $H_\infty$ 制御系をみると,  $r \rightarrow z_3$ の伝達関数と等価であることがわかる. したがって, ロバスト安定条件を満足することを確認するさいには, の $H_\infty$ ノルムをみることで判断できる(Fig.16).

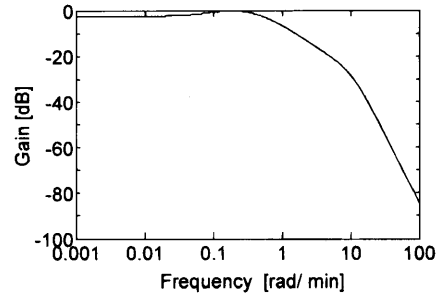


Fig. 16 ロバスト安定条件 ( $z_3/r$ )

つまり,  $\|z_3/r\|_\infty < 1$ となるように $K'(s)$ を設計すればよい. 重みはロバスト安定となるように以下のように与えた.

$$b_1=0.1, b_r=0.1, c_2=1200, \gamma=2000$$

熊さん「また!ご隠居. この重みはどうやって与えたんですか?」

ご隠居「経験的に,  $b_1, b_r$ がロバスト安定に大きな影響を与えることがわかっていたのじゃ. そこで,  $b_1, b_r$ を小さくしていった. あるところで変化が見られなくなるから,  $c_2$ を小さくして, ロバスト安定条件を満たすようにしたのだ」

熊さん「ご隠居.  $z_3/r$ に $b_1$ は絡んでいないのに, なんで小さくしたんですか?」

ご隠居「 $H_\infty$ 補償器は $b_1, b_r, c_2$ , から決まってくるだろ. ゆえに,  $K(s)$ に $b_1$ が関わる. だから,  $z_3/r$ に絡むことになるのだ.  $c_2$ も同様じゃ」

熊さん「 $z_3/r$ には $b_r$ が関与しているから $b_r=0.00001$ にすれば, ロバスト安定を満たすのではないか?」

ご隠居「ロバスト安定 ( $z_3/r$ ) を確認するときは,  $b_r$ を除いて, ゲイン線図を描くのじゃ. そうしないと, ロバスト安定条件に合わないからな. だから,  $b_r=0.00001$ にすればよいものじゃないのだ. 重みは $H_\infty$ 補償器を設計するためのパラメータで, ロバスト安定条件に関わるものではない」

$H_\infty$ 補償器を適用したときの目標値と外乱に対するステップ応答をFig.17と18に示す. この結果を見ると,  $H_\infty$ 補償器はロバスト安定条件を満たすため, プラントが変動しても安定を保持していることがわかる. Fig.19はノミナルプラントで設計した $H_\infty$ 補償器を50%変動したプラントに

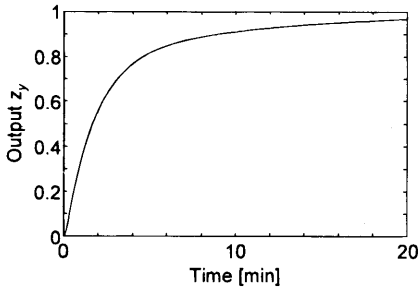


Fig. 17 目標値応答 (変動プラント)

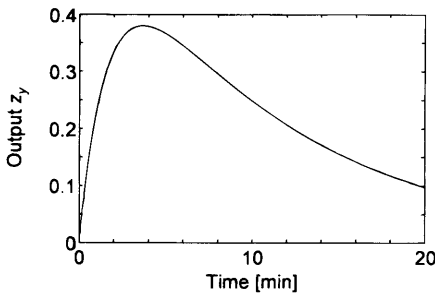


Fig. 18 外乱応答 (変動プラント)

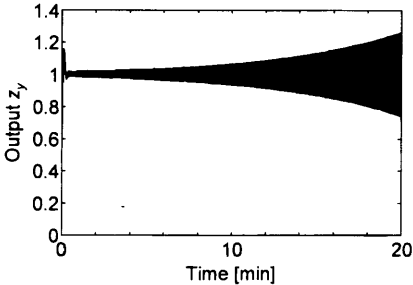


Fig. 19 目標値応答 (変動プラント)

適用したときの目標値応答を示している。これを見ると、不安定となっていることがわかる。一方、ロバスト安定条件を満たす補償器は安定を保持していることから、変動プラントに有効であることがわかる。このように、 $H_\infty$ 制御理論を用いて、ロバスト安定なコントローラを設計することができる。

設計された $H_\infty$ 補償器の伝達関数は

$$K(s) = \frac{184.6s^2 + 101.6s + 9.289}{s(s^3 + 16.08s^2 + 129.2s + 53.21)}$$

である。ノミナルプラントに対して設計した補償器と比較すると、分子の係数が小さい。ゆえに、

ゲインを大幅に下げないと、ロバスト安定にならないことがわかる。

八つあん「あれ？ $H_\infty$ 補償器の伝達関数の次数が1つ増えてますが、これはどうしてですかい？」

ご隠居「一般化プラントにモデル化誤差をふかしているだろう。それによって、一般化プラントの次数が1つ増えたから、 $H_\infty$ 補償器の次数も1つ増えたのだ」

八つあん「 $H_\infty$ 補償器の伝達関数は

$$K(s) = \frac{3.5s^2 + 1.9s + 0.17}{s(2 \times 10^{-2}s^3 + 0.3s^2 + 2.4s + 1)}$$

$$\approx \frac{1.9(1.8s + 1)}{2.4s + 1} \approx 1.9$$

となり、ほとんどP動作ですね。ノミナルプラントで設計したらPI動作、変動プラントで設計したらP動作、ご隠居の設計、可笑しくないですか？」  
ご隠居「そんなことはない。わしが思うに、ロバスト制御を考える必要のないプラントに対して $H_\infty$ 制御を適用したから、こんなことになったのだ。だから、1次系の例題は適切ではなかった。そこで、次回は2次系を例にとって $H_\infty$ 補償器を設計しよう。それまで、もう少し待ってくれ」

「受理年月日 2005年9月30日」