所属： 小山工業高等専門学校 一般科(数学)

研究タイトル： 不確定性定量評価ツールとしての汎用性を見据えたハイブリッド確率有限要素法の開発

researchmap：https://researchmap.jp/read0109740

氏名：	中川英則 ／ NAKAGAWA Hidenori	E-mail：	nakagawa@oyama-ct.ac.jp
職名：	教授	学位：	博士(工学)

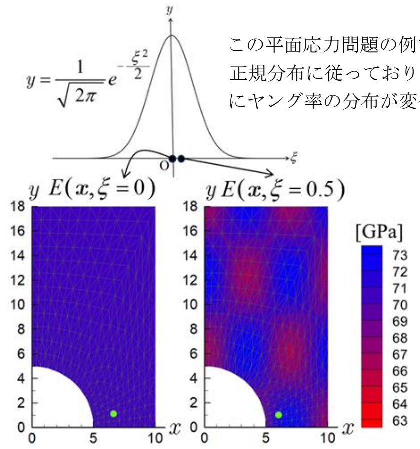
所属学会・協会：	土木学会、日本計算工学会
キーワード：	計算力学(非線形有限要素法，確率有限要素法，応用確率統計)
技術相談 提供可能技術：	・ 非線形有限要素法に関すること ・ 確率有限要素法に関すること ・ 工学系の数学(基礎数学，微分積分，線形代数，微分方程式，ベクトル解析，複素解析，フーリエ解析，確率統計 等）に関すること

研究内容： 不確定性定量評価ツールとしての汎用性を見据えたハイブリッド確率有限要素法の開発

本研究では、モンテカルロ法(MCM)では相当な時間が掛かる問題について、効率的に MCM と同程度の結果を得ることができる手法(ハイブリッド確率有限要素法)の開発を行っています。材料特性や外荷重、境界条件などが正確に分からない力学問題に対し、そのパラメータの不確かさを確率として表現した確率モデルを解くための手法として、MCM があります。MCM は大数の法則を基にしているため、欲しいモーメント量を得るためにはパラメータの値を変えながら 1000～10000 回もの計算を行う必要があります。1 回に掛かる計算時間が比較的に短いと MCM はとても便利(non-intrusive)でロバストな方法です。しかし扱う対象が非線形となった場合、ニュートン法による繰り返しを必要としますので解が閾値内に収まるまでそれなりの計算時間を要します。例えば過去の研究では、ヤング率と降伏応力の確率分布が正規分布に従う i.i.d.として、一様引張りを受ける平面ひずみ確率弾塑性モデルを扱いました。この時は、MCM の 1 回の載荷計算(Δu を与える)に 1.6 秒程を要し、さらに全変位量(u)に達するまで 207 インクリメント必要でした。そして、この試行をパラメータの値を変えながら 1000 回行ったので 5520 分(3.8 日)掛かりました。これを、当時に開発していた NISP 確率有限要素法(NISP-SSFEM) を用いると 139 分程度で MCM と同程度の結果を得ることができます。

次に、「確率弾塑性問題を扱う場合の難しさはどこか?」について記します。弾塑性問題を扱う有限要素法では、対象物が塑性状態に入ったときに、応力が降伏曲面にのり、かつ、内的エネルギー(ひずみエネルギー)と外的エネルギー(外力仕事)が釣り合うように、繰り返し計算によって応力を修正します。ここに確率(例えばヤング率のみが確率変数とします)を考慮します。この場合、降伏曲面は固定されていますが、応力は確率的に変動します。外力は今の場合は定数としますが、確率変数となるひずみエネルギーの総和は平均 2 乗収束の意味で外力仕事に収束しなければなりません。しかも、ひずみエネルギーは対象物の全ての位置で生じた弾性エネルギーの足し合わせです(有限要素ですと全要素におけるガウス点での仕事量の合計です)。この状況で、塑性状態にある全ての位置での応力が整然と降伏曲面上に釣り合いを保ってのらなければなりません。このような問題を確率弾塑性問題では扱います。

現在の研究では、多次元確率場(例えば、ヤング率、降伏応力などが確率変数である場合)における確率弾塑性問題を効率的かつ安定的に解くための手法の開発を行っています。以前の研究で、有限変形(大変形とも言います)の範囲で確率弾塑性問題を扱いました。その際に、それまでの NISP-SSFEM では状況によっては不安定となる点と確率場の射影(内積)計算に多くの計算時間を要する点が弱点であることが判明しました。現在の研究では、多次元確率場を扱いながらも、これらの問題点を解決する新たな手法の開発 (Me NISP – SSFEM) を行っています。



この平面応力問題の例では，ξは標準正規分布に従っており，ξを変える度にヤング率の分布が変化します(下図)．

Fig.1 穴あき長方形板[単位：cm]のヤング率分布

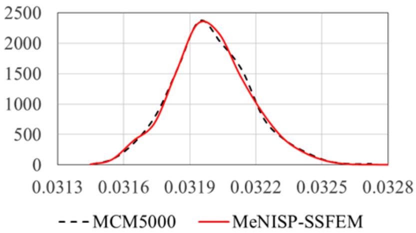


Fig.2 緑点(Fig.1)におけるy方向変位[mm]の確率密度関数

モンテカルロ法を5000回行った結果と比べて，たった1回の計算ですが，高い精度で確率密度分布が得られていることが分かります．

材料特性 (von Mises)

$\overline{E} = 70\,[\mathrm{Gpa}],\ s_E = 0.1,\ n = 0.2$

$E(\boldsymbol{x}, x) = \overline{E}\ \text{ラ}\left\{1 + s_E \sqrt{0.89}\, j(x,z)\, x\right\}$

$j(x,z) = 1.01\cos(0.90x)\cos(0.51z)$

$s_y(\overline{e}^p) = 0.243 + 0.2\,\overline{e}^p$ [Gpa (線形硬化)]

載荷条件

$D u = 0.02$ mm

全変位 $u = 0.14$ mm

Department of General Education (mathematics)
National Institute of Technology, Oyama College

Development of a hybrid stochastic finite element method as a versatile tool for uncertainty quantification

researchmap : https://researchmap.jp/read0109740

Name	NAKAGAWA Hidenori	E-mail	nakagawa@oyama-ct.ac.jp
Status	Professor		
Affiliations	JSCE (Japan Society of Civil Engineers) JSCES (The Japan Society for Computational Engineering and Science)		

Keywords	Computational Mechanics (non-linear stochastic finite element method)
Technical Support Skills	・ Non-linear finite element method ・ Stochastic finite element method ・ Engineering mathematics (calculus, linear algebra, differential equation, vector analysis, complex analysis, Fourier analysis, probability・statistics, etc.)

Research Contents

Development of a hybrid stochastic finite element method as a versatile tool for uncertainty quantification

I am currently developing a method (hybrid stochastic finite element method) that can efficiently produce results equivalent to those of Monte Carlo methods (MCM) for problems where MCM is unsuitable because of its high computational cost and time consumption. Since MCM is based on the law of large numbers, it is necessary to calculate 1,000 to 10,000 times while changing the parameter values in order to obtain meaningful moment constant. When the computation time per simulation is relatively short, MCM is a very convenient (non-intrusive) and robust method. However, when dealing with stochastic nonlinear problems, MCM requires a considerable amount of computation time to perform iterations using Newton's method many times to obtain a meaningful solution that falls within the specified threshold. In a numerical experiment, the MCM process took 5,520 minutes (3.8 days). By contrast, the NISP Spectral Stochastic Finite Element Method (NISP-SSFEM), which is still under development, produced similar results in about 139 minutes.

Next, I will note where the difficulty lies when dealing with stochastic elastic-plastic problems in solid mechanics. Here, I consider the case in which only Young's modulus is a random variable. In this case, the yield surface is fixed, but the stress fluctuates probabilistically. The external force is assumed to be constant. However, total strain energy is a random variable that must converge to the work by the external force in the sense of mean squared convergence. Furthermore, strain energy is the sum of the elastic energy generated at the Gauss points across all finite elements. Under these conditions, the stresses in the plastic state at all positions within the object must map to the correct position on the yield surface while maintaining equilibrium. These types of problems are addressed in stochastic elastoplastic problems.

Current research focuses on developing methods to solve stochastic elastoplastic problems in multi-dimensional random fields (e.g., when Young's modulus, yield stress, etc., are random variables) efficiently and stably. In previous research, I addressed the stochastic elastoplastic problem in the context of finite deformation, also known as large deformation. It then became apparent that the previous NISP-SSFEM had two drawbacks. First, it could become unstable under certain conditions. Second, calculating the stochastic projection, i.e., the quadrature as the inner product to map the target random variable onto the random field called homogeneous chaos, required significant computational time. Current research is developing a new method (MeNISP-SSFEM) to solve efficiently the forementioned issues in the setting of the multi-dimensional random fields.

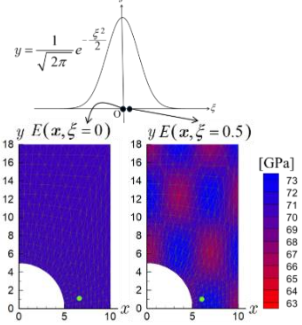


Fig.1 Young's Modulus(random variable) distribution

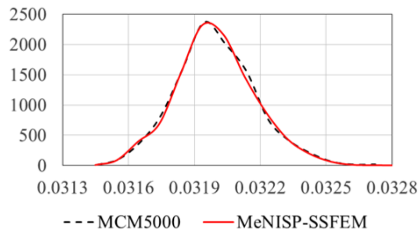


Fig.2 PDF of y-direction displacement [unit: mm] at the green point in **Fig.1**

Material Properties(von Mises)

$\overline{E} = 70$ [Gpa], $s_E = 0.1$, $n = 0.2$

$E(\boldsymbol{x}, x) = \overline{E}$ ヲ $\left\{1 + s_E\sqrt{0.89}\, j(x,z)\, x\right\}$

$j(x,z) = 1.01\cos(0.90x)\cos(0.51z)$

$s_y(\overline{e}^p) = 0.243 + 0.2\,\overline{e}^p$ [Gpa (linear hardening)]

Loading Condition

D $u = 0.02$ mm

total disp. $u = 0.14$ mm