所属：小山工業高等専門学校　一般科(数学)

研究タイトル：不確定性定量評価ツールとしての汎用性を見据えたハイブリッド確率有限要素法の開発

researchmap：https://researchmap.jp/read0109740



氏名：	中川英則 ／ NAKAGAWA Hidenori	E-mail：	nakagawa@oyama-ct.ac.jp
職名：	教授	学位：	博士(工学)
所属学会・協会：	土木学会、日本計算工学会		
キーワード：	計算力学(非線形有限要素法，確率有限要素法，応用確率統計)		
技術相談 提供可能技術：	・非線形有限要素法に関すること ・確率有限要素法に関すること ・工学系の数学(基礎数学，微分積分，線形代数，微分方程式，ベクトル解析，複素解析，フーリエ解析，確率統計　等）に関すること		

研究内容：不確定性定量評価ツールとしての汎用性を見据えたハイブリッド確率有限要素法の開発

本研究では、モンテカルロ法(MCM)では相当な時間が掛かる問題(確率弾塑性問題)について、効率的に MCM と同程度の結果を得ることができる手法(ハイブリッド確率有限要素法)の開発を行っています。

確率弾塑性問題を扱う場合、MCM は大数の法則を基にしているため、欲しいモーメント量を得るためにはパラメータの値を変えながら 1000～10000 回もの計算を行う必要があります。1回に掛かる計算時間が比較的に短いと MCM はとても便利(non-intrusive)でロバストな方法です。しかし扱う対象が非線形となった場合、ニュートン法による繰り返しを必要としますので解が閾値内に収まるまでそれなりの計算時間を要します。

次に、「確率弾塑性問題を扱う場合の難しさはどこか?」について記します。弾塑性問題を扱う有限要素法では、対象物が塑性状態に入ったときに、応力が降伏曲面に載り、かつ、内的エネルギー(ひずみエネルギー)と外的エネルギー(外力仕事)が釣り合うように、繰り返し計算によって応力を修正します。ここに確率(例えばヤング率のみが確率変数とします)を考慮します。 簡単のために降伏曲面は固定しています(場合によっては確率を伴って変動する確率変数となります。)が、応力は確率的に変動します。外力は今の場合は定数としますが、確率変数となるひずみエネルギーの総和は平均2乗収束の意味で外力仕事に収束しなければなりません。しかも、ひずみエネルギーは対象物の全ての位置で生じた弾性エネルギーの足し合わせです(有限要素ですと全要素におけるガウス点での仕事量の合計です)。この状況で、塑性状態にある全ての位置での応力が整然と降伏曲面上に釣り合いを保って載らなければなりません。このような問題を確率弾塑性問題では扱います。

ハイブリッド確率有限要素法は1回の計算で欲しい確率モーメントが得られるため、多くの商用有限要素法ソフトウェアに取り込まれるなどもっと普及してもよいはずですが、世界の現状は研究開発段階となっています。その理由として，(1)既存の有限要素法のプログラムをそのままでは利用できない(intrusive 法であること)、(2)確率非線形性が絡む問題全般についての解法が完全には確立していない、(3)確率問題(特に高次元確率場)を扱う際に避けられない次元の呪い、この 3 点がネックになっていると考えています。

現在の研究(科研費 23K04012)では、確率弾塑性問題を効率的かつ安定的に解くための手法の開発(上記(1),(2)の解決を図るため)、そして多次元確率場(例えば、ヤング率、降伏応力などが確率変数である場合)を効率的かつ安定的に解くための手法(Multi-element Non-Intrusive Spectral Projection Hybrid Perturbation-Polynomial Chaos Stochastic Finite Element Method)の開発(上記(3)の解決を図るため)を行っています。

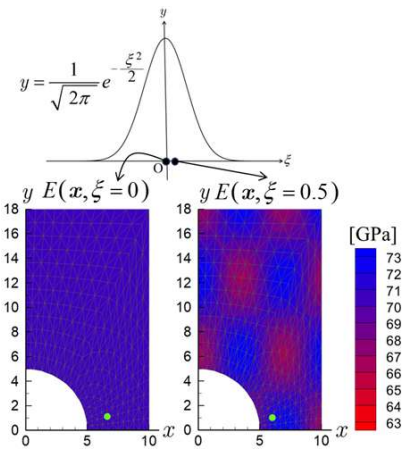


Fig.1 穴あき長方形板[単位：cm]のヤング率分布

この平面応力問題の例では，ξ は標準正規分布に従っており，ξ を変える度にヤング率の分布が変化します(Fig.1).

材料特性 (von Mises)

$\bar{E} = 70\,[\mathrm{Gpa}]$，$\sigma_E = 0.1$，$\nu = 0.2$

$E(x,\xi) = \bar{E}\{1 + \sigma_E\sqrt{0.89}\,\varphi(x,y)\,\xi\}$

$\varphi(x,y) = 1.01\cos(0.90\,x)\cos(0.51y)$

$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0.243 + 0.2\bar{\varepsilon}^p\ [\mathrm{Gpa}\,(\text{線形硬化})]$

載荷条件

$\Delta u = 0.02\,\mathrm{mm}$

全変位 $u = 0.14\,\mathrm{mm}$

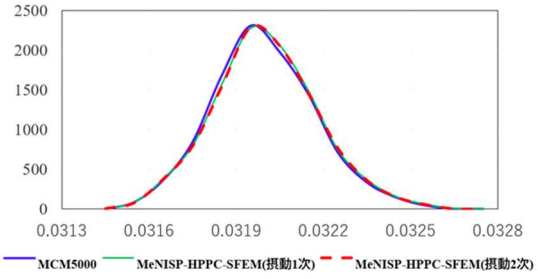


Fig.2 緑点(Fig.1)における y 方向変位[mm]の確率密度関数

モンテカルロ法を5000回行った結果と比べて，たった1回の計算ですが，高い精度で確率密度分布が得られていることが分かります.

Department of General Education (mathematics)
National Institute of Technology, Oyama College

Development of a hybrid stochastic finite element method as a versatile tool for uncertainty quantification

researchmap : https://researchmap.jp/read0109740



Name	NAKAGAWA Hidenori	E-mail	nakagawa@oyama-ct.ac.jp
Status	Professor		
Affiliations	JSCE (Japan Society of Civil Engineers) JSCES (The Japan Society for Computational Engineering and Science)		

Keywords	Computational Mechanics (non-linear stochastic finite element method)
Technical Support Skills	・ Non-linear finite element method ・ Stochastic finite element method ・ Engineering mathematics (calculus, linear algebra, differential equation, vector analysis, complex analysis, Fourier analysis, probability・statistics, etc.)

Research Contents

Development of a hybrid stochastic finite element method as a versatile tool for uncertainty quantification

I am currently developing a method (hybrid stochastic finite element method) that can efficiently produce results equivalent to those of Monte Carlo methods (MCM) for problems where MCM is unsuitable because of its high computational cost and time consumption. Since MCM is based on the law of large numbers, it is necessary to calculate 1,000 to 10,000 times while changing the parameter values to obtain meaningful moment constant. When the computation time per simulation is relatively short, MCM is a very convenient (non-intrusive) and robust method. However, when dealing with stochastic nonlinear problems such as the stochastic elasto-plastic problems, MCM requires a considerable amount of computation time to perform iterations using Newton's method many times to obtain a meaningful solution that falls within the specified threshold.

Next, I will discuss the challenges of dealing with stochastic elastic-plastic problems in solid mechanics. For this example, I will assume that Young's modulus is the only random variable. Here, the yield surface is fixed but the stress fluctuates probabilistically. The external force is assumed to be constant. However, total strain energy is a random variable that must converge to the work of the external force in the sense of mean squared convergence. Furthermore, strain energy is the sum of the elastic energy generated at the Gauss points across all finite elements. Under these conditions, stresses in the plastic state at all positions within the object must correspond to the correct position on the yield surface, while maintaining equilibrium. This type of problem is addressed in stochastic elasto-plasticity.

The hybrid stochastic finite element method obtains the necessary probabilistic moments in one calculation, so this method would be better suited to commercial CAE software. However, in practical situations around the world, hybrid stochastic finite element methods are still in the laboratory stage of development. I think there are three reasons why the development of the hybrid stochastic finite element method remains at the laboratory level: (1) SSFEM relies on an intrusive approach, making it impossible to solve target problems using existing software without modifying the governing equations; (2) methods for solving problems involving stochastic non-linearity have not yet been established; and (3) the “curse of dimensionality” in high-dimensional stochastic fields.

Current research focuses on developing efficient and robust methods to solve stochastic elasto-plastic problems, which aims to address the previous issues (1) and (2). The research also focuses on developing the Multi-Element Non-Intrusive Spectral Projection Hybrid Perturbation–Polynomial Chaos Stochastic Finite Element Method to solve multi-dimensional stochastic elasto-plastic problems efficiently and robustly, which aims to address the previous issue (3).

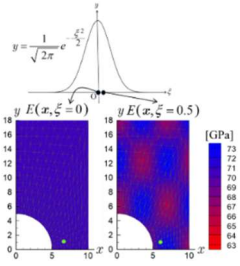


Fig.1 Young's Modulus(random variable) distribution

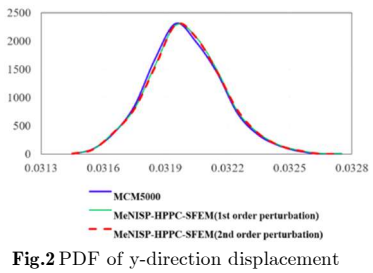


Fig.2 PDF of y-direction displacement [unit: mm] at the green point in **Fig.1**

material properties (von Mises)
$\bar{E} = 70$ [Gpa] , $\sigma_E = 0.1$, $\nu = 0.2$
$E(x,\xi) = \bar{E}\{1 + \sigma_E\sqrt{0.89}\,\varphi(x,y)\,\xi\}$
$\varphi(x,y) = 1.01\cos(0.90\,x)\cos(0.51y)$
$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0.243 + 0.2\bar{\varepsilon}^p$ [Gpa (linear hardning)]

loading condition
$\Delta u = 0.02$ mm
total displacement $u = 0.14$ mm